АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 МАЙ, 1968 ВЫПУСК 2

СТАЦИОНАРНЫЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Д. М. СЕДРАКЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 17 ноября 1967

В статье рассматривается задача вращения звездных конфигураций в рамках теории Эйнштейна. Получены уравнения Эйнштейна в случае аксиально-симметрического распределения масс. Зависимость формы конфигурации, а также распределения масс от углов возникает во втором приближении по Ω (Ω — угловая скорость вращения). Написаны уравнения Эйнштейна в этом приближении и найдены аналитические решения в пустоте.

Введение. Вопросу вращающихся звездных конфигураций посвящен ряд работ, в которых задача решается в рамках теории Ньютона. В теории Ньютона известны точные аналитические решения вне распределения масс. Внутренние решения указанной задачи рассматривались в работах [1—7].

По теории Эйнштейна внешнее решение задачи вращения было найдено Керром [8]. Это частное, но точное решение уравнений Эйнштейна, которое зависит от двух параметров — массы и полного момента.

В работах [9, 10] рассматривалось общее решение уравнений Эйнштейна в случае малых угловых скоростей в приближении Ω. Было показано, что в этом приближении диагональные компоненты метрического тензора вне распределения масс сохраняют шварцшильдовский вид и появляется недиагональная компонента

$$g_{03} = -\frac{2I}{r}\sin^2\theta,$$

где I полный момент. Это приближение соответствует рассмотрению вращения шара с учетом кориолисовых сил без изменения его формы.

Приведенное решение зависит от двух параметров — массы и полного момента и, очевидно, его можно получить из решения Керра, разлагая последнее в ряд по полному моменту, оставляя в нем члены линейные по I.

Учет следующего приближения по Ω (члены порядка Ω^2) приводит к несферичности формы конфигурации, появлению центробежных сил и квадрупольных моментов. Для нахождения интегральных характеристик вращающихся звезд в этом приближении необходимо иметь внешнее и внутреннее решения уравнений Эйнштейна и сшить их на границе звезды.

В настоящей статье рассматривается задача вращения звездных конфигураций в рамках теории Эйнштейна. Получены уравнения Эйнштейна внутри и вне аксиально-симметричного распределения масс в приближении Ω^2. В этом приближении получены аналитические решения уравнений вне распределения масс. Показано, что в рассмотренном случае компонента метрического тензора g_{03} не изменяется.

1. *Вид четырехмерного интервала.* С геометрической точки зрения постоянные аксиально-симметрические гравитационные поля можно разделить на два типа — статические и стационарные. Статическими полями являются те, которые создаются неподвижными сплющенными телами с аксиально-симметрическим распределением масс. Для систем, состоящих из гравитирующих газов и жидкостей, такое распределение масс при отсутствии вращения исключено. Действительно, для существования таких тел необходимо допустить внутри распределения масс наличие особого поля напряжений. При отсутствии вращения или специальных полей напряжения распределение масс будет обязательно сферически симметричным. Под стационарными аксиально-симметрическими полями подразумеваются те, которые создаются при вращении масс с независящими от времени угловыми скоростями. Метрики этих двух типов полей существенно отличаются друг от друга. Ниже речь будет идти только о стационарных полях, ибо только они представляют интерес для физики.

Итак, рассмотрим метрику гравитационного поля, создаваемого стационарным вращением распределения масс. Очевидно, что в этом случае распределение масс, а также гравитационное поле будут аксиально-симметрическими, то есть

$$g_{ik} = g_{ik}(R,\ \theta,\ \Omega). \tag{1.1}$$

В общем случае можно допустить зависимость Ω от R и θ. Ниже употребляются следующие обозначения $x^0 = t,\ x^1 = R,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$.

Пусть наблюдатель находится в неподвижной системе отсчета. Предположим, что вращение происходит по часовой стрелке

$$\Omega = \frac{d\varphi^*}{dx^0}. \tag{1.2}$$

Произведем преобразование координат $x^{0'} = -x^0$, $x^{1'} = x^1$, $x^{2'} = x^2$, $x^{3'} = -x^3$. При этом знак угловой скорости не изменится. Следовательно, g_{ik} также не будет испытывать какие-либо изменения. Тогда из инвариантности ds^2 непосредственно следует, что

$$g_{01} = g_{13} = g_{23} = g_{20} = 0. \tag{1.3}$$

Таким образом в наиболее общем случае четырехмерный интервал можно записать в виде

$$ds^2 = g_{00}dx^{0^2} + g_{11}dx^{1^2} + g_{22}dx^{2^2} + g_{33}dx^{3^2} + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{03}dx^0dx^3. \tag{1.4}$$

Дальнейшего упрощения в этом выражении можно добиться подходящим преобразованием координат R и θ. Так потребуем, чтобы в новых координатах имело место

$$g'_{12} = 0, \qquad g'_{33} = g'_{22}\sin^2\theta \tag{1.5}$$

и для удобства введем следующие обозначения

$$g'_{11} = e^{\lambda};\ g'_{22} = e^{\mu};\ g'_{03} = \omega e^{\mu}\sin^2\theta;\quad g'_{00} = \omega^2 e^{\mu}\sin^2\theta - e^{\nu}. \tag{1.6}$$

В новых обозначениях четырехмерный интервал можно переписать в виде

$$ds^2 = e^{\lambda}\,dR^2 + e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + 2\omega\,e^{\mu}\sin^2\theta\,d\varphi\,dt + (\omega^2 e^{\mu}\sin^2\theta - e^{\nu})\,dt^2, \tag{1.7}$$

где λ, μ, ω и ν функции от R, θ и Ω. Так как метрика должна быть инвариантна относительно преобразования $t \to -t$, а угловая скорость при таком преобразовании меняет знак, то, очевидно, что все компоненты метрического тензора, кроме ω будут четными функциями от Ω. Что касается функции ω, то она должна быть нечетной функцией от Ω.

Важно отметить, что в отличие от статического аксиально-симметрического случая в стационарном случае никаким выбором системы отсчета компоненту метрического тензора g_{03} невозможно обратить в нуль. В статическом случае g_{ik} функции от R и θ (не

---

* Здесь использована система единиц, в которой $k=c=1$.

имеется вращения и зависимости от Ω), и поэтому из требования инвариантности ds^2 по отношению к преобразованию $t \to -t$ следует, что g_{03} равно нулю.

2. *Уравнения Эйнштейна.* Квадратичной форме (1.7) соответствуют следующие символы Кристофеля:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{\mu_1}{2} e^{\mu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{\mu_1}{2} e^{\nu-\lambda} \sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{30} = -\frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} (\omega_1 + \omega\mu_1) \sin^2\theta, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu_1}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{1}{2} e^{\mu-\lambda} \omega (2\omega_1 + \omega\mu_1) \sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{\lambda_2}{2} e^{\lambda-\mu}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\mu_1}{2}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\mu_2}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2} (\mu_2 + 2\operatorname{ctg}\theta) \sin^2\theta.$$

$$\Gamma^2_{00} = \frac{\nu_2}{2} e^{\nu-\mu} - \frac{\omega}{2} (2\omega\operatorname{ctg}\theta + 2\omega_2 + \omega\mu_2) \sin^2\theta \tag{2.1}$$

$$\Gamma^2_{30} = -\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega\mu_2 + 2\omega\operatorname{ctg}\theta) \sin^2\theta, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} (\mu_1 + \omega\omega_1 e^{\mu-\nu} \sin^2\theta)$$

$$\Gamma^3_{10} = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega\mu_1 - \omega\nu_1) + \frac{\omega^2\omega_1}{2} e^{\mu-\nu} \sin^2\theta, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} (\nu_1 - \omega\omega_1 e^{\mu-\nu} \sin^2\theta)$$

$$\Gamma^0_{13} = -\frac{\omega_1}{2} e^{\mu-\nu} \sin^2\theta, \quad \Gamma^0_{23} = -\frac{\omega_2}{2} e^{\mu-\nu} \sin^2\theta$$

$$\Gamma^0_{20} = \frac{1}{2} (\nu_2 - \omega\omega_2 e^{\mu-\nu} \sin^2\theta).$$

Остальные компоненты равны нулю. Здесь использовано обозначение $\partial\psi/\partial x^k \equiv \psi_k$.

Целесообразно сразу же вычислить смешанные компоненты тензора Римана второго ранга R^k_l. При этом расчеты заметно упрощаются, если, используя соотношение

$$\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{nl} g^{nk} + \Gamma^k_{nl} g^{ln} = 0, \tag{2.2}$$

формулу тензора R^k_l привести к виду

$$R^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{-g}\, g^{kn} \Gamma^l_{ln} \right) - \frac{1}{2} \Gamma^k_{nl} \frac{\partial g^{nl}}{\partial x^l} - g^{kn} \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l \partial x^n}. \tag{2.3}$$

Для компонент тензора R_i^k получаем:

$$R_1^1 = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(2\,\mu_{11} + \nu_{11} + \mu_1^2 + \frac{\nu_1^2}{2} - \lambda_1\mu_1 - \frac{\lambda_1\nu_1}{2} - \omega_1^2 e^{\mu-\nu}\sin^2\theta\right) -$$

$$- \frac{e^{-\mu}}{2}\left(\lambda_{22} + \frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_2\nu_2}{2} + \lambda_2 \operatorname{ctg}\theta\right);$$

$$R_2^1 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\frac{\lambda_2}{2}(\mu_1 + \nu_1) + \frac{\nu_2}{2}(\mu_1 - \nu_1) - \mu_{12} - \nu_{12}\right] + \frac{\omega_1\omega_2}{2} e^{\mu-\nu-\lambda}\sin^2\theta;$$

$$R_2^2 = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\mu_{11} + \mu_1\left(\mu_1 + \frac{\nu_1 - \lambda_1}{2}\right)\right] + \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\frac{\mu_2}{2}(\nu_2 + \lambda_2) -\right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 + \nu_2^2}{2} - \mu_{22} - \lambda_{22} - \nu_{22} + 2 - \mu_2 \operatorname{ctg}\theta\right] + \frac{e^{-\nu}}{2}\omega_2^2 \sin^2\theta;$$

$$R_0^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\omega\left(\nu_{11} - \mu_{11} - \mu_1^2 + \frac{\nu_1^2}{2} - \frac{\nu_1\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1\mu_1}{2} + \frac{\nu_1\mu_1}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \omega_1\left(\frac{\nu_1 + \lambda_1}{2} - 2\mu_1\right) - \omega_{11}\right] +$$

$$+ \frac{e^{\mu-\nu-\lambda}}{2}\left[-\omega^2\omega_{11} - 2\omega\omega_1^2 - 2\mu_1\omega_1\omega^2 + \frac{\omega^2\omega_1}{2}(\nu_1 + \lambda_1)\right]\sin^2\theta + \qquad (2.4)$$

$$+ \frac{e^{-\mu}}{2}\left[-\omega_{22} + 2\omega - 3\omega_2 \operatorname{ctg}\theta + \omega(\nu_{22} - \mu_{22}) + \frac{\nu_2^2\omega}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{\mu_2\omega}{2}(\nu_2 + \lambda_2) + \frac{\omega_2}{2}(\nu_2 - \lambda_2 - 2\mu_2) + \frac{\omega\lambda_2\nu_2}{2} - \omega(\mu_2 + \lambda_2)\operatorname{ctg}\theta\right] -$$

$$- \frac{e^{-\nu}}{2}\left[\omega^2\omega_{22} + 2\omega\omega_2^2 + 3\omega^2\omega_2 \operatorname{ctg}\theta + \omega^2\omega_2\left(\mu_2 + \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2}\right)\right]\sin^2\theta;$$

$$R_3^3 = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\omega\omega_1 e^{\mu-\nu}\left(2\mu_1 - \frac{\nu_1 + \lambda_1}{2}\right)\sin^2\theta + \omega_1^2 e^{\mu-\nu}\sin^2\theta +\right.$$

$$\left. + \omega\omega_{11} e^{\mu-\nu}\sin^2\theta + \mu_1\left(\mu_1 + \frac{\nu_1 - \lambda_1}{2}\right) + \mu_{11}\right] -$$

$$- \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\frac{\lambda_2 + \nu_2}{2}(\mu_2 + 2\operatorname{ctg}\theta) + \mu_{22} + \mu_2 \operatorname{ctg}\theta - 2\right] -$$

$$- \frac{e^{-\nu}}{2}\left[\omega_2^2 \sin^2\theta + \omega\omega_{22}\sin^2\theta +\right.$$

$$\left. + \left(\mu_2 + \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2}\right)\omega\omega_2 \sin^2\theta + 3\,\omega\omega_2 \sin\theta\cos\theta\right];$$

$$R_0^0 = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu_{11} + \frac{\nu_1^2}{2} + \nu_1\mu_1 - \frac{\nu_1\lambda_1}{2} - \right.$$

$$\left. - e^{\mu-\nu}\left(2\,\omega\omega_1\mu_1 - \frac{\omega\omega_1\lambda_1}{2} - \frac{\omega\omega_1\nu_1}{2} + \omega_1^2 + \omega\omega_{11}\right)\sin^2\theta\right] -$$

$$- \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\nu_{22} + \nu_2\operatorname{ctg}\theta + \frac{\nu_2\lambda_2}{2} + \frac{\nu_2^2}{2}\right] +$$

$$+ \frac{e^{-\nu}}{2}\left[\omega\omega_2\left(\mu_2 + \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2}\right)\sin^2\theta + (\omega\omega_{22} + \omega_2^2)\sin^2\theta + 3\,\omega\omega_2\sin\theta\cos\theta\right].$$

Напишем также выражения для компонент тензора

$$G_i^k = R_i^k - \frac{1}{2}R\delta_i^k.$$

Имеем

$$G_1^1 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\frac{\mu_1^2}{2} + \mu_1\nu_1\right] + \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\nu_{22} + \mu_{22} + \frac{\nu_2^2}{2} - 2 + (\mu_2 + \nu_2)\operatorname{ctg}\theta\right] +$$

$$+ \frac{\omega_1^2}{4}e^{\mu-\nu-\lambda}\sin^2\theta - \frac{\omega_2^2}{4}e^{-\nu}\sin^2\theta;$$

$$G_2^2 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\mu_{11} + \nu_{11} + \frac{\nu_1^2 + \mu_1^2}{2} - \frac{\lambda_1(\nu_1 + \mu_1)}{2} + \frac{\mu_1\nu_1}{2}\right] -$$

$$- \frac{\omega_1^2}{4}e^{\mu-\nu-\lambda}\sin^2\theta + \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\frac{\mu_2}{2}(\lambda_2 + \nu_2) + \frac{\nu_2\lambda_2}{2} + (\nu_2 + \lambda_2)\operatorname{ctg}\theta\right] +$$

$$+ \frac{\omega_2^2}{4}e^{-\nu}\sin^2\theta;$$

$$G_3^3 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\mu_{11} + \nu_{11} + \frac{\nu_1^2 + \mu_1^2}{2} - \frac{\lambda_1(\nu_1 + \mu_1)}{2} + \frac{\nu_1\mu_1}{2}\right] +$$

$$+ \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\lambda_{22} + \nu_{22} + \frac{\nu_2^2 + \lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_2\nu_2}{2} - \frac{\lambda_2\mu_2}{2} - \frac{\mu_2\nu_2}{2}\right] - \qquad (2.5)$$

$$- \frac{e^{-\nu}}{2}\left[\frac{3}{2}\omega_2^2 + \omega\omega_2\left(\mu_2 + \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2}\right) + \omega\omega_{22} + 3\omega\omega_2\operatorname{ctg}\theta\right]\sin^2\theta -$$

$$- \frac{e^{\mu-\nu-\lambda}}{2}\left[\frac{3}{2}\omega_1^2 + \omega\omega_1\left(2\mu_1 - \frac{\lambda_1 + \nu_1}{2}\right) + \omega\omega_{11}\right]\sin^2\theta;$$

$$G_0^0 = \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[2\,\mu_{11} + \frac{3\,\mu_1^2}{2} - \mu_1\lambda_1\right] + \frac{e^{-\mu}}{2}\left[\lambda_{22} + \mu_{22} + \frac{\lambda_2^2}{2} + \right.$$

$$+ (\mu_2 + \lambda_2) \operatorname{ctg} \theta - 2 \Big] + \frac{e^{\mu-\nu-\lambda}}{2} \Big[\omega\omega_1 \Big(2\mu_1 - \frac{\nu_1 + \lambda_1}{2} \Big) +$$

$$+ \frac{\omega_1^2}{2} + \omega\omega_{11} \Big] \sin^2\theta + \frac{e^{-\nu}}{2} \Big[\omega\omega_2 \Big(\mu_2 + \frac{\lambda_2 - \nu_2}{2} \Big) +$$

$$+ \frac{\omega_2^2}{2} + \omega\omega_{22} + 3\,\omega\omega_2 \operatorname{ctg}\theta \Big] \sin^2\theta;$$

$$G_2^1 = R_2^1, \qquad G_0^3 = R_0^3.$$

Теперь выпишем уравнения Эйнштейна

$$G_i^k = 8\pi T_i^k, \tag{2.6}$$

где T_i^k — тензор энергии импульса.

$$T_i^k = (P + \rho)\, u^k u_i + P\delta_i^k. \tag{2.7}$$

Здесь P — давление вещества, ρ — плотность, а u^i — компонента четырехмерной скорости. К полученным уравнениям можно присоединить также уравнения гидродинамики

$$T^k_{i;\,k} = 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, для области пространства, занятого веществом, имеются шесть независимых функций ν, μ, λ, ω, u^3 и плотность вещества ρ (предполагается, что уравнение состояния задано в виде $P = P(\rho)$). Для нахождения этих шести неизвестных функций мы можем использовать или шесть полевых уравнений Эйнштейна, или два из них заменить уравнением (2.8). Для определения искомых функций целесообразно выбрать четыре уравнения из полевых уравнений Эйнштейна и добавить к ним два уравнения, получаемые из (2.8).

В работе [11] показано, что для конфигураций с заданным числом барионов

$$A = \int d^3x\, (-g)^{1/2} n \cdot u^0 \tag{2.9}$$

(n — плотность числа барионов в сопутствующей системе координат) и фиксированным моментом инерции

$$I_z = \int d^3x\, (-g)^{1/2} T_3^0, \tag{2.10}$$

уравнения (2.8) эквивалентны следующим

$$u^3 = \Omega u^0, \tag{2.11}$$

$$\int \frac{dP}{P+\rho} = -\frac{1}{2}\nu - \ln\left|1 - e^{\mu-\nu}(\omega+\Omega)^2 \sin^2\theta\right| + C. \qquad (2.12)$$

Уравнение (2.11) означает, что конфигурация должна вращаться с постоянной угловой скоростью $\Omega = d\varphi/dt$, а уравнение (2.12) есть интеграл уравнений гидростатического равновесия [8]. u^0 определяется через компоненты метрического тензора и Ω из условия $u^\alpha u_\alpha = -1$. Оказывается, что

$$u^0 = [e^\nu - e^\mu(\omega+\Omega)^2 \sin^2\theta]^{-1/2}. \qquad (2.13)$$

Хотя из шести полевых уравнений Эйнштейна два являются следствием оставшихся четырех, и (2.11) и (2.12), тем не менее мы здесь выпишем все шесть и в процессе решения задачи будем выбирать удобные нам четыре независимых уравнения.

Наконец, напишем отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса

$$T_1^1 = T_2^2 = P, \quad T_3^3 = (P+\rho)\,\Omega e^\mu(\omega+\Omega)(u^0)^2 \sin^2\theta + P$$
$$T_0^0 = (P+\rho)(u^0)^2[-e^\nu + \omega e^\mu(\omega+\Omega)\sin^2\theta] + P \qquad (2.14)$$
$$T_0^3 = (P+\rho)(u^0)^2\,\Omega[-e^\nu + \omega e^\mu(\omega+\Omega)\sin^2\theta].$$

3. *Первое приближение по* Ω. Рассмотрим уравнения Эйнштейна в первом приближении по Ω. В приближении $\Omega = 0$ компоненты метрического тензора e^ν и e^λ зависят только от R, а $e^\mu = R^2$.

Поскольку это четные функции от Ω, то учет малых вращений приведет в этих функциях к добавкам, зависящим от углов и радиуса, порядка Ω^2. Если же мы ограничимся первым приближением по Ω, то можно утверждать, что и в этом приближении функции ν и λ не зависят от углов, а $e^\mu = R^2$. Однако в этом приближении метрика будет все же недиагональной, так как функция ω зависит от первой степени Ω.

Итак, как следует из (2.5) и (2.6) уравнения Эйнштейна в приближении Ω будут

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\nu_1}{R}\right) - \frac{1}{R^2} = 8\pi P, \qquad (3.1)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{\lambda_1}{R}\right) - \frac{1}{R^2} = -8\pi\rho, \qquad (3.2)$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{2}\left\{\omega\left[\nu_{11}+\frac{\nu_1^2}{2}-\frac{2}{R^2}-\frac{\nu_1\lambda_1}{2}+\frac{1}{R}(\nu_1+\lambda_1)\right]+\omega_1\left(\frac{\nu_1+\lambda_1}{2}-\frac{4}{R}\right)-\right.$$
$$\left.-\omega_{11}\right\}+\frac{1}{2R^2}(2\omega-3\omega_2\operatorname{ctg}\theta-\omega_{22})=-8\pi\Omega(P+\rho). \tag{3.3}$$

Кроме того, нам должно быть задано уравнение состояния

$$P=P(\rho).$$

Легко заметить из (3.1) и (3.2), что в этом приближении P и ρ также зависят только от R.

Первые два уравнения независимо от третьего составляют систему, из которой можно определить функции ν и λ. Известно, что эти уравнения тождественны известным уравнениям Оппенгеймера и Волкова [12]

$$\begin{aligned}\frac{du}{dR}&=4\pi R^2\rho\\ \frac{dP}{dR}&=-\frac{P+\rho}{R(R-2u)}[4\pi PR^3+u],\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2u}{R},\qquad \nu=-2\int\frac{dP}{P+\rho}.$$

Таким образом в этом приближении внутренняя задача сводится к интегрированию системы (3.4). Подставляя найденные значения функций ν и λ в (3.3), мы можем вычислить также функцию ω.

Для интегрирования системы уравнений (3.3) и (3.4) в качестве начальных условий мы должны задать плотность вещества в центре конфигурации ρ_c и Ω. Интегрируя уравнения (3.4), мы находим массу, радиус и распределение масс. После этого из уравнения (3.3) можно определить также функцию ω и момент инерции конфигурации.

Действительно, определяя значение функции ω на границе конфигурации и сшивая его с внешним решением, которое, как будет показано позднее, имеет вид

$$\omega=\frac{C_1}{R^3},$$

мы можем определить постоянную C_1, которая фактически является моментом инерции конфигурации (см. (5.8)).

4. *Уравнения Эйнштейна в пустоте в приближении* Ω^2. В пустоте уравнения Эйнштейна запишутся в виде

$$G_1^1 - G_0^0 = 0, \qquad G_2^2 + G_3^3 = 0, \qquad G_2^1 = 0, \qquad G_0^3 = 0. \tag{4.1}$$

Рассмотрим случай малых угловых скоростей. Разложим компоненты метрического тензора в ряд по не имеющему размерности параметру $\beta = \dfrac{\Omega^2}{8\pi\rho_c}$ и ограничимся членами порядка β. Тогда эти компоненты можно представить в виде

$$e^{-\lambda} = (1 + a/R)(1 + \beta f); \qquad e^{\nu} = (1 + a/R)(1 + \beta\Phi)$$
$$e^{\mu} = R^2(1 + \beta U), \quad \omega = \sqrt{\beta}\, q, \tag{4.2}$$

где f, Φ, U и q произвольные функции от R и θ, $-a$ — гравитационный радиус тела. Такой выбор компонент метрического тензора обусловлен тем, что при $\Omega = 0$ наше решение автоматически должно свестись к внешнему решению Шварцшильда. Тот факт, что λ, ν и μ зависят от Ω^2, а ω от Ω связан, как было указано выше, с инвариантностью интервала относительно преобразования $t \to -t$.

Подставляя (4.2) в уравнения (4.1) и ограничиваясь членами порядка β, получим следующую систему уравнений

$$\left(1+\frac{a}{R}\right)\left(U_{11} + \frac{2U_1 + f_1 - \Phi_1}{R}\right) + \frac{R^2}{2}\left(qq_{11} + \frac{4qq_1}{R}\right)\sin^2\theta +$$
$$+ \frac{\sin^2\theta}{2\left(1+\dfrac{a}{R}\right)}(qq_{22} + 3qq_2 \operatorname{ctg}\theta) - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{(1-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\gamma}(\Phi + f)\right\} = 0; \tag{4.3}$$

$$\left(1+\frac{a}{R}\right)\left(\Phi_{11} + U_{11} + \frac{2U_1 + f_1 + \Phi_1}{R}\right) - \frac{a}{R^2}\left(\frac{3}{2}\Phi_1 + U_1 + \frac{1}{2}f_1\right) -$$
$$- \frac{R^2}{2}\left(qq_{11} + 2q_1^2 + \frac{4qq_1}{R}\right)\sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2(1+a/R)}(qq_{22} + q_2^2 + 3qq_2\operatorname{ctg}\theta) +$$
$$+ \frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{(1-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\gamma}(\Phi - f)\right\} = 0 \tag{4.4}$$

$$(1 + a/R)\left\{\frac{f_2}{2}\left(\frac{a/R^2}{1+a/R} - \frac{2}{R}\right) + \frac{\Phi_2}{2}\left(\frac{a/R^2}{1+a/R} + \frac{2}{R}\right) - U_{12} - \Phi_{12}\right\} +$$
$$+ R^2 q_1 q_2 \sin^2\theta = 0 \tag{4.5}$$

$$\left(q_{11}+\frac{4}{R}q_1\right)(1+a/R)+\frac{1}{R^2}(q_{22}+3q_2\operatorname{ctg}\theta)=0, \tag{4.6}$$

где $\gamma=\cos\theta$.

Перейдем к интегрированию уравнения (4.6). В этом уравнении переменные разделяются, если решение искать в виде

$$q=\sum_{l=0}^{\infty}Q_l(R)\,P_l^{(1)}(\gamma), \tag{4.7}$$

где

$$P_l^{(1)}(\gamma)=-\frac{dP_l(\gamma)}{d\gamma}$$

$P_l(\gamma)$ — полином Лежандра.

Подставляя (4.7) в (4.6) и учитывая, что функция $P_l^{(1)}(\gamma)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+3\operatorname{ctg}\theta\frac{dy}{d\theta}+(l-1)(l+2)\,y=0 \tag{4.8}$$

для функции $Q_l(R)$ получаем следующее уравнение

$$R^2\left(1+\frac{a}{R}\right)\left(\frac{d^2Q_l}{dR^2}+\frac{4}{R}\frac{dQ_l}{dR}\right)-(l-1)(l+2)\,Q_l=0. \tag{4.9}$$

Решение уравнения (4.9) имеет вид

$$Q_l(R)=-\frac{C_l}{R^{l+2}}F\left(l+2,\ l-1,\ 2l+2,\ -\frac{a}{R}\right), \tag{4.10}$$

где $F\left(l+2,\ l-1,\ 2l+2,\ -\frac{a}{R}\right)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом,

$$\omega=-\sqrt{\beta}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l}{R^{l+2}}F\left(l+2,\ l-1,\ 2l+2,\ -\frac{a}{R}\right)P_l^{(1)}(\gamma). \tag{4.11}$$

Так как ω пропорциональна $\sqrt{\beta}$, а изменение формы поверхности звезды от сферической появляется в приближении β, то, ограничиваясь приближением β, мы должны потребовать непрерывности функции ω и ее первой производной на поверхности сферы радиуса R_0 (где R_0 — радиус соответствующей сферической конфигурации). Это условие приведет к тому, что все постоянные, входящие в решение (4.11), превратятся в нуль, кроме C_1.

Итак, в рассматриваемом приближении функция q зависит только от R

$$q = \frac{C_1}{R^3}. \tag{4.12}$$

Учитывая (4.12), систему уравнений (4.3)—(4.5) можно представить в виде

$$\left(1 + \frac{a}{R}\right)\left(U_{11} + \frac{2U_1 + f_1 - \Phi_1}{R}\right) - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{(1-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\gamma}(f + \Phi)\right\} = 0 \tag{4.13}$$

$$(1 + a/R)\left(\Phi_{11} + U_{11} + \frac{2U_1 + f_1 + \Phi_1}{R}\right) - \frac{a}{R^2}\left(\frac{3}{2}\Phi_1 + U_1 + \frac{1}{2}f_1\right) -$$

$$- \frac{9C_1^2}{R^6}\sin^2\theta + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{(1-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\gamma}(\Phi - f)\right\} = 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{f}{2}\left(\frac{a/R^2}{1 + a/R} - \frac{2}{R}\right) + \frac{\Phi}{2}\left(\frac{a/R^2}{1 + a/R} + \frac{2}{R}\right) - U_1 - \Phi_1 = K(R). \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) получено из (4.5), в котором произведено интегрирование по углам, а $K(R)$ — произвольная функция от R, возникшая в результате интегрирования. Легко видеть, что в системе уравнений (4.13)—(4.14) переменные разделяются, если решения этих уравнений искать в виде разложений по полиномам Лежандра.

$$U(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} U_l(R) P_l(\gamma)$$

$$\Phi(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(R) P_l(\gamma) \tag{4.16}$$

$$f(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(R) P_l(\gamma).$$

В действительности во все уравнения входит один и тот же оператор, зависящий от углов, действие которого на функции Лежандра дает

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{(1-\gamma^2)\frac{\partial}{\partial\gamma}P_l(\gamma)\right\} = -l(l+1)P_l(\gamma).$$

5. *Нахождение функций* U_1, Φ_1 *и* f_1. Функции U_1, Φ_1 и f_1 определяются из следующих независимых уравнений, которые получаются подстановкой (4.16) в систему (4.13)—(4.15).

$$(1+a/R)\left(\frac{d^2U_1}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dU_1}{dR}+\frac{1}{R}\frac{df_1}{dR}-\frac{1}{R}\frac{d\Phi_1}{dR}\right)+$$

$$+\frac{l(l+1)}{2R^2}(\Phi_1+f_1)=0 \tag{5.1}$$

$$(1+a/R)\left|\frac{d^2\Phi_1}{dR^2}+\frac{d^2U_1}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dU_1}{dR}+\frac{1}{R}\frac{d\Phi_1}{dR}+\frac{1}{R}\frac{df_1}{dR}\right|-$$

$$-\frac{a}{R^2}\left(\frac{3}{2}\frac{d\Phi_1}{dR}+\frac{dU_1}{dR}+\frac{1}{2}\frac{df_1}{dR}\right)-\frac{l(l+1)}{2R^2}(\Phi_1-f_1)=$$

$$=\frac{6C_1^2}{R^6}(\delta_{l0}-\delta_{l2}); \tag{5.2}$$

$$\frac{f_1}{2}\left(\frac{a/R^2}{1+a/R}-\frac{2}{R}\right)+\frac{\Phi_1}{2}\left(\frac{a/R^2}{1+a/R}+\frac{2}{R}\right)-\frac{dU_1}{dR}-\frac{d\Phi_1}{dR}=K(R)\delta_{l0}, \tag{5.3}$$

где δ_{lk} — символ Кроникера. Отметим, что в разложение (4.16) вследвие симметрии относительно экваториальной плоскости, входят только члены с четными значениями l.

Перейдем к нахождению функций U_0, f_0 и Φ_0. Учтем, что при выборе интервала ds^2 в виде (1.7) мы оставили за собой возможность произвольного преобразавания координаты R вида $R=R(R')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к λ произвольной функции от координаты R и эту функцию всегда можно выбирать так, чтобы $f_0=\Phi_0$. Тогда из уравнений (5.1)—(5.2) можно определить неизвестные функции u_0 и $f_0=\Phi_0$, а уравнение (5.3) позволит определить неизвестную функцию $K(R)$. Из уравнения (5.1) имеем

$$\frac{d\Phi_0}{dR}=\frac{df_0}{dR}+\frac{d^2}{dR^2}(u_0R).$$

Так как $\Phi_0=f_0$, то отсюда следует, что

$$U_0=\frac{C}{R}+C', \tag{5.4}$$

где C и C' постоянные интегрирования. Из условия, что при $R\to\infty$ U_0 должна стремиться к нулю, следует $C'=0$.

Подставляя значение U_0 в уравнение (5.2), получаем

$$(1 + a/R)\,\Phi_0 = (1 + a/R)\,f_0 = \frac{C_2}{R} - \frac{aC}{2R^2} + \frac{C_1^2}{2R^4}. \tag{5.5}$$

Полученные нами решения на бесконечно больших расстояниях должны совпасть с известной метрикой, полученной Папапетру [14]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M'}{R}\right)dx^{0\,2} + \left(1 + \frac{2M'}{R}\right)dR^2 +$$

$$+ R^2\left(1 + \frac{2M' + a}{R}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \frac{2I'_z}{R}\sin^2\theta\, d\varphi\, dx^0, \tag{5.6}$$

где M' — масса вращающейся конфигурации, а I'_{zz} — компонента момента инерции конфигурации.

Наша метрика на бесконечности с точностью до членов порядка $1/R$ имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{a + \beta C_2}{R}\right)dx^{0\,2} + \left(1 - \frac{a + \beta C_2}{R}\right)dR^2 +$$

$$+ R^2\left(1 + \beta\frac{C}{R}\right)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - \sqrt{\beta}\,\frac{C_1}{R}\sin^2\theta\, d\varphi\, dx^0. \tag{5.7}$$

Отметим, что поправки к компонентам метрического тензора, зависящие от угла θ, как будет показано, содержат члены более высокого порядка малости, чем $1/R$ при $R \to \infty$.

Из сравнения (5.6) и (5.7) следует, что

$$C = \frac{2M' + a}{\beta}, \quad C_2 = -\frac{2M' + a}{\beta}, \quad C_1 = -\frac{I'_z}{\sqrt{\beta}}. \tag{5.8}$$

Таким образом, все постоянные интегрирования выразились через интегральные параметры, характеризующие вращающуюся конфигурацию, а именно, массу и момент инерции.

Перейдем теперь к определению функций U_l, Φ_l и f_l в случае когда $l > 0$. Из уравнения (5.3) следует, что

$$\frac{dU_l}{dR} = \frac{f_l}{2}\left(\frac{a/R^2}{1 + a/R} - \frac{2}{R}\right) + \frac{\Phi_l}{2}\left(\frac{a/R^2}{1 + a/R} + \frac{2}{R}\right) - \frac{d\Phi_l}{dR}. \tag{5.9}$$

Отсюда, вычисляя $\dfrac{d^2U_l}{dR^2}$ и подставляя $\dfrac{dU_l}{dR}$ и $\dfrac{d^2U_l}{dR^2}$ в (5.2), получим следующее соотношение

$$\left[\frac{l(l+1)}{2}-1\right](\Phi_1-f_1)=\frac{6C_1^2}{R^4}\delta_{12}. \tag{5.10}$$

Используя соотношения (5.9) и (5.10), исключим функции U_1 и f_1 из уравнения (5.1), тогда получим следующее уравнение

$$(1+a/R)\frac{d^2F_1}{dR^2}+\left(\frac{2}{R}+\frac{3a}{R^2}\right)\frac{dF_1}{dR}-\frac{l(l+1)}{R^2}F_1=$$

$$=\frac{3C_1^2}{2R^6}\left(2\frac{a}{R}+5\frac{a^2}{R^2}-4\right)\delta_{12}, \tag{5.11}$$

где

$$F_1=(1+a/R)\,\Phi_1. \tag{5.12}$$

Решение уравнения (5.11) ищем в виде

$$F_1=\frac{v_1}{R^{l+1}}, \tag{5.13}$$

тогда для функции v_1 получим

$$(1+a/R)\frac{d^2v_1}{dR^2}-\frac{1}{R}\left[2l+(2l-1)\frac{a}{R}\right]\frac{dv_1}{dR}+\frac{a}{R^3}(l^2-1)\,v_1=$$

$$=\frac{3C_1^2}{2R^3}\left(2\frac{a}{R}+5\frac{a^2}{R^2}-4\right)\delta_{12}. \tag{5.14}$$

Введем новую переменную $x=-\frac{a}{R}$, тогда (5.14) примет вид

$$(1-x)\,x\frac{d^2v_1}{dx^2}+[(2l+2)-(2l+1)\,x]\frac{dv_1}{dx}-$$

$$-(l^2-1)\,v_1=\frac{3C_1^2}{2a}(4+2x-5x^2)\,\delta_{12}. \tag{5.15}$$

Уравнение (5.15) есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка и его полное решение слагается из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Отметим, что частное решение следует искать только для $l=2$.

Однородное уравнение представляет из себя уравнение для гипергеометрической функции Гаусса. Его решение можно записать в виде

$$v_1=A_1F(l+1,\ l-1,\ 2l+2,\ x)+B_1x^{-2l-1}F(-l-2,\ -l,\ -2l,\ x). \tag{5.16}$$

Второе слагаемое в решении (5.16) не удовлетворяет условиям на бесконечности. При $R \to \infty$, x стремится к нулю и, следовательно, функция $F_l \sim R^l$, то есть стремится к бесконечности, в то время, когда она должна была обратиться в нуль, а поэтому B_l должен равняться нулю. Постоянная интегрирования A_l определяется из сшивки с внутренним решением.

Частное решение уравнения (5.15) при $l = 2$ можно искать в виде квадратичной формы по x.

$$v_2 = B_1 x^2 + B_2 x + B_3.$$

Значения B_1, B_2 и B_3 определим подставляя v_2 в уравнение (5.15) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x нулю. В результате получаем

$$v_2 = \frac{C_1^2}{2a}(x^2 + x - 2).$$

Таким образом, решение уравнения (5.11) имеет вид

$$\Phi_l = \frac{F_l}{1 + a/R} = \frac{1}{1 + a/R}\left\{\frac{A_l}{R^{l+1}} F\left(l+1,\ l-1,\ 2l+2,\ -\frac{a}{R}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1^2}{2aR^3}\left(\frac{a^2}{R^2} - \frac{a}{R} - 2\right)\delta_{l2}\right\}. \tag{5.17}$$

Остальные неизвестные функции определяются из уравнений (5.9) и (5.10)

$$f_l = \Phi_l - \frac{3C_1^2}{R^4}\delta_{l2}, \tag{5.18}$$

$$U_l = \int\left\{-\frac{1}{1 + a/R}\frac{d}{dR}\left[\left(1 + \frac{a}{R}\right)\Phi_l\right] - \frac{3C_1^2}{2R^4}\left(\frac{a/R^2}{1 + a/R} - \frac{2}{R}\right)\delta_{l2}\right\}dR. \tag{5.19}$$

Отметим, что полученные точные решения фактически из себя представляют разложение в ряд по степеням a/R. Известно, что ньютоновское приближение из теории Эйнштейна получается при предельном переходе $a/R \to 0$. Так как в большинстве случаев параметр $a/R \ll 1$, то при практических расчетах можно ограничиться первыми членами гипергеометрического ряда и тем самым определить первые поправки к ньютоновскому приближению.

В заключение выражаем благодарность Г. С. Саакяну за ценные замечания и Ю. Л. Вартаняну за обсуждения.

Ереванский государственный университет
Бюраканская астрофизическая обсерватория

STATIONARY AXIAL-SYMMETRIC GRAVITATION FIELDS

D. M. SEDRAKIAN, E. V. CHUBARIAN

In this paper the problem of rotation of stellar configurations according to Einstein's theory is discussed. The Einstein equations for axially symmetric mass distribution are obtained. Non-sphericity of the shape of configuration appears only in the second approximation on Ω (Ω — is the angular velocity of rotation). The Einstein equations are written in this approximation and the analytic solutions of these equations within the mass distribution are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. H. Jeans*, Astronomy and Cosmology, Cambridge, Cambridge University Press, 1929.
2. *S. Chandrasechar*, M. N., 390, 1932; Ap. J., 142, 1488, 1965.
3. *R. A. James*, Ap. J., 140, 552, 1964.
4. *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Сообщ. Бюр. обс. (в печати).
5. *P. H. Roberts*, Ap. J., 137, 1129, 1963; Ap. J., 138, 809, 1963.
6. *E. S. Akeley*, Phyl. Mag., 11, 331, 1931.
7. *T. Lewis*, Proc. Roy. Roc., A 136, 176, 1932.
8. *R. P. Kerr*, Phys. Rev. Letters., 11, 522, 1963.
9. *А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, ЖЭТФ, 49, 170, 1965.
10. *В. Ц. Гурович*, Астрон. ж., 42, 974, 1965.
11. *J. B. Hartle, D. H. Sharp*, Ap. J., 147, 317, 1967.
12. *J. R. Oppenheimer, G. H. Volkoff*, Phys. Rev., 55, 374, 1939.
13. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, „Наука", М., 1967.
14. *A. Papapetrou*, Proc. R. Irish Acd., 52, 11, 1948.