АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 4 ФЕВРАЛЬ, 1968 ВЫПУСК 1

К ПРОБЛЕМЕ МИЛНА В ТЕОРИИ ОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

В. В. ИВАНОВ

Поступила 20 октября 1967

Рассматривается проблема Милна для случая рассеяния с полным перераспределением по частотам. Изучено асимптотическое поведение соответствующей функции источников в глубоких слоях.

1. Проблема Милна состоит в расчете светового режима в полупространстве, не освещаемом извне и содержащем источники только в бесконечно глубоких слоях. При изотропном консервативном рассеянии без изменения частоты она сводится к решению интегрального уравнения

$$S(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^\infty E_1(|\tau-\tau'|)\,S(\tau')\,d\tau', \tag{1}$$

где

$$E_n(\tau)=\int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}}\zeta^{n-2}d\zeta. \qquad (n=1,\ 2,\cdots). \tag{2}$$

Э. Хопф [1] показал, что решение (1), нормированное таким образом, что $S(0)=1$, имеет вид

$$S(\tau)=\sqrt{3}\,[\tau+q(\tau)], \tag{3}$$

где $q(\tau)$ монотонно возрастает от $q(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577$ до $q(\infty)=$ $=0.710$. Явное выражение для $q(\tau)$ найдено К. Марком [2]. Проблема Милна подробно исследована и для анизотропного рассеяния без изменения частоты [3—5]. В настоящей заметке она рассматривается для случая рассеяния излучения в частотах спектральной линии, происходящего с полным перераспределением по частотам. Соответствующая функция источников $S(\tau)$ есть решение уравнения [6—8]

$$S(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty K(|\tau-\tau'|)\, S(\tau')\, d\tau', \tag{4}$$

где

$$K(\tau) = A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x)\, E_1[\tau\,\alpha(x)]\, dx, \tag{5}$$

$\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения, A — нормировочная постоянная

$$A\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx = 1. \tag{6}$$

Асимптотическое поведение $S(\tau)$ при $\tau\to\infty$ для коэффициентов поглощения важнейших частных видов было изучено автором [9], Дж. Стюартом [8] и Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [10]. Явное выражение для $S(\tau)$, из которого асимптотики следуют в качестве предельного случая, получено Д. И. Нагирнером [11].

Таким образом, проблему Милна для рассеяния с полным перераспределением по частотам можно считать решенной. Исследование асимптотического поведения $S(\tau)$ при $\tau\to\infty$, которому посвящена эта заметка, представляет поэтому чисто методический интерес. Оправданием публикации служит простота приводимого доказательства и удобство той новой формы, в которой компактно записываются многие полученные ранее результаты.

2. Рассмотрим вначале функцию $K(\tau)$. Пусть $\alpha(x)$ — монотонно убывающая функция $|x|$. Подставляя (2) в (5) и меняя порядок интегрирования, находим, что

$$K(\tau) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}}\, G(z)\, \frac{dz}{z}, \tag{7}$$

где

$$G(z) = 2A\int_{x(z)}^{\infty} \alpha^2(t)\, dt, \tag{8}$$

$x(z)$ — неотрицательная функция, такая, что $x(z)=0$ при $z<1$ и

$$\alpha[x(z)]=\frac{1}{z} \quad \text{при } z\geqslant 1. \tag{9}$$

Предположим, что предел

$$f(y)=\lim_{z\to\infty}\frac{x'\left(\frac{z}{y}\right)}{x'(z)}=y\lim_{z\to\infty}\frac{x\left(\frac{z}{y}\right)}{x(z)} \tag{10}$$

существует и равен

$$f(y)=y^{2\gamma}, \tag{11}$$

причем $0<\gamma\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда при $z\to\infty$

$$G(z)\sim\frac{2A}{2\gamma+1}\frac{x'(z)}{z}. \tag{12}$$

Действительно, полагая в (8) $\alpha(t)=\frac{1}{zy}$, при $z\geqslant 1$ имеем

$$G(z)=2A\int_1^\infty x'(zy)\frac{dy}{y^2}\frac{1}{z}, \tag{13}$$

откуда

$$G(z)=2A\int_1^\infty\frac{x'(zy)}{x'(z)}\frac{dy}{y^2}\frac{x'(z)}{z}\sim$$
$$\sim 2A\int_1^\infty f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{y^2}\frac{x'(z)}{z}=\frac{2A}{2\gamma+1}\frac{x'(z)}{z}. \tag{14}$$

Пользуясь (12), из (7) таким же образом находим, что при $\tau\to\infty$

$$K(\tau)\sim 2A\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{2\gamma+1}\frac{x'(\tau)}{\tau}, \tag{15}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

В последующем обсуждении встречается функция

$$L(\tau)\equiv A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)E_2[\tau\alpha(x)]\,dx=\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}}G(z)\,dz, \tag{16}$$

связанная с $K(\tau)$ соотношением

$$L(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}K(\tau')\,d\tau'. \tag{17}$$

Легко показать, что

$$L(\tau)\sim 2A\frac{\Gamma(2\gamma)}{2\gamma+1}\,x'(\tau)\sim\Gamma(2\gamma)\,\tau G(\tau). \tag{18}$$

Условие (11) выполняется во всех случаях, представляющих практический интерес. Так, при допплеровском коэффициенте поглощения $\alpha_D(x)=\exp(-x^2)$ имеем $x(z)=\sqrt{\ln z}$ при $z\gg 1$, и поэтому $\gamma=\frac{1}{2}$.

Для профилей, убывающих в крыльях по степенному закону:

$$\alpha(x)\sim W|x|^{-\varkappa},\quad (|x|\to\infty) \tag{19}$$

где W и $\varkappa$ — некоторые постоянные $(1<\varkappa<\infty)$, имеем

$$\gamma=\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}. \tag{20}$$

3. Положим

$$H(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{z}}S(\tau)\frac{d\tau}{z}, \tag{21}$$

где $S(\tau)$ — решение (4), нормированное так, что $S(0)=1$. Функция $H(z)$, как известно, удовлетворяет уравнению

$$H(z)=1+\frac{1}{2}zH(z)\int_{0}^{\infty}\frac{H(z')}{z+z'}G(z')\,dz', \tag{22}$$

которое можно записать также в виде

$$\frac{1}{2}H(z)\int_{0}^{\infty}\frac{z'H(z')}{z+z'}G(z')\,dz'=1. \tag{23}$$

Найдем асимптотику $H(z)$ при $z\to\infty$. Положим в (23) $z'=zy$. Умножая и деля левую часть этого уравнения на $H(z)\,G(z)$, получаем

$$\frac{1}{2}H^2(z)\,z\,G(z)\int_{0}^{\infty}\frac{H(zy)\,G(zy)}{H(z)\,G(z)}\,\frac{y\,dy}{1+y}=1. \tag{24}$$

Обозначим через $f_{\text{Н}}(y)$ (пока неизвестный) предел

$$f_{\text{Н}}(y) = \lim_{z\to\infty} \frac{H(zy)\,G(zy)}{H(z)\,G(z)}. \tag{25}$$

Из (24) следует, что при $z \to \infty$

$$H(z) \sim \frac{C_{\text{Н}}}{\sqrt{zG(z)}}, \tag{26}$$

где

$$C_{\text{Н}} = \left[\frac{1}{2}\int_0^\infty f_{\text{Н}}(y)\frac{y\,dy}{1+y}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (25) и учитывая (12) и (11), находим, что

$$f_{\text{Н}}(y) = \frac{1}{y}\sqrt{f\left(\frac{1}{y}\right)} = y^{-(1+\gamma)}. \tag{28}$$

Теперь (27) дает

$$C_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\sin\pi\gamma}. \tag{29}$$

Формулы (26), (12) и (29) дают главный член асимптотического разложения $H(z)$ при $z \to \infty$. Найденные ранее [6, 9] асимптотики, соответствующие допплеровскому, лоренцовскому и фойгтовскому профилям, являются частными случаями (26). Выражение, по существу совпадающее с (26), но записанное в иной форме, получено Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [10] другим, более сложным способом. Прием, использованный выше для получения асимптотических выражений $K(\tau)$ и $L(\tau)$ при $\tau \to \infty$, заимствован нами из работ этих авторов [10, 12], в которых впервые было указано на важную роль функции $x(z)$ при изучении асимптотического режима.

4. Теперь легко найти асимптотику $S(\tau)$ при $\tau \to \infty$. Перепишем (21) в виде

$$H(z) = \int_0^\infty e^{-y}\,\frac{S(yz)}{S(z)}\,dy \cdot S(z). \tag{30}$$

При $\tau \gg 1$ имеем отсюда

$$H(\tau) \sim S(\tau)\int_0^\infty e^{-y} f_{\text{S}}(y)\,dy, \tag{31}$$

где

$$f_S(y) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{S(\tau y)}{S(\tau)}. \tag{32}$$

Подставляя S из (31) в (32) и учитывая (26) и (12), получаем

$$f_S(y) = y^{\gamma}. \tag{33}$$

Из (31) имеем теперь

$$S(\tau) \sim \frac{C_S}{\sqrt{\tau G(\tau)}}, \qquad (\tau\to\infty) \tag{34}$$

где

$$C_S = \frac{1}{\gamma\Gamma(\gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi}\sin\pi\gamma}. \tag{35}$$

Рассмотрим важнейшие частные случаи. При допплеровском коэффициенте поглощения $x(z) = \sqrt{\ln z}$ и $\gamma = \frac{1}{2}$, так что согласно (12) и (34)

$$S_D(\tau) \sim 4\pi^{-3/4}\tau^{1/2}(\ln\tau)^{1/4}. \tag{36}$$

Для профилей вида (19) формула (34) принимает вид

$$S(\tau) \sim \frac{1}{\gamma\Gamma(\gamma)}\left[\frac{W^{2\gamma-1}}{\pi A}\,\frac{1+2\gamma}{1-2\gamma}\sin\pi\gamma\right]^{1/2}\tau^{\gamma}. \tag{37}$$

В частности, лоренцовскому коэффициенту поглощения

$$\alpha_L(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{38}$$

соответствует $\gamma = \frac{1}{4}$, $W = 1$, и поэтому

$$S_L(\tau) \sim 4\left(\frac{9}{2}\right)^{1/4}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\tau^{1/4}. \tag{39}$$

Соотношения (36) и (39) были получены ранее автором [9]. Формула (37) с точностью до обозначений совпадает с выражением, найденным Дж. Стюартом [8]. Наконец, формула (34) лишь по форме отличается от асимптотики, приводимой Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [10]. При ее выводе они исходили из явного выражения для $S(\tau)$, которое было найдено ими методом Винера-Хопфа.

5. Асимптотику $S(\tau)$ можно представить в другой форме, имеющей некоторые преимущества перед (34). Из сравнения (34) и (18) следует, что

$$S(\tau) \sim \frac{C}{\sqrt{L(\tau)}}, \qquad (\tau \to \infty) \tag{40}$$

где

$$C = \frac{1}{\gamma \Gamma(\gamma)} \left| \Gamma(2\gamma) \frac{2}{\pi} \sin \pi\gamma \right|^{1/2}. \tag{41}$$

Коэффициент C во всех случаях близок к единице, монотонно убывая с ростом γ от 1 при $\gamma = 0$ до $2^{1/2}\pi^{-1} = 0.900$ при $\gamma = \frac{1}{2}$.

Положим (строгое равенство!)

$$S(\tau) = \frac{C}{\sqrt{L(\tau)}} \xi(\tau), \tag{42}$$

где $\xi(\tau)$ — поправочный множитель к асимптотике (40), стремящийся к единице при $\tau \to \infty$. Из (42) имеем $\xi(0) = C^{-1}$, так как согласно (16) $L(0) = 1$. Таким образом, $\xi(\tau)$ близко к единице как при малых, так и при больших τ. Оказывается, что $\xi(\tau)$ не сильно отличается от единицы при всех τ. Для получения *оценки* $S(\tau)$ можно поэтому пользоваться простой приближенной формулой

$$S(\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{L(\tau)}}, \tag{43}$$

получающейся из (42) при пренебрежении отличием C и $\xi(\tau)$ от единицы. При допплеровском коэффициенте поглощения максимальная погрешность этой приближенной формулы составляет несколько десятков процентов.

6. В случае допплеровского профиля легко получить не только главный, но и несколько следующих членов асимптотических рядов. Из (8) при $\alpha_D(x) = \exp(-x^2)$ имеем

$$G_D(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, z^2 \sqrt{\ln z}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{2^{2j}} (\ln z)^{-j}. \qquad (z \to \infty) \tag{44}$$

Будем искать $H_D(z)$ при $z \to \infty$ в виде

$$H_D(z) \sim 2\pi^{-1/4} z^{1/2} (\ln z)^{1/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j}{(\ln z)^j}. \tag{45}$$

Подставляя (44) и (45) в (23), вычисляя получающиеся интегралы и приравнивая нулю коэффициенты при $(\ln z)^{-1}$, $(\ln z)^{-2}$ и т. д., последовательно находим $h_1, h_2, \cdots$ (из (26) и (45) следует, что $h_0 = 1$). Оказывается, что

$$H_D(z) \sim 2\pi^{-1/4} z^{1/2} (\ln z)^{1/4} \left[1 + \frac{1}{8} \frac{1}{\ln z} - \frac{10\pi^2 + 9}{128} \frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots \right]. \quad (46)$$

Ищем $S_D(\tau)$ при $\tau \gg 1$ в виде

$$S_D(\tau) \sim 4\pi^{-3/4} \tau^{1/2} (\ln \tau)^{1/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{(\ln \tau)^j}. \quad (47)$$

Подставляя (45) и (47) в (21), получаем возможность выразить s_j через h_i $(i \leqslant j)$. Таким путем находим, что

$$s_0 = 1,$$

$$s_1 = \frac{2\gamma + 4\ln 2 - 3}{8} = 0.11588,$$

$$s_2 = -\frac{4\pi^2 + 12(\gamma + 2\ln 2)^2 - 36(\gamma + 2\ln 2) + 81}{128} = -0.75044.$$

Здесь $\gamma = 0.577216$ — постоянная Эйлера. Формула (46) и коэффициенты разложения (47) до s_2 включительно были найдены Д. И. Нагирнером [13] другим, более сложным способом.

Автор признателен Ю. Ю. Абрамову, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичу, предоставившим возможность ознакомиться с работой [10] до ее опубликования.

Ленинградский государственный университет

ON THE MILNE PROBLEM IN THE THEORY OF LINE FORMATION

V. V. IVANOV

The Milne problem is considered for the case of scattering with the complete redistribution in frequency. The asymptotic behaviour of the corresponding source function in the deep layers is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Hopf*, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, 1934.
2. *C. Mark*, Phys. Rev., 72, 558, 1947.
3. *I. Kuščer*, J. Math. Phys., 34, 256, 1956.
4. *М. В. Масленников*, ДАН СССР, 118, 895, 1958.
5. *М. В. Масленников*, ДАН СССР, 168, 1001, 1966.
6. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.
7. *В. В. Иванов*, Уч. Зап. ЛГУ, № 328, 44, 1965.
8. *D. G. Hummer, J. C. Stewart*, Ap. J., 146, 290, 1966.
9. *В. В. Иванов*, Уч. Зап. ЛГУ, № 307, 52, 1962.
10. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, Астрофизика, 3, 459, 1967.
11. *Д. И. Нагирнер*, Вестн. ЛГУ, № 1, 142, 1964.
12. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, ЖЭТФ, 52, 536, 1967.
13. *Д. И. Нагирнер*, Многократное рассеяние излучения в спектральной линии, Кандидатская диссертация, Ленинградский Университет, 1966.