АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 МАЙ, 1968 ВЫПУСК 2

О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ЗВЕЗДНОЙ АТМОСФЕРЕ

И. А. КЛИМИШИН

Поступила 6 октября 1967

Получено приближенное решение задачи о структуре ударной волны как без учета, так и с учетом давления и плотности энергии излучения за фронтом волны. Изложен также метод расчета скачков параметров на фронте ударной волны, движущейся в смеси газ—излучение, и построена облегчающая такие расчеты номограмма.

Влияние потока излучения с фронта ударной волны на распределение параметров газа перед и за фронтом волны рассматривалось уже в ряде работ [1—11]. В частности, в [3—5] детально исследована структура ударных волн в земной атмосфере. Выяснено, что перед фронтом волны существует а) неравновесная зона, в которой температура экспоненциально возрастает до значения T_k, при котором плотность излучения единицы объема сравнивается с равновесной, а лучистый поток равен гидродинамическому:

$$\frac{4\sigma T_k^4}{\sqrt{3}} = \frac{D\rho_0 R T_k}{\gamma - 1}. \tag{1}$$

Здесь D — скорость движения фронта волны, ρ_0 — плотность невозмущенного газа, R — газовая постоянная в расчете на 1 г вещества, γ — отношение удельных теплоемкостей и б) равновесная зона прогревания, где излучение находится в локальном равновесии с веществом, а перенос излучения имеет характер лучистой теплопроводности. Совместное решение уравнений переноса в диффузионном приближении и уравнений гидродинамики приводит к следующему распределению температуры в этой области ($0 < \tau < \tau_k$):

$$T = T_k \left| 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} |\tau - \tau_k| \right|^{1/4}, \qquad |\tau_k| = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left| \left(\frac{T_-}{T_k} \right)^4 - 1 \right|. \tag{2}$$

Нетрудно, однако, убедиться, что в звездных условиях при $\rho_0 \lesssim 10^{-7}$ в большинстве случаев величина Tк, определяемая выражением (1), меньше температуры невозмущенного газа T_0 (например, при $\rho = 10^{-8}$ и $D = 50$ *км/сек*, Tк $\approx 3600^\circ$). Другими словами, в звездных условиях перед фронтом волны неравновесной области нет. В связи с этим представляется более целесообразным в этом случае, как это было сделано в [9], решать задачу о структуре волны, представляя функцию источника $B(\tau)$ перед $(\tau > 0)$ и за $(\tau < 0)$ фронтом ударной волны в виде:

$$B_a(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_a^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} \left[(T_-^4 - T_0^4) e^{-\alpha_0 \tau} + T_0^4 \right] \quad (\tau > 0)$$

$$B_b(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_b^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} \left[(T_+^4 - T_1^4) e^{-\alpha_1 \tau} + T_1^4 \right], \quad (\tau < 0), \tag{3}$$

где индексами „a“ и „b“ обозначены параметры перед и за фронтом волны соответственно, T_- и T_+ — температура непосредственно перед и за фронтом, α_0 и α_1 — постоянные, определяемые из граничных условий. При $\tau = \pm \infty$ (3) естественным образом представляет температуру на значительном удалении от фронта волны.

Попутно отметим, что в [9] структура зоны прогревания была получена в предположении, что функция источника для определенной оптической глубины τ с точностью до постоянного множителя равна полной вероятности выхода кванта из этой глубины. Такое предположение тождественно выполняется для неподвижной границы рассеивающей среды [12]. Однако полученное в [9] распределение для температуры $T = T_- e^{-\frac{1}{4}\tau}$ весьма сильно отличается от (2). Весьма вероятно, что в случае движения границы рассеивающей среды — фронта волны — равенство $B(\tau) = \mathrm{const}\, P(\tau)$ не выполняется, получить же аналитическое выражение для функции $P(\tau, t)$, определяющей вероятность выхода кванта из среды в заданный момент времени t, и тем самым строго решить поставленную задачу с учетом движения границы среды фронта волны пока не удалось.

В [10] структура ударной волны была рассчитана путем совместного решения уравнений переноса (во втором приближении) и уравнений гидродинамики, причем функция источника принималась в виде (3). Однако полученная при этом система 4-х алгебраических уравнений для определения величин T_-, T_+, α_0 и α_1 весьма громоздка, так что каждый отдельный случай требует специальных расчетов методом последовательных приближений.

В случае сильной ударной волны становится необходимым учитывать давление и плотность радиации за фронтом волны. При этом, как было показано в [5], существенно меняется и сама структура ударной волны. В частности, если температура за фронтом волны выше некоторой величины T_*, то плотность вещества и температуры в зоне прогрева меняются непрерывно при переходе через фронт волны. Общий анализ структуры ударных волн дан также в [11], однако и здесь необходимы достаточно сложные численные расчеты в каждом отдельном случае.

Важность расчетов структуры ударной волны, движущейся в звездной атмосфере, очевидна из следующих соображений: как было показано в [4, 5], наличие зоны прогрева перед фронтом ударной волны приводит к экранированию видимых длин волн, излучаемых фронтом. На бесконечность выходят не кванты, рожденные за фронтом волны, при температуре T, а кванты, излученные некоторой промежуточной зоной в прогревном слое перед фронтом волны, в котором длина пробега квантов видимого света порядка средней длины пробега излучения. Температура этого слоя и будет эффективной температурой ударной волны. В частности, как показал анализ поглощательных свойств звездных атмосфер [13], для плотностей $\rho \sim 10^{-7} \div 10^{-9}$ длина пробега квантов видимого света меньше толщины зоны прогрева, а эффективная температура ударной волны, движущейся в атмосфере звезд с плотностью $10^{-7} \div 10^{-9}$, остается порядка $15\,000^\circ$ независимо от силы волны.

Ниже мы приводим приближенное решение задачи о структуре ударной волны, движущейся в звездной оболочке. Полученные аппроксимационные выражения позволяют легко оценить основные характеристики прогревной зоны. Так как толщина прогревной зоны определяется температурой за фронтом ударной волны, то в пункте 3 излагается также метод расчета скачков параметров на фронте ударной волны, движущейся в смеси газ—излучение. Для облегчения соответствующих расчетов нами построена вычислительная номограмма.

1. *Структура ударной волны умеренной интенсивности.* Рассмотрим прежде всего случай ударной волны умеренной интенсивности, когда давлением излучения за фронтом волны можно пренебречь по сравнению с газовым. Структура, то есть распределение температуры, давления и плотности перед и за фронтом ударной волны, как известно, определяется путем решения системы уравнений, выражающих

законы сохранения массы, импульса и энергии в каждой текущей точке:

$$\rho v = -\rho_0 D, \tag{4}$$

$$p + \rho v^2 = p_0 + \rho_0 D^2, \tag{5}$$

$$\rho v\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) + F = -\rho_0 D\left(\varepsilon_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{D^2}{2}\right). \tag{6}$$

Здесь p, ρ и v — давление, плотность и скорость в текущей точке прогревной зоны, ε — внутренняя энергия на единицу массы, F — поток излучения с фронта волны. Величины, обозначенные индексом „0", осуществляются при $x = +\sim$, где $F = 0$, знак „—" учитывает направление движения. Воспользуемся также уравнением состояния

$$p = \rho RT \tag{7}$$

и обозначениями

$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho}, \qquad \eta_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \tag{8}$$

находим из системы (4)—(6) следующие соотношения

$$T = T_0 \eta \left\{1 + \frac{D^2}{RT_0}(1 - \eta)\right\}, \tag{9}$$

$$F = \rho_0 D^3 \frac{1 - \eta}{2\eta_1}\left[(\eta - \eta_1) - (1 + \eta_1)\frac{RT_0}{D^2}\right]. \tag{10}$$

Обозначим величины в зоне прогревания перед фронтом волны индексом „a", за фронтом — „b", значения соответствующих параметров непосредственно перед и за фронтом волны — индексами „—" и „+". Исключая из (9), (10) η и пренебрегая высшими порядками величины RT_0/D^2, находим значения потоков перед и за фронтом волны:

$$F_a = \frac{D\rho_0 R}{2}\,\frac{1 - \eta_1}{\eta_1}(T_a - T_0), \tag{11}$$

$$F_b = \frac{D\rho_0 R}{2}\,\frac{1 - \eta_1}{\eta_1(1 - 2\eta_1)}(T_b - T_1), \tag{12}$$

причем

$$T_1 = \eta_1(1 - \eta_1)\frac{D^2}{R}. \tag{13}$$

Из уравнения переноса в приближении Эддингтона, обозначая через J среднюю интенсивность и F — поток, находим

$$\frac{d^2 J}{d\tau^2} = 3(J - B) \text{ или } J = B - \frac{1}{4\pi}\frac{dF}{d\tau}, \tag{14}$$

$$F = -\frac{4\pi}{3}\frac{dJ}{d\tau}. \tag{15}$$

При решении системы (11)—(15), в результате которого и находится структура ударной волны, воспользуемся следующими граничными условиями:

1) поток и средняя интенсивность излучения при переходе через фронт ударной волны меняются непрерывно, то есть

$$F_a(0) = F_b(0); \quad J_a(0) = J_b(0). \tag{16}$$

2) Непосредственно перед и за фронтом волны лучистый поток, полученный решением системы (14)—(15), равен гидродинамическому (11) или (12); а также соответственно равны производные этих потоков в точке $\tau = 0$:

$$F_a(0)_{\text{гидр}} = F_a(0)_{\text{луч}}, \qquad F_b(0)_{\text{гидр}} = F_b(0)_{\text{луч}}, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{dF_{a\,\text{гидр}}}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{dF_{a\,\text{луч}}}{d\tau}\right)_{\tau=0}\\ \left(\frac{dF_{b\,\text{гидр}}}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{dF_{b\,\text{луч}}}{d\tau}\right)_{\tau=0}\end{gathered} \tag{18}$$

причем производные от температуры T_a и T_b определяются из уравнения (3).

3) Потоки на бесконечности равны нулю

$$F_a(+\infty) = F_b(-\infty) = 0. \tag{19}$$

Выражение для потока излучения $F_{\text{луч}}$ легко находится после приведения системы (14)—(15) к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2F}{d\tau^2} - 3F - 4\pi\frac{dB}{d\tau} = 0, \tag{20}$$

а, воспользовавшись представлением (3), находим:

$$\begin{gathered}\frac{d^2F_a}{d\tau^2} - 3F_a - 4\alpha_0\sigma\,[T_-^4 - T_0^4]\,e^{-\alpha_0\tau} = 0,\\ \frac{d^2F_b}{d\tau^2} - 3F_b - 4\alpha_1\sigma[T_+^4 - T_1^4]\,e^{\alpha_1\tau} = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Решения этой системы при условии (19) легко находятся в виде

$$F_a = c_0 e^{-\sqrt{3}\tau} - \frac{4\alpha_0\sigma\,[T_-^4 - T_0^4]}{\alpha_0^2 - 3} e^{-\alpha_0\tau},$$

$$F_b = c_1 e^{\sqrt{3}\tau} + \frac{4\alpha_1\sigma\,[T_+^4 - T_1^4]}{\alpha_1^2 - 3} e^{\alpha_1\tau}. \tag{22}$$

Воспользовавшись далее граничными условиями (16)—(18) и решениями (11), (12) и (22), получаем систему четырех алгебраических уравнений, совместное решение которых полностью определяет структуру ударной волны:

$$T_+ - T_- = (1 - 2\eta_1)(T_- - T_0), \tag{23}$$

$$\frac{T_-^4 - T_0^4}{T_-^3}\alpha_0 = \frac{32\sigma}{D\rho_0 R}\,\frac{\eta_1}{1-\eta_1}[T_+^4 - T_-^4] - \frac{T_+^4 - T_1^4}{T_+^3}\,\frac{\alpha_1}{1-2\eta_1}. \tag{24}$$

$$\alpha_0^2 + \left[\frac{32\sigma T_-^3}{D\rho_0 R}\,\frac{\eta_1}{1-\eta_1} - \frac{4\sqrt{3}\,T_-^3(T_- - T_0)}{T_-^4 - T_0^4} + \sqrt{3}\right]\alpha_0 -$$

$$- \frac{12\,T_-^3(T_- - T_0)}{T_-^4 - T_0^4} = 0, \tag{25}$$

$$\alpha_1^2 - \left[\frac{32\sigma T_+^3}{D\rho_0 R}\,\frac{\eta_1(1-2\eta_1)}{1-\eta_1} + \frac{4\sqrt{3}\,T_+^3(T_+ - T_1)}{T_+^4 - T_1^4} - \sqrt{3}\right)\alpha_1 -$$

$$- \frac{12\,T_+^3(T_+ - T_1)}{T_+^4 - T_1^4} = 0. \tag{26}$$

Как и в работе [10], система (23)—(26) может быть решена в каждом отдельном случае, в частности, графическим методом. Однако существующие в звездах условия таковы, что даже в случае ударной волны умеренной интенсивности из уравнений (23)—(26) можно получить и приближенные асимптотические формулы для α_0, α_1, T_- и T_+.

В самом деле, величина $32\sigma T_-^3/3D\rho_0 R$ значительно больше единицы, даже если $T_- \sim T_0$. Тем более это относится к величине $16\sigma T_+^3/3D\rho_0 R$, входящей в уравнение (26). Вторые слагаемые в квадратных скобках и свободный член уравнений (25) и (26) порядка 1. Учитывая, что в обоих случаях физический смысл имеют только положительные значения величин α_0 и α_1, находим из (25) и (26):

$$\alpha_0 \approx 12 \left(\frac{D \rho_0 R}{32 \sigma T_-^4} \frac{1 - \eta_1}{\eta_1} \right) \cdot \frac{T_-^3 (T_- - T_0)}{T_-^4 - T_0^4}, \tag{27}$$

$$\alpha_1 \approx \frac{32 \sigma T_-^3}{D \rho_0 R} \cdot \frac{\eta_1 (1 - 2\eta_1)}{1 - \eta_1}, \tag{28}$$

подставляя далее (28) в (24), находим

$$\alpha_0 \approx \frac{32 \sigma T_-^3}{D \rho_0 R} \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} \frac{T_1^4 - T_-^4}{T_-^4 - T_0^4}, \tag{29}$$

а приравнивая (27) и (29), находим выражение для T_-:

$$\frac{T_1^4 - T_-^4}{T_- - T_0} T_-^3 = 12 \left(\frac{D \rho_0 R}{32 \sigma} \frac{1 - \eta_1}{\eta_1} \right)^2 \tag{30}$$

или, представляя $T_- = T_1 (1 - \varepsilon)$, где ε — малая величина, находим

$$T_- = T_1 \left[1 - 3 \left(\frac{D \rho_0 R}{32 \sigma T_1^3} \frac{1 - \eta_1}{\eta_1} \right)^2 \right]. \tag{31}$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, из (31) следует, что в звездных условиях практически всегда можно принять $T_- \approx T_1$. Это полностью согласуется с выводами, сделанными в [3—5] для случая сильных ударных волн в земной атмосфере. Если $\gamma = 5/3$, $\eta = 1/4$, то из (23) далее следует при $T_0 \ll T_1$:

$$T_+ = 1.5\, T_1, \tag{32}$$

а соотношения (27)—(28) сводятся к виду:

$$\alpha_0 = \frac{9 D \rho_0 R}{8 \sigma T_1^3} = 1.428 \cdot 10^{38} \frac{\rho_0}{D^5}, \tag{33}$$

$$\alpha_1 = \frac{18 \sigma T_1^3}{D \rho_0 R} = 1.418 \cdot 10^{-37} \frac{D^5}{\rho_0} \tag{34}$$

и

$$\alpha_0 = \frac{20.25}{\alpha_1}. \tag{35}$$

Соотношение (33) позволяет непосредственно оценить масштабную толщину зоны прогрева $\tau \approx 1/\alpha_0$, а из (3) и полную протяженность зоны прогрева $\tau_п$, определяемую условием $T(\tau_п) = T_0$:

$$\tau_п = \frac{4}{\alpha_0} \ln \frac{T_1}{T_0} = 2.8 \cdot 10^{-38} \frac{D^5}{\rho_0} \ln \frac{T_1}{T_0}. \tag{36}$$

Последнее выражение можно сравнить с решением, полученным в [4, 5], в котором полная толщина зоны прогрева τ_k находится из соотношений (2):

$$\tau_k = \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(\frac{T_1}{T_k}\right)^3 = \frac{1}{128}\,\frac{\sigma D^5}{\rho_0 R^4}. \tag{37}$$

Толщина пика температуры за фронтом ударной волны находится из (34): $\Delta\tau_1 \sim \frac{1}{\alpha_1} \sim \frac{\rho_0}{D^5}$. Как и в [5], где $\Delta\tau_1 \sim \left(\frac{T_k}{T_1}\right)^3$, она быстро уменьшается с увеличением скорости движения фронта волны.

Зная распределение температуры перед и за фронтом ударной волны (T_a и T_b из (3) при найденных значениях величин α_0, α_1, T_- и T_+) из (4)—(8) нетрудно найти и распределение плотности и давления в зоне прогрева. Так как соответствующие выражения уже неоднократно приводились в литературе [5, 8, 10], то мы их здесь выписывать не будем.

Для иллюстрации применимости полученных асимптотических решений рассмотрим следующий пример [10]. Пусть в оболочке с начальными параметрами $\rho_0 = 10^{-7}$, $T_0 = 5\,000\,^\circ$K движется ударная волна со скоростью $D = 4.16\cdot 10^6$ *см/сек*, так что $T_1 = 3.91\cdot 10^4\,^\circ$K. Из (31)—(34) находим соответствующие значения величин, определяющих зону прогрева

$$\alpha_0 = 0.0115\,(0.0103), \quad \alpha_1 = 1.766\cdot 10^3\,(1.77\cdot 10^3)$$
$$T_- \approx T_1\,(0.99\,T_1), \quad T_+ = 1.5\,T_1\,(1.499\,T_1),$$

причем в скобках даны значения, полученные путем графического решения системы (23)—(26). Как видно, приближенные решения (31)—(34) вполне пригодны для оценок основных характеристик зоны прогрева, тем более что с увеличением скорости волны и уменьшением плотности среды отличие точных решений системы (23)—(26) от приближенных становится все менее существенным.

В рассмотренном примере полная толщина зоны прогрева $\tau_п \approx 7.1\cdot 10^2$ или $x_п = \tau_п/n_a k \approx 12$ *м*, где $k \simeq 10^{-17}$ коэффициент поглощения на одну частицу $n_a \simeq 6\cdot 10^{16}$ *см*$^{-3}$. При той же скорости волны геометрическая толщина зоны прогрева в оболочке, где $\rho \sim 10^{-10}$ ($n_a = 6\cdot 10^{13}$), уже порядка 12 *км*.

2. *Приближенный расчет зоны прогрева перед фронтом сильной ударной волны.*

Давление излучения p_r сравнивается с газовым p_g при температуре

$$T=\sqrt[3]{\frac{3R\rho_0}{a}}=3.202\cdot10^7\sqrt[3]{\rho_0}, \tag{38}$$

так что при плотности $\rho_0=2.75\cdot10^{-7}$ находим $T=200\,000^\circ$. Если исходить из формулы классической теории ударных волн, то такая температура достигается уже при скорости $D=\sqrt{\frac{16RT}{3}}\approx 100$ *км/сек.* Так как при решении многих задач космической газодинамики (например, вспышки новых и сверхновых) скорости движения ударных волн принимаются в 5—10 раз большими, то необходимость учета плотности энергии радиации за фронтом волны очевидна. Метод расчета основных параметров ударных волн, движущихся в смеси газ—излучение („звездных"), был предложен в [14] и неоднократно использовался рядом авторов ([15, 16]). Основные соотношения, выполняющиеся на фронте „звездной" ударной волны, а также номограмму, позволяющую легко оценить температуру, давление и плотность за фронтом волны и, в частности, решить задачу о структуре сильной ударной волны, приводим в пункте 3.

Здесь же в первую очередь отметим, что, как показано в [5], если за фронтом волны выполняется неравенство $p_r \gg p_g$, то структура такой волны существенно отличается от структуры слабой ударной волны: и температура, и плотность меняются в зоне прогрева непрерывным образом. Скачок плотности исчезает при температуре [5]:

$$T_*=\sqrt[3]{\frac{86.108\,R\rho_0}{a}}\simeq 9.81\cdot10^7\sqrt[3]{\rho_1}, \tag{39}$$

то есть она всего в 3 раза больше температуры, при которой $p_g=p_r$. Для атмосферы Солнца $T_*=600\,000^\circ$ и $D_*\lesssim 200$ *км/сек.*

Целью этой работы является получение простых соотношений для приближенных расчетов структуры звездной ударной волны. Поэтому мы здесь рассмотрим случай $T_1>T_*$, так что на фронте волны выполняется равенство $\rho_-=\rho_1$. Для оценки основных параметров зоны прогрева при температурах $T_1<T_*$ с достаточной степенью точности можно пользоваться решениями, полученными в пункте 1.

Итак, за фронтом сильной ударной волны при $T_1>T_*$ имеем $T_+=T_1$, $\alpha_1=0$, а перед фронтом выполняются соотношения [5]:

$$T_-=T_1,\quad \rho_-=\rho_1. \tag{40}$$

Поэтому единственной неизвестной величиной в данном случае будет α_0. Как и раньше, представим функцию источника перед фронтом ударной волны в виде ($T_0 \ll T_1$):

$$B_a(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_a^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_1^4 e^{-\alpha_0 \tau}, \tag{41}$$

а для определения величины α_0 воспользуемся условием, что поток лучистой энергии через фронт ударной волны равен гидродинамическому. Выражение для лучистого потока на оптической глубине τ запишем в интегральной форме для одномерного случая:

$$F_{\text{луч}} = \pi \left[\int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau')} B(\tau')\, d\tau' - \int_{\tau}^{\infty} e^{-(\tau''-\tau)} B(\tau'')\, d\tau'' \right]. \tag{42}$$

Учитывая, что $B(\tau') = \frac{\sigma}{\pi} T_1^4$ ($\tau' \leqslant 0$), а $B(\tau'')$ определяется выражением (41), находим величину потока лучистой энергии на фронте волны ($\tau = 0$):

$$F_{\text{луч}} = \frac{\sigma T_1^4 \alpha_0}{1 + \alpha_0} \approx \sigma T_1^4 \alpha_0. \tag{43}$$

Чтобы получить выражение для $F_{\text{гидр}}$, воспользуемся снова системой (4)—(6), однако под p и ε будем подразумевать соответственно полное давление $P = p_g + p_r$ и внутреннюю энергию $\varepsilon = \frac{\rho R T}{\gamma - 1} + a T^4$. Воспользуемся далее переменными

$$\beta = \frac{p_g}{P}, \quad \eta = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{44}$$

и представим внутреннюю энергию смеси газ—излучение в виде

$$\varepsilon = \frac{1}{k-1} \frac{P}{\rho}, \tag{45}$$

где

$$k = \frac{(4 - 3\beta)(\gamma - 1) + \beta}{3(1 - \beta)(\gamma - 1) + \beta} \tag{46}$$

введенный нами в [14] показатель политропы. Отметим, что $k = \gamma$ при $\beta = 1$ и $k = 4/3$ при $\beta = 0$, во всех остальных случаях $0 < \beta < 1$, коэффициент k не совпадает с показателем адиабаты (рис. 1). Воспользовавшись системой (4)—(6) и (44)—(46), находим вместо (9)—(10):

$$T = \frac{D^2 \beta}{R} (1 - \tau_1)\, \tau_1, \tag{47}$$

$$F = \frac{\rho_0 D R T_в}{2\beta_в} \frac{(1 - \tau_1)(\tau_1 - \tau_{11})}{\tau_{11}^2 (1 - \tau_{12})}, \tag{48}$$

причем $\tau_{1} = \frac{k_1+1}{k_1-1}$. Отсюда исключая τ_1, находим

$$F_в = \frac{\rho_0 D R T_в}{(k_1 - 1)\beta_в}. \tag{49}$$

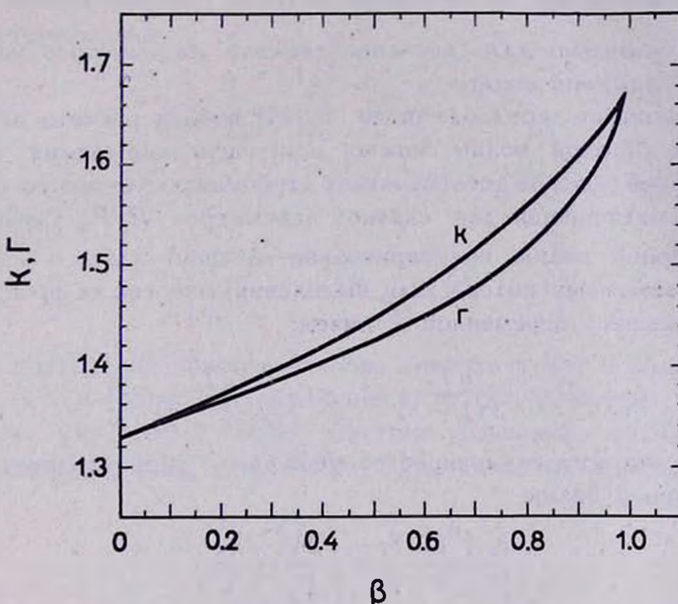


Рис. 1.

Приравнивая (43) и (49) и учитывая, что $T_в(0) = T_1$, и при $\rho_- = \rho_1$ $\beta_в = \beta_1$, находим α_0:

$$\alpha_0 \simeq \frac{\rho_0 R D}{\beta_1 (k_1 - 1)\, \sigma T_1^3}. \tag{50}$$

Аналогично (36), полная толщина зоны прогрева может быть найдена из соотношения

$$\tau_п = \frac{4}{\alpha_0} \ln \frac{T_1}{T_0} = \frac{4\beta_1 (k_1 - 1)\, \sigma T_1^3}{\rho_0 R D} \ln \frac{T_1}{T_0}. \tag{51}$$

Найдем величину α_0 и τ_n для случая, когда в оболочке типа солнечной ($\rho_0 = 2.75 \cdot 10^{-7}$, $T_0 = 6\,300^\circ$К, $1 - \beta_0 = 2 \cdot 10^{-5}$, $c_0 = 10^6$ *см/сек*) движется ударная волна со скоростью $D = 10^8$ *см/сек*. Как будет показано в пункте 3, $\beta_1 = 0.07$, $k_1 = 1.35$, и $T_1 = 1.07 \cdot 10^6$ °К (вместо $2.26 \cdot 10^7$ °К, как это следовало бы из формулы $T = 3D^2/16R$). Из (50) и (51) находим $\alpha_0 \approx 8.9 \cdot 10^{-4}$ и $\tau_n \approx 1.8 \cdot 10^4$. Так как при температурах $\sim 10^6$ °К основную роль в переносе излучения играют процессы рассеяния на свободных электронах ($k = 10^{-24}$), то в этом случае толщина зоны прогрева будет $\sim 10^{12}$ *см*, то есть значительно превосходящей размеры звездной атмосферы.

3. *Номограмма для расчета скачков параметров на фронте „звездной" ударной волны.*

На основании предложенного в [14] метода расчета параметров за фронтом ударной волны можно построить номограмму, использование которой вполне обеспечивает требуемую точность расчетов. Основные соотношения для скачков параметров P_1/P_0, ρ_1/ρ_0, T_1/T_0 на фронте ударной волны предварительно запишем здесь в общем виде с учетом возможных потерь (или выделения) энергии на фронте волны. Воспользовавшись переменной β, имеем:

$$P = \frac{aT^4}{3(1-\beta)}, \quad \rho = \frac{\beta a T^3}{3R(1-\beta)}, \tag{52}$$

из которых находим следующее соотношение, удовлетворяющееся на фронте ударной волны

$$\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^4 \frac{1-\beta_1}{1-\beta_0} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^3 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^4. \tag{53}$$

Скачки давления и плотности на фронте волны находятся путем решения системы (4)—(6) с учетом (44)—(46):

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 + \frac{2\Gamma_{10}M^2}{k_1+1}\left(1 - \frac{k_1}{\Gamma_{10}M^2}\right)(1+\Delta) \tag{54}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 - \frac{2}{k_1-1}\left(1 - \frac{k_1}{\Gamma_{10}M^2}\right)(1+\Delta), \tag{55}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{2(k_1+1)}{M^2\left(1-\frac{k_1}{\Gamma_{10}M^2}\right)}\left[\frac{k_0-k_1}{\Gamma_{10}(k_0-1)} - (k_1-1)\frac{Q}{c_0^2}\right]} - 1\right] \tag{56}$$

$$M = \frac{D}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\Gamma_{10}\frac{P_0}{\rho_0}}, \quad \Gamma_{10} = \beta_0 + \frac{(4-3\beta_0)^2(\gamma-1)}{\beta_0 + 12(\gamma-1)(1-\beta_0)} \tag{57}$$

$$Q = 2\left(q - \frac{F_\sim}{\rho_0 D}\right),$$

c_0 — скорость звука перед фронтом ударной волны, Γ_1 — первый адиабатический показатель смеси газ—излучение [17], M — число Маха, q — количество связанной энергии, выделяющейся ($q > 0$) или поглощаемой ($q < 0$) внутри фронта волны в расчете на 1 г вещества, $F_\sim$ — поток излучения с единицы поверхности фронта волны, выходящий на бесконечность. Скачок температуры на фронте волны определяется соотношением

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0}\frac{P_1}{P_0}\frac{\rho_0}{\rho_1}. \tag{58}$$

В случае достаточно сильных волн (54)—(57) существенно упрощаются, так как здесь

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 - \frac{2(k_1^2-1)Q}{D^2}} - 1\right]. \tag{59}$$

Далее для построения номограммы мы воспользуемся соотношениями (53)—(55), (58) и (59) в предположении, что $Q = 0$ (случай $Q \neq 0$ более подробно рассмотрен в [18]). Система уравнений, определяющих скачки параметров P_1/P_0, ρ_1/ρ_0, T_1/T_0 и β_1/β_0, сводится к виду:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2\Gamma_{10}M^2}{k_1+1}, \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{k_1+1}{k_1-1}, \tag{60}$$

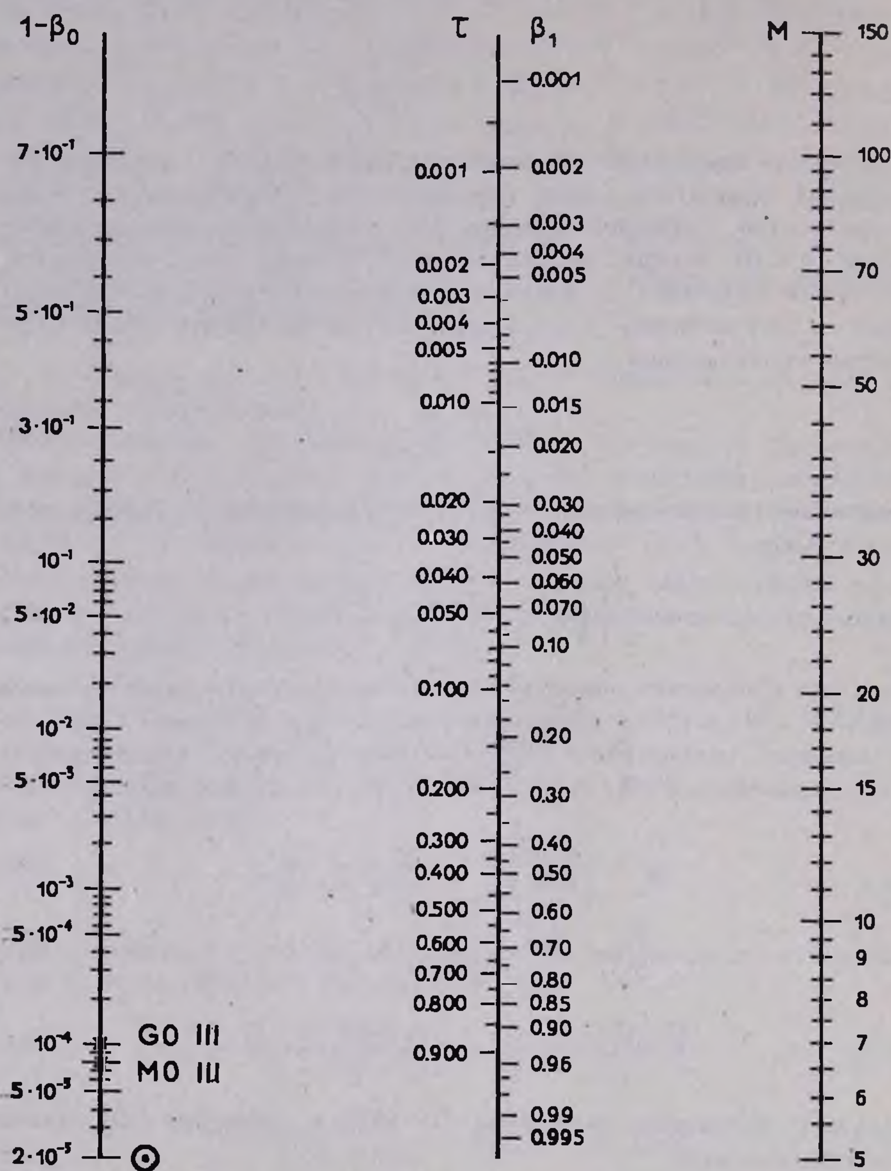
$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2(k_1-1)}{(k_1+1)^2}\frac{\beta_1}{\beta_0}\Gamma_{10}M^2, \tag{61}$$

$$\frac{8\Gamma_{10}^3(1-\beta_0)}{\beta_0^4}M^6 = \frac{(k_1+1)^7}{(k_1-1)^4}\frac{1-\beta_1}{\beta_1^4}. \tag{62}$$

Последнее уравнение, полученное из (53) с помощью (60), можно представить в виде

$$\Phi(\beta_0)M^6 = \Psi(\beta_1), \tag{63}$$

а, логарифмируя его, построить номограмму для определения величины β_1, при заданном β_0 и M. Функции $\Psi(\beta)$ и $\Phi(\beta)$, а также показатель политропы k затабулированы в [14]. Заметим также, что если



1-β0
7·10⁻¹
5·10⁻¹
3·10⁻¹
10⁻¹
5·10⁻²
10⁻²
5·10⁻³
10⁻³
5·10⁻⁴
10⁻⁴
G0 III
M0 III
5·10⁻⁵
2·10⁻⁵
τ
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.010
0.020
0.030
0.040
0.050
0.100
0.200
0.300
0.400
0.500
0.600
0.700
0.800
0.900
β1
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.010
0.015
0.020
0.030
0.040
0.050
0.060
0.070
0.10
0.20
0.30
0.40
0.50
0.60
0.70
0.80
0.85
0.90
0.96
0.99
0.995
M
150
100
70
50
30
20
15
10
9
8
7
6
5

Рис. 2.

$\beta_0 \approx 1$, то отношение величины реально устанавливающейся за фронтом волны температуры, которую мы обозначим $T_{1\,(\text{смеси})}$, до величины $T_1' = \dfrac{3D^2}{16\,R}$, которая обычно используется в „классической“ теории ударных волн, где давление и плотность энергии излучения за фронтом волны не учитываются, может быть определенно выражением

$$\tau = \frac{T_{1\,(\text{смеси})}}{T_1'} = \frac{32\,(k_1 - 1)}{3\,(k_1 + 1)^2}\,\beta_0. \tag{64}$$

Это отношение также приведено на номограмме.

Представляется удобным для каждого заданного случая по заданной скорости движения ударной волны D определять параметр $\beta_1 = p_{g1}/P_1$, далее, снимая с рис. 1 соответствующее ему значение коэффициента k, рассчитывают по формулам (60), (61) скачки параметров на фронте волны. При $\beta_0 \approx 1$ температура за фронтом волны $T_{1\,(\text{смеси})}$ находится путем умножения величины T_1' на снятую с номограммы величину τ, соответствующую заданному числу Маха. Итак, если в оболочке типа солнечной ($1 - \beta_0 = 2 \cdot 10^{-5}$, $c_0 = 10^6$ *см/сек*) движется ударная волна со скоростью $D = 10^8$ *см/сек*, то $M = 100$. Воспользовавшись номограммой, находим $\beta_1 = 0.07$, $\tau = 0.047$. Так как $T_1' = 2.26 \cdot 10^7\ {}^\circ K$, то $T_1 = 1.07 \cdot 10^6\ {}^\circ K$. Из рис. 1 находим $k_1 = 1.35$, следовательно, $\rho_1/\rho_0 = 6.72$, $P_1/P_0 = 1.15 \cdot 10^4$.

Выражаю искреннюю благодарность В. И. Громовику за помощь при вычислениях.

Львовская астрономическая
обсерватория

ON THE STRUCTURE OF A SHOCK WAVE MOVING IN A STELLAR ATMOSPHERE

I. A. KLIMISHIN

An approximate solution of the problem of the structure of a shock wave taking into account and then neglecting the pressure and energy density of radiation beyond the wave front has been obtained. A method of calculation of parameter jumps on the front of shock waves moving in the mixture of gas and radiation is given. A nomogram is constructed to simplify the calculations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Прокофьев*, Уч. зап. МГУ, Механика, 172, 79, 1952.
2. *H. K. Sen, A. W. Guess*, Phys. Rew., 108, 3, 560, 1957.
3. *Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ, 32, 1026, 1957.
4. *Ю. П. Райзер*, ЖЭТФ, 32, 1928; 33, 101, 1957.
5. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер*, Физика ударных волн, „Наука", М., 1966.
6. *Л. М. Биберман*, ЖЭТФ, 17, 416, 1947; ДАН, 59, 653, 1948.
7. *Л. М. Биберман, Б. А. Векленко*, ЖЭТФ, 37, 164, 1953.
8. *T. Kogure, T. Osaki*, Publs. Astron. Soc. Japan, 13, 250, 1961.
9. *С. А. Каплан, И. А. Климишин*, Астрон. ж., 41, 657, 1964.
10. *P. Prasad, P. L. Sachdev*, Publs. Astron. Soc. Japan, 18, № 4, 421, 1966.
11. *В. С. Имшенник, Ю. И. Морозов*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 2, 8, 1964.
12. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, Гостехиздат, 1956.
13. *И. А. Климишин*, Вопросы астрофизики, Киев, 58, 1967; Астрофизка, 1968 (в печати).
14. *И. А. Климишин*, Астрон. ж., 39, 887, 1962.
15. *Р. Э. Гусейнов*, Труды Шемахинск. АО, т. III, 5, 1964.
16. *P. L. Bhatnagar, P. L. Sachdev*, Nuovo Cimento, 44, 15, 1966.
17. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, ИИЛ, 1950.
18. *И. А. Климишин*, Циркуляр АО Львовского ун-та, № 39—40, 11, 1963.