АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 МАЙ, 1968 ВЫПУСК 2

ВРАЩЕНИЕ И ПУЛЬСАЦИИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ОБЛАКА ГАЗА

В. Ф. ДЬЯЧЕНКО, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, В. С. ИМШЕННИК, В. В. ПАЛЕЙЧИК

Поступила 12 октября 1967
Исправлена 5 мая 1968

В данной работе рассмотрена модель вращающейся звезды с постоянным показателем адиабаты, равным критическому значению 4/3. Численным методом решена задача об осесимметричном адиабатическом движении звездного вещества при сравнительно небольшом начальном нарушении гидростатического равновесия. Показано, что, если полная энергия отрицательна, в отличие от одномерного случая возникает устойчивое состояние равновесия, вокруг которого происходят пульсации почти радиального типа. Частота этих пульсаций хорошо объясняется линейной теорией адиабатических пульсаций звезд. В возникающем равновесном состоянии закон вращения существенно отличается от твердотельного. Угловая скорость практически зависит только от расстояния от оси вращения и уменьшается по направлению к поверхности. Происходит образование эллипсоидальной разреженной оболочки, окружающей весьма плотное сферически симметричное ядро. Рассмотренная модель может оказаться полезной для теории поздних стадий эволюции звезд, когда показатель адиабаты приближается к значению 4/3 и создаются условия гравитационного коллапса.

Введение. Динамика самогравитирующего аксиально-симметричного газового облака описывается известной системой уравнений двумерной газодинамики совместно с уравнением Пуассона для гравитационного потенциала в цилиндрической системе координат. Для достаточно быстрых движений, происходящих за характерное газодинамическое время, можно пренебречь всеми диссипативными процессами и считать движение адиабатическим с сохранением момента газовых частиц. В применении к звездам интересно, например, решить задачу о влиянии вращения на процесс коллапса, который может развиваться на последних стадиях ядерной эволюции звезды. При этом эффектив-

ный показатель адиабаты звезды γ_0 становится меньше критического значения 4/3 [1].

Мы рассмотрим ниже идеализированную задачу, положив в точности $\gamma_0 = 4/3$. Как известно, при таком условии сферически симметричная равновесная конфигурация находится в состоянии безразличного равновесия [2]. При начальном возмущении типа охлаждения эта конфигурация будет коллапсировать. Благодаря вращению она может приобрести устойчивость. На возможность существования, для случая $\gamma_0 = 4/3$, при учете вращения устойчивой конфигурации аксиально-симметричной формы с отрицательным значением энергии указывалось ранее [3, 4]. С помощью численного расчета в данной работе показано, во-первых, что вращение эффективно останавливает процесс коллапса и, во-вторых, что существует некоторая равновесная устойчивая конфигурация.

Из-за начальной механической неравновесности в газовом облаке возбудились незатухающие пульсации. Весьма интересна связь характеристик этих пульсаций со свойствами вращения. В расчете было установлено близкое совпадение их периодов. Интерпретацию этого факта можно дать в рамках линейной теории звездных пульсаций, если на основе энергетических соображений определить период основного тона радиальных пульсаций с учетом фактора вращения.

Весь расчет проводился без введения искусственной вязкости и в эйлеровых переменных. В связи с этим начальное нарушение гидростатического равновесия нельзя задавать слишком сильным, так как в противном случае неизбежно образование сильных ударных волн (слабые скачки можно описывать без введения искусственной вязкости) и сильных сокращений объема газового облака (разностная сетка эйлеровых координат может стать очень редкой).

В начальный момент времени в расчете задавалась сферически симметричная политропа с индексом $n = 3$. При таком выборе начальной конфигурации и при значении $\gamma_c = 4/3$ энтропия вещества постоянна вдоль всего облака. Следовательно, задача становится изоэнтропической. Начальный закон вращения определяется двумя обстоятельствами: постоянство угловой скорости и достижение первой космической скорости на экваторе политропы. Тем самым исследуется случай быстрого вращения конфигурации без сброса массы. В процессе счета закон вращения существенно изменился. Угловая скорость по направлению к поверхности облака стала уменьшаться. В стадии установившихся пульсаций угловая скорость практически не зависит от координаты z, так что полярные области поверхности облака вращаются быстрее экваториальных.

Задача была решена в некоторых безразмерных переменных. При переходе к размерным переменным роль произвольных независимых параметров играют ρ_0 и T_0, начальные плотность и температура в центре облака. В частности, из-за произвольности этих параметров масса звезды тоже произвольна и экспоненциально зависит от энтропии в центре облака.

1. *Система уравнений, начальные условия и законы сохранения.* Численно решалась система уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -4\beta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -4\beta \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{3} T \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{3} T \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{3} \cdot \frac{T v_r}{r} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4.09\, T^3, \tag{1.5}$$

с неизвестными функциями v_r, v_z, v_φ (компонентами скорости), T (температурой) и Φ (гравитационным потенциалом). Константа β в уравнениях движения (1.1)—(1.2) произвольна и задается в начальный момент времени. Уравнение движения (1.3) может быть кратко записано в виде:

$$\frac{d}{dt}(v_\varphi r) = 0 \tag{1.6}$$

и имеет смысл уравнения сохранения момента количества движения. Уравнение непрерывности (1.4) записано для температуры вещества, потому что вследствие адиабатичности движения и постоянства начальной энтропии вещества для любого момента времени:

$$\rho = T^3. \tag{1.7}$$

Запишем единицы измерения всех величин, входящих в уравнения (1.1)—(1.7):

$$r_0 = z_0 = l_0 = \left(\frac{a}{3}\cdot\frac{4.09}{4\pi\beta G}\right)^{1/2}\cdot\frac{T_0^2}{\rho_0}, \qquad t_0 = \left(\frac{4.09}{4\pi G}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\rho_0^{1/2}},$$

$$v_{r0} = v_{z0} = v_{\varphi 0} = \frac{l_0}{t_0} = \left(\frac{a}{3\beta}\right)^{1/2}\cdot\frac{T_0^2}{\rho_0^{1/2}}, \qquad \Phi_0 = \frac{l_0^2}{t_0^2} = \left(\frac{a}{3\beta}\right)\cdot\frac{T_0^4}{\rho_0}. \tag{1.8}$$

Единицами температуры и плотности служат температура и плотность в начальный момент времени в центре облака T_0 и ρ_0 соответственно. Постоянная a может быть выражена через известные параметры, если использовать уравнение состояния идеального газа (штрих означает, что данная величина размерна)

$$p' = \frac{R}{\mu}\cdot\rho' T' = \frac{1}{3}\,a\,T'^4, \tag{1.9}$$

где R — газовая постоянная, а μ — молекулярный вес. Отсюда

$$a = \frac{3R}{\mu}\cdot\frac{\rho'}{T'^3} = \frac{3R}{\mu}\cdot\frac{\rho_0}{T_0^3}, \tag{1.10}$$

так как для выбранных начальных условий и при условии адиабатичности движения отношение ρ'/T'^3 постоянно вдоль всего облака и для всех моментов времени. Действительно, покажем сперва изоэнтропичность облака в начальный момент времени. Для политропы с индексом $n = 3$:

$$p' = \varkappa\rho'^{4/3}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, в общем случае идеального газа с постоянным показателем адиабаты γ_0 давление может быть выражено через энтропию и плотность известным способом [4]

$$p' = \lambda e^{S'/C_V}\cdot\rho'^{\gamma_0}, \tag{1.12}$$

где λ — постоянная, S' — энтропия на единицу массы, C_V — теплоемкость на единицу массы. При $\gamma_0 = 4/3$ из сравнения (1.11) и (1.12) видно, что $S' = S_0' = \text{const}$, причем, в соответствии с (1.9):

$$S_0' = C_V\cdot\ln\left(\frac{R}{\mu\lambda}\cdot\frac{T_0}{\rho_0^{1/3}}\right). \tag{1.13}$$

Но, благодаря адиабатичности движения $\left(\frac{dS'}{dt} = 0\right)$, и для всех моментов времени

$$S' = C_v \ln\left(\frac{R}{\mu}\cdot\frac{T'}{\rho'^{\gamma-1}}\right) = \text{const} = S'_0 \quad \text{из} \quad (1.13)$$

Поэтому всегда постоянно отношение:

$$\frac{\rho'}{T'^3} = \frac{\rho_0}{T_0^3}. \tag{1.14}$$

В безразмерном виде соотношение (1.14) эквивалентно уравнению состояния (1.7).

Еще заметим, что выбор численного коэффициента 4.09 в уравнении (1.5) (соответственно в (1.8)) произволен, но удобен, так как приводит к безразмерным величинам порядка единицы.

Легко показать, что законы сохранения выглядят следующим образом. Закон сохранения массы имеет вид:

$$M = \rho_0 l_0^3 \cdot 2\pi \int\int T^3 r\, dr\, dz = \text{const}. \tag{1.15}$$

Согласно (1.8) $\rho_0 l_0^3 \sim \dfrac{T_0^3}{\rho_0}$, то есть масса облака M экспоненциально зависит от энтропии в центре облака. Закон сохранения энергии гласит:

$$E = \rho_0 \frac{l_0^5}{t_0^2}\left\{\pi \int\int (v_r^2 + v_z^2 + v_\varphi^2)\, T^3 r\, dr\, dz + \pi \int\int T^3 \Phi r\, dr\, dz + \right.$$
$$\left. + 6\pi\beta \int\int T^4 r\, dr\, dz\right\} = \text{const}. \tag{1.16}$$

В соотношении (1.16) гравитационный потенциал должен быть определен таким образом, чтобы при $r,\ z \to \infty$ он обращался в нуль. Наконец, закон сохранения полного момента количества движения имеет вид:

$$I = \rho_0 \frac{l_0^5}{t_0} 2\pi \int\int r v_\varphi T^3 r\, dr\, dz. \tag{1.17}$$

В дальнейшем нам понадобятся из (1.16) энергетические члены, взятые по отдельности. Введем безразмерные выражения различных слагаемых кинетической энергии:

$$E_r = \pi \int\int v_r^2 T^3 r\, dr\, dz, \qquad E_z = \pi \int\int v_z^2 T^3 r\, dr\, dz,$$
$$E_\varphi = \pi \int\int v_\varphi^2 T^3 r\, dr\, dz, \tag{1.18}$$

гравитационной и тепловой энергий:

$$E_g = \pi \int\int T^3 \Phi r \, dr \, dz, \qquad E_T = 6\pi\beta \int\int T^4 r \, dr \, dz. \tag{1.19}$$

В начальный момент времени задается сферически симметричная политропа индекса $n = 3$, которая в безразмерных переменных вычисляется из системы уравнений:

$$-4 \frac{\partial T(r, 0)}{\partial r} = \frac{\partial \Phi(r, 0)}{\partial r}, \qquad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r, 0)}{\partial r} \right) = 4.09\, T^3(r, 0) \tag{1.20}$$

с краевым условием $T(0, 0) = 1$.

Из сравнения с уравнением (1.1) мы видим, что при $\beta = 1$ в начальный момент времени будут соблюдаться условия гидростатического равновесия, но только в том случае, когда будет отсутствовать начальное вращение. При $\beta < 1$ начальные условия $T(r, 0)$ и $\Phi(r, 0)$ из (1.20) обусловливают дальнейшее сжатие звезды. Чтобы нарушение гидростатического равновесия было не очень сильным, зададим β достаточно близким к единице. В последующем речь будет идти только о расчете с определенным значением β, $\beta = 0.95$.

Такое значение β одновременно настолько мало, что полная энергия E остается отрицательной величиной при учете начальной энергии вращения. Сформулируем начальный закон вращения. Если предположить постоянство угловой скорости, то

$$v_\varphi = \omega \cdot r, \tag{1.21}$$

где величину ω можно определить для случая первой космической скорости вращения (R' — радиус политропы):

$$v_\varphi'^2 = \frac{GM}{R'}. \tag{1.22}$$

После перехода к безразмерным переменным по (1.8) и (1.15) получим:

$$\omega^2 = \frac{4.09}{4\pi} \cdot \frac{2\pi \int\int T^3 r \, dr \, dz}{R^3}. \tag{1.23}$$

Если подставить в (1.23) безразмерную массу начальной конфигурации, найденную из решения уравнений (1.20),

$$2\pi \int\int T^3 r \, dr \, dz = 24.54 \tag{1.23}$$

и радиус

$$R = 6.82,$$

то найдем угловую скорость

$$\omega = 0.159.$$

Таким образом, согласно (1.21), в начальный момент времени задается закон вращения

$$v_\varphi = 0.159\, r. \tag{1.24}$$

Соответственно этому в начальный момент кинетическая энергия вращения из (1.18) равна:

$$E_\varphi = 0.542.$$

Аналогично гравитационная и тепловая энергия из (1.19) равны:

$$E_\Gamma = -21.52, \quad E_T = 20.47.$$

Отсюда полная энергия начального состояния действительно отрицательна и равна:

$$E_\varphi + E_\Gamma + E_T = -0.51.$$

Неравновесность начального состояния вызвана отличной от нуля действующей силой. При этом очевидно, что z — компонента силы

$$f_z(r,\ z,\ 0) = -4\beta \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} < 0. \tag{1.25}$$

Тогда как r — компонента имеет более сложный характер из-за роли центробежной силы v_φ^2/r,

$$f_r(r,\ z,\ 0) = -4\beta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{r}. \tag{1.26}$$

За исключением небольшого центрального ядра вещество звезды в начальный момент времени имеет положительное ускорение перпендикулярно оси вращения. В направлении оси вращения начальное ускорение повсюду отрицательно.

2. *Описание численного метода.* Перепишем систему (1.1)—(1.5) в виде

$$\frac{dv_r}{dt} + 4\beta \frac{\partial T}{\partial r} + \varphi - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{dv_z}{dt} + 4\beta \frac{\partial T}{\partial z} + \psi = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{dr v_\varphi}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{3}\left(\frac{\partial r v_r}{r \partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial r \varphi}{r \partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 4.09\, T^3 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \tag{2.6}$$

где $\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $\psi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$, а оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Как уже говорилось, в качестве начальных данных бралось решение $T(R)$ системы

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{d\Phi}{dR}\right) = 4.09\, T^3$$

$$-4\frac{dT}{dR} = \frac{d\Phi}{dR},$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, удовлетворяющее условию $T(0) = 1$; при этом начальные распределения φ и ψ есть

$$\varphi = \frac{r}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dR}, \qquad \psi = \frac{z}{R} \cdot \frac{d\Phi}{dR},$$

скорости $v_r = v_z = 0$, а $v_\varphi = 0.159\, r$.

Система (2.1)—(2.6) численно интегрировалась в области $0 < r$, $z < 10,125$ при следующих граничных условиях

при	$r = 0$	$v_r = v_\varphi = 0,$	$\varphi = 0$
при	$z = 0$	$v_z = 0,$	$\psi = 0$
при	$r = 10,125$	$T = 0,$	$\psi = \bar{\psi}(z)$
при	$z = 10,125$	$T = 0,$	$\varphi = \bar{\varphi}(z),$

где $\bar{\psi}(z)$, $\bar{\varphi}(z)$ — значения ψ, φ, задаваемые в начальный момент.

Счетная сетка задается прямыми $r = r_i$, $z = z_j$. Значения функций v_r, v_φ и φ вычисляются в точках $r = r_i$, $z = z_{j+1/2} = \frac{z_j + z_{j+1}}{2}$ и обозначаются $(v_r)_{i,\, j+1/2}$, $(v_\varphi)_{i,\, j+1/2}$ и $\varphi_{i,\, j+1/2}$. Значения v_z и ψ вычисляются в точках $r = r_{i+1/2} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$, $z = z_j$ и обозначаются $(v_z)_{i+1/2,\, j}$, $\psi_{i+1/2,\, j}$. Наконец, T дается в точках $r = r_{i+1/2}$, $z = z_{j+1/2} - T_{i+1/2,\, j+1/2}$.

Если требуется значение любой из этих функций не в той точке, где она вычисляется, то это значение получается как среднее по значениям в ближайших точках, например,

$$(v_z)_{i+1/2,\ j+1/2} = \frac{(v_z)_{i+1/2,\ j} + (v_z)_{i+1/2,\ j+1}}{2}$$

$$(v_z)_{i,\ j+1/2} = \frac{(v_z)_{i+1/2,\ j} + (v_z)_{i+1/2,\ j+1} + (v_z)_{i-1/2,\ j} + (v_z)_{i-1/2,\ j+1}}{4}.$$

Верхний индекс у всех величин обозначает время, то есть f^n есть значение f в момент $t = n\cdot\tau$, где τ — шаг по времени.

Система уравнений (2.1)—(2.6) заменяется конечно-разностной системой следующим образом. Вместо dv_r/dt пишем

$$\left(\frac{dv_r}{dt}\right)_{i,\ j+1/2} \sim \frac{(v_r)^{n+1}_{i,\ j+1/2} - (v_r)^n_{i,\ j+1/2}}{\tau} + (v_r)^n_{i,\ j+1/2} D_r\,(v_r^n)_{i,\ j+1/2} +$$

$$+ (v_z)^n_{i,\ j+1/2} \cdot D_z\,(v_r^n)_{i,\ j+1/2},$$

где $D_r(v_r)$, $D_z(v_r)$ есть либо левая, либо правая разность v_r в зависимости от знака коэффициента при D_r, D_z

$$D_r(v_r)_{i,\ j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{(v_r)_{i,\ j+1/2} - (v_r)_{i-1,\ j+1/2}}{r_i - r_{i-1}} & \text{при} \quad (v_r)_{i,\ j+1/2} \geqslant 0 \\ \dfrac{(v_r)_{i+1,\ j+1/2} - (v_r)_{i,\ j+1/2}}{r_{i+1} - r_i} & \text{при} \quad (v_r)_{i,\ j+1/2} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$D_z\,(v_r)_{i,\ j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{(v_r)_{i,\ j+1/2} - (v_r)_{i,\ j-1/2}}{z_{j+1/2} - z_{j-1/2}} & \text{при} \quad (v_z)_{i,\ j+1/2} \geqslant 0 \\ \dfrac{(v_r)_{i,\ j+3/2} - (v_r)_{i,\ j+1/2}}{z_{j+3/2} - z_{j+1/2}} & \text{при} \quad (v_z)_{i,\ j+1/2} \leqslant 0. \end{cases}$$

Заменяя остальные члены уравнений естественным образом, получаем вместо первых четырех уравнений (2.1)—(2.4) систему разностных соотношений:

$$\frac{(v_r)^{n+1}_{i,\ j+1/2} - (v_r)^n_{i,\ j+1/2}}{\tau} + (v_r)^n_{i,\ j+1/2} \cdot D_r\,(v_r^n)_{i,\ j+1/2} +$$

$$+ (v_z)^n_{i,\ j+1/2} \cdot D_z\,(v_r^n)_{i,\ j+1/2} + 4\beta\,\frac{T^n_{i+1/2,\ j+1/2} - T^n_{i-1/2,\ j+1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} + \varphi^n_{i,\ j+1/2} -$$

$$- \frac{(v_\varphi^2)^n_{i,\ j+1/2}}{r_i} = 0.$$

$$\frac{(v_z)^{n+1}_{i+1/2,\ j}-(v_z)^{n}_{i+1/2,\ j}}{\tau}+(v_r)^{n}_{i+1/2,\ j}\cdot D_r\,(v_z^n)_{i+1/2,\ j}+$$

$$+(v_z)^{n}_{i+1/2,\ j}\cdot D_z\,(v_z^n)_{i+1/2,\ j}+\psi^n_{i+1/2,\ j}+4\beta\,\frac{T^n_{i+1/2,\ j+1/2}-T^n_{i+1/2,\ j-1/2}}{z_{j+1/2}-z_{j-1/2}}=0.$$

$$r_i\cdot\frac{(v_\varphi)^{n+1}_{i,\ j+1/2}-(v_\varphi)^{n}_{i,\ j+1/2}}{\tau}+(v_r)^{n}_{i,\ j+1/2}\cdot D_r\,(rv^n_\varphi)_{i,\ j+1/2}+$$

$$+(v_z)^{n}_{i,\ j+1/2}\cdot D_z\,(rv^n_\varphi)_{i,\ j+1/2}=0.$$

$$\frac{T^{n+1}_{i+1/2,\ j+1/2}-T^{n}_{i+1/2,\ j+1/2}}{\tau}+(v_r)^{n}_{i+1/2,\ j+1/2}D_r\,(T^n)_{i+1/2,\ j+1/2}+$$

$$+(v_z)^{n}_{i+1/2,\ j+1/2}\cdot D_z\,(T^n)_{i+1/2,\ j+1/2}+$$

$$+\frac{1}{3}T^n_{i+1/2,\ j+1/2}\left(\frac{(rv_r)^{n+1}_{i+1,\ j+1/2}-(rv_r)^{n+1}_{i,\ j+1/2}}{r_{i+1/2}(r_{i+1}-r_i)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(v_z)^{n+1}_{i+1/2,\ j+1}-(v_z)^{n+1}_{i+1/2,\ j}}{z_{j+1}-z_j}\right)=0.$$

Эти формулы позволяют по известным значениям n-ого слоя $(v_r)^n$, $(v_z)^n$, $(v_\varphi)^n$, T^n, φ^n, ψ^n вычислить значения $(v_r)^{n+1}$, $(v_z)^{n+1}$, $(v_\varphi)^{n+1}$ и T^{n+1} на $(n+1)$-ом слое.

Уравнения (2.5), (2.6) заменяются системой разностных соотношений

$$\frac{(r\varphi)^{n+1}_{i+1,\ j+1/2}-(r\varphi)^{n+1}_{i,\ j+1/2}}{r_{i+1/2}(r_{i+1}-r_i)}+\frac{\psi^{n+1}_{i+1/2,\ j+1}-\psi^{n+1}_{i+1/2,\ j}}{z_{j+1}-z_j}=4.09\,(T^3)^{n+1}_{i+1/2,\ j+1/2}$$

$$\frac{\varphi^{n+1}_{i,\ j+1/2}-\varphi^{n+1}_{i,\ j-1/2}}{z_{j+1/2}-z_{j-1/2}}-\frac{\psi^{n+1}_{i+1/2,\ j}-\psi^{n+1}_{i-1/2,\ j}}{r_{i+1/2}-r_{i-1/2}}=0,$$

которая решается итерациями. На каждой итерации используется метод переменных направлений, суть которого состоит в следующем. Обозначим

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=f,\qquad \begin{pmatrix}4.09\,T^3\\ 0\end{pmatrix}=F,$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{r\partial r}r & 0\\ 0 & -\dfrac{\partial}{\partial r}\end{pmatrix}=L,\qquad \begin{pmatrix}0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0\end{pmatrix}=M$$

тогда система (2.5), (2.6) запишется в виде

$$(L+M)f=F,$$

из которого нетрудно получить

$$(I+\alpha L)(I+\alpha M)f=(I-\alpha L)(I-\alpha M)f+2\alpha F,$$

где I — единичная матрица, α — произвольный параметр. Подставляя в правую часть вместо f очередное приближение $\overset{(\nu)}{f}$ и обращая сначала оператор $(I+\alpha L)$, затем $(I+\alpha M)$, получим следующее приближение $\overset{(\nu+1)}{f}$. Обращение каждого оператора есть решение одномерной задачи. Конкретно это реализуется так. Имея $\overset{(\nu)}{f}$ находим $\bar{f}$ из

$$(I+\alpha L)\bar{f}=(I-\alpha M)\overset{(\nu)}{f}+\alpha F,$$

то есть

$$\bar{\varphi}+\alpha\frac{\partial r\bar{\psi}}{r\partial r}=\overset{(\nu)}{\varphi}-\alpha\frac{\partial\overset{(\nu)}{\psi}}{\partial z}+\alpha\cdot 4.09\,T^3$$

$$\bar{\psi}-\alpha\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial r}=\overset{(\nu)}{\psi}-\alpha\frac{\partial\overset{(\nu)}{\varphi}}{\partial z},$$

или в разностной форме

$$\bar{\varphi}_{i+1,\,j+1/2}+\alpha\frac{(r\bar{\psi})_{i+1,\,j+1/2}-(r\bar{\psi})_{i,\,j+1/2}}{r_{i+1/2}(r_{i+1}-r_i)}=$$

$$=\overset{(\nu)}{\varphi}_{i+1,\,j+1/2}-\alpha\frac{\overset{(\nu)}{\psi}_{i+1/2,\,j+1}-\overset{(\nu)}{\psi}_{i+1/2,\,j}}{z_{j+1}-z_j}+\alpha\cdot 4.09\,(T^3)^{n+1}_{i+1/2,\,j+1/2}$$

$$\bar{\psi}_{i+1/2,\,j}-\alpha\frac{\bar{\psi}_{i+3/2,\,j}-\bar{\psi}_{i+1/2,\,j}}{r_{i+3/2}-r_{i+1/2}}=\overset{(\nu)}{\psi}_{i+1/2,\,j}-\alpha\frac{\overset{(\nu)}{\varphi}_{i+1,\,j+1/2}-\overset{(\nu)}{\varphi}_{i+1,\,j-1/2}}{z_{j+1/2}-z_{j-1/2}}.$$

Используя граничное условие $\bar{\varphi}=0$ при $r=0$, из первого соотношения находим последовательно все $\bar{\varphi}_{i,\,j+1/2}$; используя $\bar{\psi}=\bar{\psi}$ при $r=10,\ 125$, находим последовательно все $\bar{\psi}_{i+1/2,\,j}$. Второй этап — обращение $(I+\alpha M)$ состоит в решении системы

$$(I+\alpha M)\overset{(\nu+1)}{f}=(I-\alpha L)\bar{f}+\alpha F,$$

то есть

$$\overset{(\nu+1)}{\varphi} + \alpha \frac{\partial \overset{(\nu+1)}{\psi}}{\partial z} = \tilde{\varphi} - \alpha \frac{\partial r\tilde{\varphi}}{r\partial r} + \alpha \cdot 4.09\, T^3$$

$$\overset{(\nu+1)}{\psi} + \alpha \frac{\partial \overset{(\nu+1)}{\varphi}}{\partial z} = \tilde{\psi} + \alpha \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}$$

или в разностной форме

$$\overset{(\nu+1)}{\varphi}_{i+1,\, j+1/2} + \alpha \frac{\overset{(\nu+1)}{\psi}_{i+1/2,\, j+1} - \overset{(\nu+1)}{\psi}_{i+1/2,\, j}}{z_{j+1} - z_j} = \tilde{\varphi}_{i+1,\, j+1/2} - \alpha \frac{(r\tilde{\varphi})_{i+1,\, j+1/2} - (r\tilde{\varphi})_{i,\, j+1/2}}{r_{i+1/2}(r_{i+1} - r_i)} +$$

$$+ \alpha \cdot 4.09\, (T^3)^{n+1}_{i+1/2,\, j+1/2},$$

$$\overset{(\nu+1)}{\psi}_{i+1/2,\, j} + \alpha \frac{\overset{(\nu+1)}{\varphi}_{i+1,\, j+1/2} - \overset{(\nu+1)}{\varphi}_{i+1,\, j-1/2}}{z_{j+1/2} - z_{j-1/2}} = \tilde{\psi}_{i+1/2,\, j} + \alpha \frac{\tilde{\psi}_{i+3/2,\, j} - \tilde{\psi}_{i+1/2,\, j}}{r_{i+3/2} - r_{i+1/2}}.$$

Последняя система решается для каждого i обычной прогонкой с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = 10,125$. В результате получаем следующее приближение $\overset{(\nu+1)}{\varphi}$, $\overset{(\nu+1)}{\psi}$. Можно показать, что итерации сходятся, если $\alpha > 0$.

В расчете α полагалось равным единице. Так как начальное приближение $\overset{(0)}{\varphi}{}^{n+1}$, $\overset{(0)}{\psi}{}^{n+1}$ было достаточно хорошим ($\overset{(0)}{\varphi}{}^{n+1} = \varphi^n$, $\overset{(0)}{\psi}{}^{n+1} = \psi^n$), то уже вторая итерация давала удовлетворительную точность.

Шаги расчетной сетки:

$$\Delta r = 0.125 \quad \text{при} \quad r < 8$$
$$\Delta r = 0.25 \quad \text{при} \quad 8 < r < 10,125$$
$$\Delta z = 0.125 \quad \text{при} \quad z < 8$$
$$\Delta z = 0.25 \quad \text{при} \quad 8 < z < 10.125$$
$$\tau = \Delta t = 0.025$$

3. *Результаты расчета.* На рис. 1 изображены графики различных видов энергии (E, $E_к$, $E_т$, $E_г$, E_z. E_φ) в зависимости от времени, а также момент количества движения I. Как видно из графика, полная энергия E хорошо сохраняется в процессе счета. Отметим, что и масса M тоже постоянна с хорошей точностью. Момент количества движения I, который должен быть третьей постоянной величиной, сохраняется хуже и колеблется в пределах 20% от своего начального значения.

После некоторого промежутка времени в газовом облаке возникают колебания, по всей видимости, установившегося типа. За один период этих колебаний, как видно на рис. 1, можно принять величину $\tau_{кол} = 88 - 47 = 41$. Оба отмеченных момента времени соответствуют

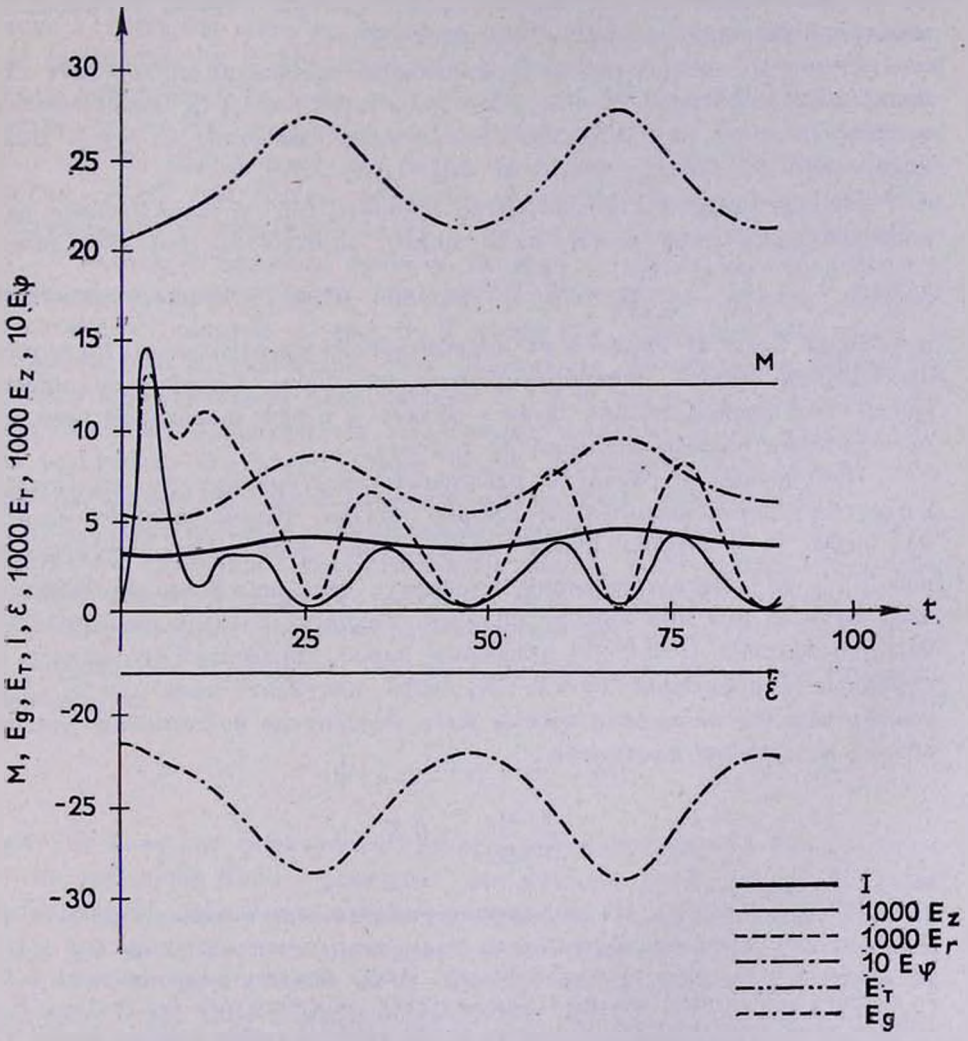

Рис. 1.

максимальному расширению и охлаждению облака (см. графики потенциальной и тепловой энергий). Изменение энергии вращения при этом происходит с тем же периодом и в качественном соответствии с законом сохранения момента количества движения. Амплитуда изменения

энергий $E_к$, $E_т$ и $E_э$ довольно велика и составляет для первых двух примерно 25%, а для последней примерно 50% среднего значения. Кинетические энергии E_r и E_z колеблются с частотой вдвое большей, причем $E_r \simeq 2E_z$. Грубо говоря, описываемые колебания, судя по графикам мгновенных профилей скоростей v_r и v_z (графики $v_r(r, 0)$ и $v_z(0, z)$ не имеют других нулей, кроме центра облака, и синфазны между собой), принадлежат к основному тону*.

Отметим, что получаемые радиальные пульсации происходят относительно медленно, о чем свидетельствует малость кинетических энергий E_r и E_z по сравнению с амплитудой изменения $E_т$ и $E_к$. Действительно $(E_r + E_z)_{max} \simeq 0.12$ и $\Delta E_к \simeq \Delta E_т \simeq 7.0$.

Период вращения можно грубо оценить (об установившемся законе вращения речь будет идти ниже), исходя из его начального закона, $\tau_{вр} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.159} \simeq 40$. Совпадение этого периода с периодом пульсации $\tau_{кол} \simeq 41$ кажется на первый взгляд удивительным, но может быть весьма просто интерпретировано на основе физических соображений. Эта интерпретация дана в пункте 4 с использованием некоторых дополнительных сведений из расчета.

Полученные в расчетах распределения температуры подтверждают радиальный характер пульсаций облака. Кроме того из расчетов видно, что облако имеет сплюснутую форму. При $r \simeq 2$ плотность $\rho \sim T^3$ в экваториальной плоскости уже несколько превышает плотность на оси при том же радиусе. Размер облака в экваториальном направлении ($r \approx 8$—9) примерно вдвое превышает его размер в полярном направлении ($z \approx 4$—5), хотя плотность газа при $r > 5$ в экваториальной плоскости весьма мала. Амплитуда колебаний в центре облака в величине плотности

$$\frac{\rho_{ц\cdot max}}{\rho_{ц\cdot min}} \simeq 2.3.$$

---

* Следует отметить, что это замечание, строго говоря, относится к центральной части облака, заключенной внутри сферы с радиусом $(z^2+r^2)^{1/2} \simeq 3$. Извне этой области движение носит более сложный характер. Можно заметить распространение волн по внешней разреженной оболочке. Существенная роль этих волн для процесса колебаний отмечалась ранее [9]. Эти волны имеют характер слабых ударных разрывов, затухающих по мере приближения к внешнему краю облака. В данной счетной схеме, по-видимому, не имеет смысла анализировать детали этого процесса, например, сравнивать с известным возрастающим автомодельным решением для ударной волны. Однако, напомним, что в последнем не учитывается тормозящее действие силы тяжести, которое при подходящих условиях может воспрепятствовать росту амплитуды ударной волны.

Следующие рисунки (рис. 2—3) характеризуют вращение в установившемся состоянии. На рис. 2 изображена зависимость азимутальной скорости v_φ от радиуса при нескольких значениях z. Этот рисунок соответствует моменту максимального расширения и охлаждения. Другой рисунок сделан для той же величины, но относится к моменту максимального сжатия. На обоих рисунках все кривые весьма близки друг к другу, то есть v_φ зависит практически от одного радиуса r, но не зависит от z. Из уравнения (1.2) сразу видно, что при равном нулю ускорении, то есть при $dv_z/dt = 0$, функция $4\pi T + \Phi$ зависит только от r. Из уравнения (1.1) тогда следует, что и скорость $v_\varphi = v_\varphi(r)$, если к тому же равна нулю другая компонента ускорения $dv_r/dt = 0$. Таким образом, установившийся закон вращения подтвержден в численном счете. Некоторое отклонение графиков с $z > 4$ на рис. 3 от этого правила связано с заметным ускорением в соответствующей области. На рис. 2 крестики обозначают среднее значение v_φ, снятое с рис. 3. В частности, сравнение крестиков с кривыми рис. 2 показывает, что радиальные пульсации развиваются только в центральном ядре облака с $z \lesssim 6$, тогда как эллипсоидальная медленно вращающаяся разреженная оболочка в них практически не участвует. Эти факты также будут использованы в данной ниже интерпретации пульсаций газового облака. Еще можно отметить, что в пульсирующей части облака закон вращения не очень сильно отличается от начального твердотельного закона, хотя средняя величина угловой скорости несколько возросла из-за возросшей плотности.

Как показало сравнение кинетической энергии $1/2\,(v_r^2 + v_z^2 + v_\varphi^2)$ с потенциальной энергией Φ, практически всегда и всюду соблюдается неравенство

$$|\Phi| > \frac{1}{2}\,(v_r^2 + v_z^2 + v_\varphi^2),$$

которое означает финитность траекторий газовых частиц. В частности такое сравнение было проведено для момента $t \simeq 4$, когда кинетические энергии достигают максимума (см. рис. 1). Поэтому отсутствие частиц с максимальными моментами количества движения $v_\varphi \cdot r$ на рис. 2, 3 связано не с уходом их на бесконечность, а либо с выходом за радиус $r = 10$, либо с неточностью счета вблизи поверхности облака.

На этом можно закончить обсуждение основных результатов численного счета.

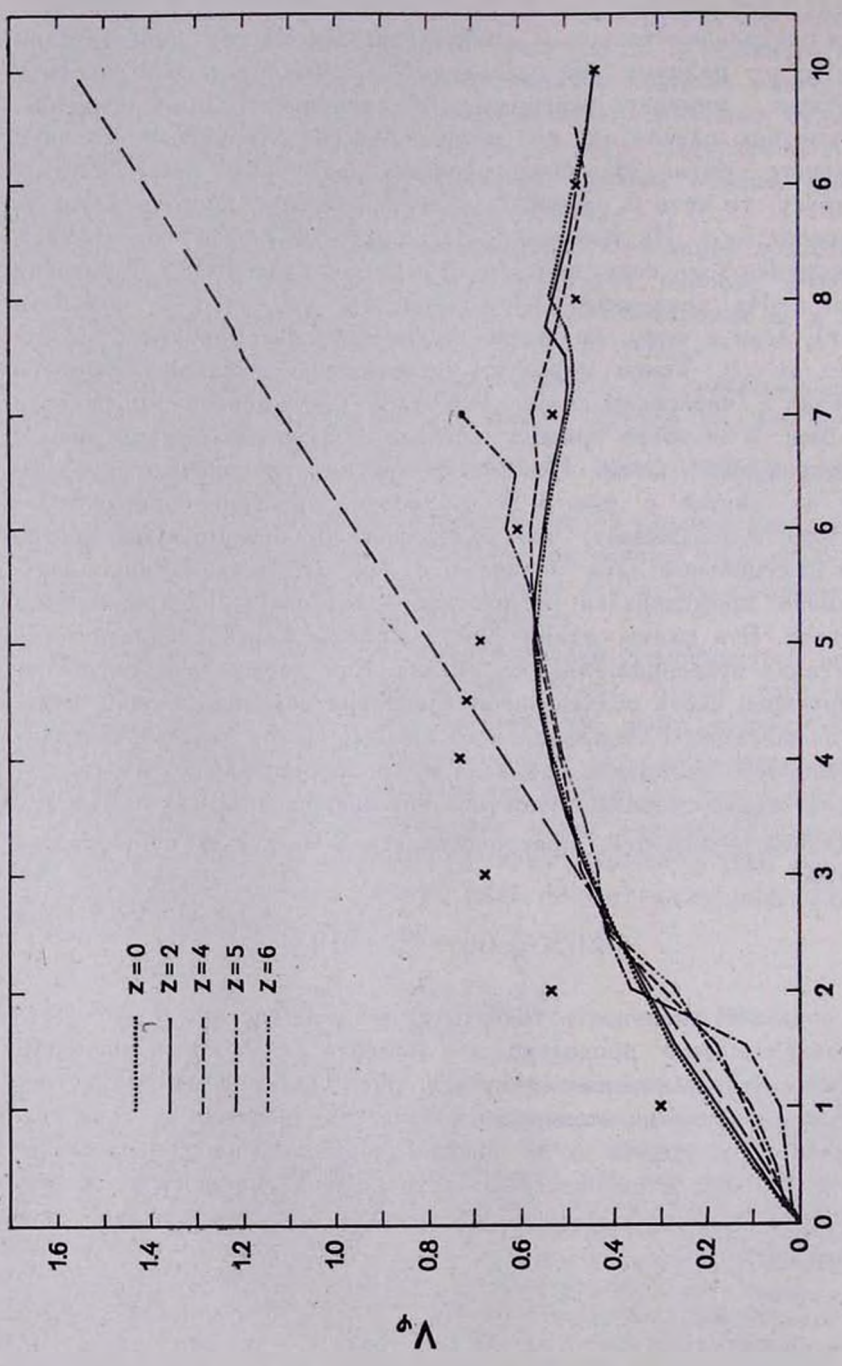

Рис. 2.

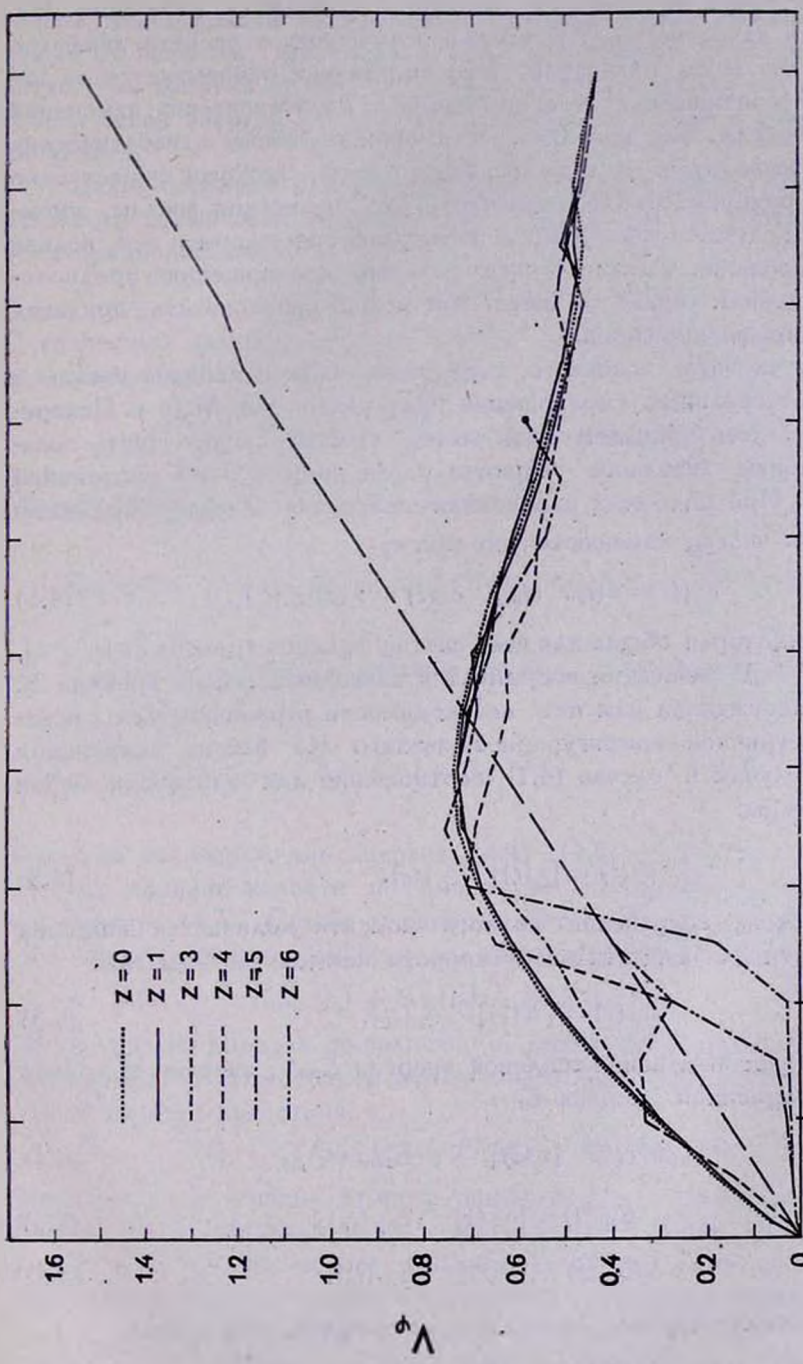

Рис. 3.

4. *О периоде радиальных пульсаций с учетом вращения.* Нетрудно дать качественное объяснение полученных в расчете данных о периоде радиальных пульсаций. Это объяснение основывается на интегральных соотношениях теории подобных адиабатических изменений состояния звезды. Как известно, в теории подобных адиабатических изменений выводится частота основного тона, которая существенно зависит от радиуса [5]. Это означает, что пульсации звезды, имеющей в нашем случае конфигурацию политропы с индексом $n = 3$, нельзя считать подобными. Однако, в интегральных соотношениях предположение о подобном характере изменений можно использовать, придавая ему смысл профилирования.

Вывод частоты основного тона радиальных пульсаций звезды с помощью интегральных соотношений был ранее дан Леду и Пекерисом [6]. Мы здесь приведем иной вывод этой величины. Пусть показатель адиабаты звездного вещества равен произвольной постоянной величине γ_0. При подобных изменениях состояния звезды координаты всех газовых частиц изменяются по закону

$$r'(t) = \alpha(t)\, r'(t_0), \quad z'(t) = \alpha(t)\, z'(t_0), \tag{4.1}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая общая для всех частиц функция времени $[\alpha(t_0)=1]$, а $r'(t_0)$ и $z'(t_0)$ — значения координат в начальный момент времени t_0. В данном рассуждении нам нет необходимости ограничиваться сферически симметричной конфигурацией звезды. Из закона сохранения массы мы получим в случае (4.1) соотношение для плотности любой газовой частицы:

$$\rho'(t) = [\alpha(t)]^{-3}\rho'(t_0). \tag{4.2}$$

Затем из закона сохранения полного момента количества движения можно вывести для азимутальной скорости каждой частицы газа:

$$v'_\varphi(t) = [\alpha(t)]^{-1} v'_\varphi(t_0). \tag{4.3}$$

Отсюда следуют изменения тепловой энергии $E_{\text{тепл}}$, энергии вращения $E_{\text{вр}}$ и гравитационной энергии $E_{\text{гр}}$:

$$E_{\text{тепл}}(t) = [\alpha(t)]^{3(1-\gamma_0)} \cdot E_{\text{тепл}}(t_0), \tag{4.4}$$

$$E_{\text{вр}}(t) = [\alpha(t)]^{-2} \cdot E_{\text{вр}}(t_0), \tag{4.5}$$

$$E_{\text{гр}}(t) = [\alpha(t)]^{-1} \cdot E_{\text{гр}}(t_0). \tag{4.6}$$

Закон сохранения энергии для пульсации вращающейся звезды

$$E_{\text{тепл}}(t) + E_{\text{вр}}(t) + E_{\text{гр}}(t) + E_{\text{кин}}(t) = E_0 + E_{\text{к}} \tag{4.7}$$

гласит, что в правой части стоит величина полной энергии, не зависящая от времени. При этом в (4.7) фигурирует дополнительно кинетическая энергия пульсаций $E_{\text{кин}}(t)$, равная в общем случае полной кинетической энергии за вычетом ее доли, связанной с азимутальным движением.

Далее перейдем к изучению малых гармонических колебаний радиального сферически симметричного характера. В соответствии с этим предположением

$$\varkappa(t) = 1 + a \sin \omega (t - t_0) \qquad a \ll 1. \tag{4.8}$$

С точностью до квадратичных членов легко определить выражение для радиальной скорости пульсаций:

$$v_r = \frac{dr(t)}{dt} \simeq \frac{\partial r(t)}{\partial t} = \dot{r}(t) = r'(t_0) \cdot \dot{\varkappa}(t). \tag{4.9}$$

Отсюда кинетическая энергия пульсаций

$$E_{\text{кин}}(t) \simeq \int_{(V)} \frac{\rho \dot{r}^2}{2} d\tau = \frac{1}{2} \dot{\varkappa}^2(t) \int_0^{R_0'} \rho'(t_0) [r'(t_0)]^2 d\tau_0 = \frac{1}{2} \dot{\varkappa}^2(t) I_0, \tag{4.10}$$

где I_0 является моментом инерции звезды, относительно ее центра

$$I_0 = 4\pi \int_0^{R_0'} \rho'(t_0) r^4 dr. \tag{4.11}$$

Разложим все выражения энергий (4.4)—(4.6) с точностью до членов третьего порядка малости по амплитуде колебаний a и подставим в соотношение (4.7). Сумма членов нулевого порядка по величине a дает закон сохранения энергии для непульсирующей звезды:

$$E_{\text{тепл}}(t_0) + E_{\text{гр}}(t_0) + E_{\text{вр}}(t_0) = E_0. \tag{4.12}$$

Члены первого порядка по величине a, пропорциональные $\sin \omega (t - t_0)$, должны быть в сумме равны нулю, иначе было бы нарушено условие стационарности пульсаций.

$$3(1 - \gamma_0) E_{\text{тепл}}(t_0) - E_{\text{гр}}(t_0) - 2E_{\text{вр}}(t_0) = 0. \tag{4.13}$$

Наконец, среди членов второго порядка по величине a есть один, $E_{\text{кин}}(t_0)$, пропорциональный $\cos^2 \omega (t - t_0)$, а все другие пропорциональны $\sin^2 \omega (t - t_0)$. На основе условия стационарности пульсаций мы составляем очевидное третье соотношение, учитывая также (4.10):

$$\frac{3(1 - \gamma_0)(2 - 3\gamma_0)}{2} E_{\text{тепл}}(t_0) + E_{\text{гр}}(t_0) + 3E_{\text{вр}}(t_0) = \frac{1}{2} \omega^2 I_0, \tag{4.14}$$

откуда можно найти квадрат частоты колебаний ω^2. При этом можно исключить $E_{\text{тепл}}(t_0)$ с помощью (4.13):

$$\omega^2 = (4-3\gamma_0)\frac{E_{\text{гр}}(t_0)}{I_0} + (5-3\gamma_0)\frac{2E_{\text{вр}}(t_0)}{I_0}. \qquad (4.15)$$

В таком виде формула (4.15) была раньше получена в работах Леду [6—8], который использовал для этой цели теорему вириала, принцип минимума и другие более общие и сложные соображения (см. также книгу Росселанда [9]). Отметим, что в данном выше выводе энергия пульсаций, пропорциональная a^2, помимо малости величины ничем не ограничена и равна $E_к$ из (4.7). Все полученные результаты не связаны с какими-нибудь предположениями о звездных моделях. В своих работах Леду сравнивал значения частоты основного тона ω из (4.15) с ее же значениями, полученными путем решения задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения адиабатических радиальных пульсаций, проделанного для ряда звездных моделей, конечно, без учета вращения. Это сравнение показало хорошее согласие, причем в соответствии с выводом из принципа минимума [6] приближенное значение частоты из (4.15) оказывается всегда несколько завышенным по отношению к своему точному значению.

Теперь применим полученные соотношения для интерпретации численных результатов. В случае $\gamma_0 = 4/3$ из (4.15) получим:

$$\omega^2 = \frac{2E_{\text{вр}}(t_0)}{I_0}. \qquad (4.16)$$

Для политропы с индексом $n = 3$, как известно,

$$I_0 = 0.113\, MR_0'^2. \qquad (4.17)$$

В безразмерных переменных (1.8) период пульсаций:

$$\tau_{\text{кол}}^{(T)} = \frac{2\pi}{\omega t_0} = 7.7\left(\frac{\rho_0}{\rho_ц}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{E_{\text{тепл}}(t_0)}{E_{\text{вр}}(t_0)}\right)^{1/2}. \qquad (4.18)$$

При выводе формулы (4.18) были использованы некоторые другие свойства политропы с $n=3$ и $\gamma_0 = 4/3$.

$$E_{\text{тепл}}(t_0) = \frac{3}{2}\frac{GM^2}{R_0'}, \qquad \bar{\rho} = \frac{\rho_ц}{54.2}. \qquad (4.19)$$

При определении отношения тепловой и вращательной энергий мы можем подставить их значения на рис. 1:

$$E_{\text{вр}}(t_0) = 0.75, \quad E_{\text{тепл}}(t_0) = 23.4.$$

Тогда из (4.18) имеем значение

$$\tau_{кол}^{(T)} = 43\left(\frac{\rho_0}{\rho_ц}\right)^{1/2}, \qquad (4.20)$$

куда еще входит безразмерная средняя плотность звезды в центре $\rho_ц/\rho_0$, равная в численном счете примерно 1.5. Тогда окончательно найдем из (4.20) теоретический период пульсаций:

$$\tau_{кол}^{(T)} = 35,$$

что находится в хорошем согласии с численным значением $\tau_{кол} = 41$, учитывая возможные отклонения структуры пульсирующей центральной части звезды от политропы с индексом $n = 3$.

В заключение отметим, что близкое совпадение периодов вращения и пульсации, отмеченное для рассмотренного случая $\gamma_0 = 4/3$ с быстрым вращением, вообще довольно характерно для любого значения показателя адиабаты γ_0, если вращение остается близким к предельному. К такому выводу можно придти на основе формулы (4.15), хотя, точнее говоря, период вращения становится все же больше периода пульсаций в несколько раз.

В заключение выражаем благодарность Д. К. Надёжину за полезные обсуждения результатов расчетов и Г. В. Рубену за сделанные замечания.

Институт прикладной математики
АН СССР

ROTATION AND PULSATIONS OF A GRAVITATING GASEOUS CLOUD

V. F. DYACHENKO, Y. B. ZELDOVICH, V. S. IMSHENNIK, V. V. PALAYCHIK

In the present paper a model of a rotating star with a constant adiabatic index equal to the critical value of 4/3 is considered. By means of the numerical method the problem of axially symmetrical adiabatic movement of stellar substance at comparatively small initial disturbance of hydrostatical equilibrium has been solved. It has been shown that if the entire energy is negative, a stable equilibrium state arises around which pulsations of almost of radial type take place. The frequency of these pulsations is well explained by the linear theory of adiabatic pulsation of stars. In the emerging equilibrium state the law of rotation is essentially different from the solid body law. The angular velocity practically depends only on the distance from the axis of ro-

tation and decreases towards the surface. The formation of a rarified ellipsoidal envelope surrounding a very dense spherically symetrical nucleus takes place. The model may be useful for the theory of late stages of stellar evolution when the adiabatic index approaches the value of 4/3 and conditions of gravitational collapse are created.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Имшенник, Д. К. Надежин*, Астрон. ж., 42, 1154, 1965.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Стат. физика, Гостехиздат, М., 1951.
3. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, Наука, М., 1967.
4. *W. Fowler*, Ap. J., 144, p. 180, 1966.
5. *Д. А. Франк-Каменецкий*, Физические процессы внутри звезд., Физматгиз, М., 1959.
6. *P. Ledoux, C. L. Pekeris*, Ap. J., 94. p. 124, 1941.
7. *P. Ledoux*, Ap. J., 102, p. 143, 1945.
8. *P. Ledoux*, „Stars and Stellar Systems", Stellar Structure, B VIII, The Univ. of Chicago Press, p. 499, 1965.
9. *С. Росселанд*, Теория пульсации переменных звезд, ОИЛ., М., 1952.