

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Ю. АБРАМОВ, А. М. ДЫХНЕ, А. П. НАПАРТОВИЧ

Поступила 16 декабря 1966

Исправлена 30 мая 1967

К решению задачи о переносе резонансного излучения в приближении полного перемешивания по частотам применяется метод Винера-Хопфа.

Учитываются нерезонансные процессы: поглощение фотонов и тушение возбужденных атомов. Предлагаемый метод позволяет единообразно получить известные и ряд новых результатов. В явном виде получены асимптотические выражения для плотности возбужденных атомов при произвольной форме линии. Обсуждается влияние перераспределения по частотам на поведение решений. Где это возможно, дается физическая трактовка получающихся результатов.

Введение. Решение уравнений переноса с учетом пространственной и временной неоднородности представляет собой весьма сложную задачу. Поэтому для получения каких-либо обозримых результатов приходится пользоваться теми или иными приближениями.

Даже при рассмотрении стационарных задач обычно вводятся различные модели среды [1], например, предполагается, что среда однородна и имеет лишь 2 границы раздела с вакуумом (плоский слой). При этом результат, как правило, определяется поведением функций вблизи границы [1—3]. Ясно, что при достаточно толстых слоях можно ограничиться вообще рассмотрением полупространства (одна граница раздела). Однако и в этом случае задача отыскания точных решений сталкивается с рядом трудностей. Если предполагать, что рассеивающие центры неподвижны, а рассеяние упругое, то уравнение переноса сводится к интегральному уравнению с разностным ядром (уравнение Милна). При рассмотрении задачи о диффузии резонансного излучения такое уравнение можно получить в предположении, что частота света сохраняется в каждом акте рассеяния (коге-

рентное рассеяние). При этом оказывается, что вдали от границы раздела справедливо диффузионное приближение. Однако предположение о полной когерентности рассеяния может выполняться лишь в том случае, если атомы среды неподвижны, а линия обладает только естественной шириной. Поскольку на практике такие условия обычно не реализуются, можно сделать противоположное предположение, что рассеяние является полностью некогерентным, то есть вероятность испускания атомом кванта определенной частоты не зависит от частоты поглощенного кванта.

Биберман [4] и Холстейн [5] показали впервые, что при некогерентном рассеянии света диффузионное приближение неприменимо, так как при этом нельзя ввести понятие средней длины свободного пробега. Упомянутыми авторами уравнения переноса для случая полностью некогерентного рассеяния (который и будет всюду ниже рассматриваться) были сведены к интегральным уравнениям для концентрации возбужденных атомов. Зная последнюю, легко вычислить интенсивность излучения в любой точке пространства.

В дальнейшем уравнение переноса рассматривалось во многих работах [2, 3, 6—12].

В последнее время теория переноса излучения в линии была значительно продвинута в работах Иванова [2, 3, 6, 9, 10, 13].

В частности, им был указан способ нахождения резольвенты интегрального уравнения для среды бесконечно большой оптической толщины, а также рассмотрена задача о свечении среды, когда источники на конечном расстоянии отсутствуют (проблема Милна). Для гауссовой формы линии был произведен ряд численных расчетов, имеющих практическую ценность в астрофизике. В качестве нерезонансного процесса вводилось тушение возбужденных атомов.

В настоящей работе рассматривается задача о стационарном переносе резонансного излучения в полупространстве.

Для решения уравнения используется метод Винера-Хопфа. Ряд результатов, полученных ранее Соболевым [1] и Ивановым [2, 3, 6, 9, 10, 13], выводится единообразно с помощью преобразования Лапласа. Предлагаемый способ позволяет учесть поглощение в сплошном спектре. Наряду с общими асимптотиками для плотности возбужденных атомов — $n(x)$ удастся найти выражения для плотности выходящего излучения $J_\nu(0, \mu)$ на частотах, далеких от резонансной. Приводится удобное интегральное представление для основной функции, обычно используемой в расчетах.

1. *Постановка задачи. Уравнения.* Следуя [1, 4], мы ограничимся рассмотрением среды, состоящей из двухуровневых атомов,

которые поглощают и высвечивают свет резонансным образом. Очевидно, что при частотах, близких к резонансной, можно пренебречь различными нерезонансными процессами из-за относительной малости их сечения.

Естественно ожидать, что нерезонансные процессы, приводя к конечности длины пробега фотонов с частотами вдали от резонансной, не изменяют существенно спектрального распределения в центре линии и числа возбужденных атомов на не слишком больших расстояниях от границы раздела.

В этом смысле решение вблизи центра линии будет универсальным (не зависящим от типа преобладающих нерезонансных процессов).

Для того, чтобы проследить влияние нерезонансных процессов на ход решения в средней области частот и расстояний, рассмотрим постоянноε поглощение примесями, однородно вкрапленными в среду, и тушение возбужденных атомов с постоянным сечением σ . Считаем сечение поглощения $\varepsilon \ll k_v$ — коэффициента резонансного поглощения фотонов в центре линии.

Выбор этих процессов вызван тем, что модель по-прежнему допускает точное решение.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$, и $\sigma = 0$ естественной единицей измерения расстояния является длина свободного пробега в центре линии. Если ε отлично от нуля, то характерным расстоянием является также длина пробега фотона, обусловленная поглощением примесью (в данном случае ε^{-1}). Естественно ожидать, что влияние нерезонансных процессов будет мало сказываться при частотах, когда $k_v \gg \varepsilon$, и на расстояниях от границы $x \ll \varepsilon^{-1}$. При этом асимптотика решения при $x \gg 1$ будет существенно различной в областях $x \ll \varepsilon^{-1}$ и $x \gg \varepsilon^{-1}$.

В случае, когда $\sigma \neq 0$ вопрос несколько сложнее, так как величина σ является сечением тушения возбужденных атомов, концентрация которых определяется плотностью излучения в данной точке. Изменение с расстоянием плотности излучения существенно зависит от конкретного вида коэффициента поглощения, поэтому при разных видах функции k_v , области изменения координаты, в которых справедливы различные асимптотики, будут несколько меняться [12].

Области применимости асимптотик должны зависеть от скорости стремления k_v к нулю при $|\nu - \nu_0| \rightarrow \infty$. При более резком убывании функции k_v влияние σ будет сказываться раньше.

Для удобства всюду в дальнейшем мы будем предполагать все величины выраженными в безразмерных единицах. Расстояние при этом следует измерять в длинах пробега в центре линии. Коэффициент поглощения в центре линии принят равным единице, частота измеряется в ширинах линии и отсчитывается от резонансной частоты ν_0 . Коэф-

коэффициент поглощения пропорционален коэффициенту излучения, поэтому можно положить их равными друг другу. При этом оказывается безразмерной также фазовая плотность излучения $J_\nu(x, \mu)$. Уравнение переноса излучения имеет вид [1]:

$$\mu \frac{\partial J_\nu}{\partial x} = -k_\nu J_\nu(x, \mu) + \frac{k_\nu}{4\pi} n - \varepsilon J_\nu(x, \mu) + \frac{f_\nu(x, \mu)}{4\pi}, \quad (1)$$

где $\arcs \cos \mu$ есть угол между направлением распространения излучения в данной точке и осью x , k_ν — коэффициент поглощения, n — концентрация атомов в возбужденном состоянии, измеряемая в относительных единицах, $f_\nu(x, \mu)$ — функция, учитывающая излучение посторонних источников.

Плотность возбужденных атомов определяется уравнением:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} k_\nu d\nu \int_{-1}^1 J_\nu(x, \mu) d\mu - n \left(\int_{-\infty}^{\infty} k_\nu d\nu + \sigma \right) = 0 \quad (2)$$

(σ — сечение тушения). Предполагается, что температура не зависит от координаты. Кроме того, так как скорость движения атомов $v \ll c$, в уравнение (2) не вошел член, пропорциональный $\text{grad } n$.

Система (1)–(2) позволяет легко получить одно интегральное уравнение для плотности возбужденных атомов, которое имеет вид [1]:

$$n(x) = \int_0^{\infty} K(x-t) n(t) dt + F(x), \quad (3)$$

где

$$K(x-t) = \frac{1}{2(\bar{k} + \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu k_\nu^2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{-(k_\nu + \varepsilon)}{\mu}(x-t)}}{\mu} d\mu, \quad \bar{k} = \int_{-\infty}^{\infty} k_\nu d\nu. \quad (4)$$

Аналогичным образом функция $F(x)$ выражается через интегралы от мощности источников $f_\nu(x, \mu)$; соответствующего выражения мы не приводим из-за некоторой его громоздкости.

2. *Решение основных уравнений.* Для резольвенты интегрального уравнения (3) имеем:

$$\Gamma(x, x') = \int_0^{\infty} K(x-t) \Gamma(t, x') dt + K(x-x'). \quad (5)$$

Так как ядро уравнения симметрично, то

$$\Gamma(x, x') = \Gamma(x', x).$$

Отметим, что уравнение для резольвенты совпадает с уравнением для концентрации возбужденных атомов в случае, когда в точке x' находится „стандартный“ источник фотонов, при этом

$$f(x, \mu) = k, \delta(x - x') \text{ и } F(x) = K(x - x'). \quad (6)$$

Используя свойства интегрального оператора K , нетрудно получить [14]:

$$\Gamma(x, x') = \Gamma(0, |x - x'|) + \int_0^{\min(x, x')} \Gamma(0, x - u) \Gamma(0, x' - u) du. \quad (7)$$

Таким образом, для решения уравнения (5) достаточно найти функцию $\Gamma(0, x)$. Согласно (5)

$$\Gamma(0, x) = \int_0^x K(x - t) \Gamma(0, t) dt + K(x). \quad (8)$$

Уравнение (8) можно решить, применяя метод Винера-Хопфа. Для наших целей удобно воспользоваться двухсторонним преобразованием Лапласа.

Применяя обычные обозначения,

$$f^+(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx, \quad f^-(p) = \int_{-\infty}^0 e^{-px} f(x) dx,$$

и доопределяя функцию $\Gamma(0, x)$ при $x < 0$ соотношением

$$\Gamma(0, x) = \int_0^{\infty} K(x - t) \Gamma(0, t) dt + K(x), \quad x < 0,$$

получим из (8):

$$\Gamma^+(p) + \Gamma^-(p) = K(p) \Gamma^+(p) + K(p).$$

Нетрудно убедиться, что „плюсовые“ функции в последнем уравнении аналитичны в полуплоскости $\text{Re } p > 0$, а „минусовые“ — в полуплоскости $\text{Re } p < \varepsilon$.

Обозначив $G(p) \equiv 1 - K(p)$, представим ее в виде:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}$$

причем,

$$\ln G^+(p) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{\ln G(z) dz}{z-p}, \quad \operatorname{Re} p > -\gamma. \quad (9)$$

Интеграл в (9) берется вдоль прямой, лежащей в области аналитичности функции $G(p)$, и при $\operatorname{Re} p > -\gamma$ определяет функцию, аналитичную в правой полуплоскости. Так как γ может быть как угодно близко к ε , то функция (9) будет аналитична в области $\operatorname{Re} p > -\varepsilon$.

При $\operatorname{Re} p < -\varepsilon$ будем понимать под $G^+(p)$ функцию, получающуюся как аналитическое продолжение функции $G^+(p)$, определенной при $\operatorname{Re} p > -\varepsilon$.

Аналогично определяется функция $G^-(p)$, аналитичная в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \varepsilon$.

$$\ln G^-(p) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\ln G(z) dz}{z-p}, \quad \operatorname{Re} p < \gamma. \quad (10)$$

Формулами (9), (10) можно пользоваться, если функция $G(p)$ не обращается в нуль в полосе аналитичности $-\varepsilon < p < \varepsilon$.

Докажем, что при ε и σ отличных от нуля $G(p) \neq 0$ во всей плоскости комплексного переменного. Следуя [1], приведем формулу (4) к более удобному виду с помощью замены $u = \frac{k + \varepsilon}{\mu}$ и перестановки порядка интегрирования. При этом получим:

$$K(x) = \frac{1}{k + \sigma} \int_0^{\infty} Q(u) e^{-(u+\varepsilon)|x|} du, \quad (11)$$

где

$$Q(u) = \frac{1}{u + \varepsilon} \int_{\nu(u)}^{\infty} k^2 dv, \quad (12)$$

а функция $\nu(u)$ определяется следующим образом:

$$k, = u \text{ при } u \leq 1 \text{ и } \nu(u) = 0 \text{ при } u \geq 1. \quad (13)$$

Следовательно, образ Лапласа ядра имеет вид:

$$K(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} K(x) dx = \frac{2}{k + \sigma} \int_0^{\infty} \frac{(\varepsilon + u) Q(u) du}{(\varepsilon + u)^2 - p^2}, \quad (14)$$

откуда непосредственно следует, что функция $K(p)$ аналитична в

плоскости с разрезами по вещественной оси при $|\operatorname{Re} p| > \varepsilon$. При $\varepsilon = 0$ разрез проходит по всей вещественной оси и формула (14) определяет две функции, аналитичные в неперекрывающихся областях.

Поскольку $G(p) \equiv 1 - K(p)$, для доказательства того, что $G(p) \neq 0$, необходимо убедиться, что уравнение $K(p) = 1$ не имеет решения. Из (14) следует, что $K(p)$ вещественно лишь при мнимых p и на отрезке вещественной оси от $-\varepsilon$ до ε , причем везде в этой области $K(p) < K(\varepsilon)$.

При этом

$$K(\varepsilon) = \frac{1}{\bar{k} + \sigma} \left[\int_0^{\infty} \frac{Q(u) du}{u} + \int_0^{\infty} \frac{Q(u) du}{u + 2\varepsilon} \right].$$

Отсюда видно, что $K(\varepsilon)$ убывает с ростом ε . При $\varepsilon = 0$ интегралы легко берутся и мы получаем:

$$K(0) = \frac{\bar{k}}{\bar{k} + \sigma} < 1,$$

что доказывает наше утверждение.

Как видно из доказательства, случай $\varepsilon = 0$ является особым. Мы будем исследовать его, устремляя ε к нулю в конечных формулах.

Интегральное уравнение для функции $\Gamma(0, x)$, записанное в образах Лапласа, имеет вид:

$$\Gamma^+(p) \frac{G^+(p)}{G^-(p)} + \Gamma^-(p) = 1 - \frac{G^+(p)}{G^-(p)}$$

или

$$\Gamma^+(p) G^+(p) + G^+(p) = -\Gamma^-(p) G^-(p) + G^-(p). \quad (15)$$

В левой стороне равенства стоят функции, аналитичные в области $\operatorname{Re} p > 0$, а в правой — в области $\operatorname{Re} p < \varepsilon$.

Таким образом, выражение (15) может быть лишь полиномом от p , но так как $\Gamma^+(p) \rightarrow 0$, $G^+(p) \rightarrow 1$, то этот полином тождественно равен единице. Отсюда находим:

$$\Gamma^+(p) = \frac{1}{G^+(p)} - 1, \quad (16)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} e^{px} \Gamma^+(p) dp = \begin{cases} \Gamma(0, x) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (17)$$

δ — произвольная положительная константа.

Преобразуем выражение (9), определяющее функцию $G^+(p)$, деформируя контур интегрирования к разрезам в левой полуплоскости. Интеграл по большим окружностям при этом исчезает, так как $G(p) \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$, и мы получаем

$$\ln G^+(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln G(z - i\delta) - \ln G(z + i\delta)}{z + p} dz, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (18)$$

Согласно (14)

$$\begin{aligned} G(z - i\delta) &= 1 - \frac{1}{\bar{k} + \sigma} \int_0^\infty \left[\frac{Q(u)}{\varepsilon + u - z + i\delta} + \frac{Q(u)}{\varepsilon + u + z - i\delta} \right] du = \\ &= 1 - \frac{2}{\bar{k} + \sigma} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon + u) Q(u) du}{(\varepsilon + u)^2 - z^2} + \frac{i\pi Q(z - \varepsilon)}{\bar{k} + \sigma} \end{aligned}$$

и аналогично

$$G(z + i\delta) = 1 - \frac{2}{\bar{k} + \sigma} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon + u) Q(u) du}{(\varepsilon + u)^2 - z^2} - \frac{i\pi Q(z - \varepsilon)}{\bar{k} + \sigma}.$$

Подставим это в (18) и воспользуемся тем, что

$$\ln \frac{1 + iz}{1 - iz} = 2i \operatorname{arc} \operatorname{tg} z.$$

Тогда

$$\ln G^+(p) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi Q(z)}{(\bar{k} + \sigma) \Phi(z)}}{\varepsilon + z + p} dz, \quad (19)$$

где

$$\Phi(z) = 1 - \frac{2}{\bar{k} + \sigma} \int_0^\infty \frac{(\varepsilon + u) Q(u) du}{(\varepsilon + u)^2 - (z + \varepsilon)^2}. \quad (20)$$

Преобразуя таким же образом интеграл в (17), определяющий $\Gamma(0, x)$ при $x > 0$, получим аналогично [7]

$$\Gamma(0, x) = \int_0^\infty \frac{e^{-sx - px} Q(p) G^+(p + \varepsilon)}{\Phi^2(p) + Q^2(p)} dp. \quad (21)$$

Удобством полученного нами выражения (19) для функции $G^+(p)$ является то, что при одновременном вычислении интенсивности излучения и концентрации атомов приходится пользоваться одними и теми же функциями.

3. *Частные случаи. Связь с другими методами.* С нахождением резольвенты задача о переносе резонансного излучения в полупространстве, в принципе, решена, однако часто для получения конкретных результатов удобнее применять метод Винера-Хопфа непосредственно к интегральному уравнению для плотности возбужденных атомов (3).

С помощью этого метода несложно получить при произвольных источниках выражение для образа Лапласа функции $n(x)$, то есть величину $n^+(p)$. Через $n^+(p)$ выражается интенсивность излучения, выходящего из среды [1]:

$$J_v^{(\text{рас})}(\mu) = \frac{k_v}{4\pi|\mu|} n^+ \left(\frac{k_v + \varepsilon}{|\mu|} \right). \quad (22)$$

В частности, как отмечалось ранее, для $f_v(x, \mu) = k_v \delta(x)$ (плоский „стандартный“ источник в начале координат) функция $n(x)$ совпадает с $\Gamma(0, x)$ и, согласно (16) и (22),

$$J_v(0, \mu) = \frac{k_v}{4\pi|\mu|} \left[\frac{1}{G^+ \left(\frac{k_v + \varepsilon}{|\mu|} \right)} - 1 \right]. \quad (23)$$

Рассмотрим еще случай падения на среду извне монохроматического потока частоты ν_0 (не путать с резонансной частотой, которая в наших единицах равна нулю) под углом $\arccos \mu_0$ к поверхности ($f_v(x, \mu) = \delta(x) \delta(\nu - \nu_0) \delta(\mu - \mu_0)$). Интегральное уравнение для плотности возбужденных атомов в этом случае имеет вид

$$n(x) = \int_0^\infty K(x-t) n(t) dt + \frac{k_{\nu_0}}{2\mu_0} \frac{e^{-\frac{k_{\nu_0} + \varepsilon}{\mu_0} x}}{k + \sigma}. \quad (24)$$

С помощью метода Винера-Хопфа несложно получить аналогично (16):

$$n^+(p) = \frac{k_{\nu_0}}{2\mu_0} \frac{1}{(k + \sigma)} \left[\left(p + \frac{k_{\nu_0} + \varepsilon}{\mu_0} \right) G^+(p) G^+ \left(\frac{k_{\nu_0} + \varepsilon}{\mu_0} \right) \right]^{-1} \quad (25)$$

и, согласно (22), интенсивность выходящего излучения равна:

$$f_+(0, \mu) = \frac{k_v \cdot k_{v_0}}{8\pi(\bar{k} + \sigma)|\mu||\mu_0|} \times \\ \times \frac{1}{\left(\frac{k_v + \varepsilon}{|\mu|} + \frac{k_{v_0} + \varepsilon}{\mu_0}\right) G^+\left(\frac{k_v + \varepsilon}{\mu_0}\right) G^+\left(\frac{k_v + \varepsilon}{\mu}\right)} \quad (26)$$

Эти формулы были получены иным способом в [1].

Функция $n(x)$, являющаяся решением уравнения (24), зависит в этом случае от частоты (ν_0) падающего света, угла падения (μ_0) и координаты. Как функция этих величин она совпадает с точностью до множителя с вероятностью выхода кванта из среды, фигурирующей в работах [1, 2, 6]. Зная решение уравнения (24), легко найти образы Лапласа функции $n(x)$ для произвольных источников, а следовательно, согласно (22), и интенсивность выходящего излучения.

Обозначим через $n_q(x)$ функцию, являющуюся решением уравнения

$$n_q(x) = \int_0^{\infty} K(x-t) n_q(t) dt + e^{-qx}.$$

Согласно (24) и (25),

$$n_q^+(p) = \frac{1}{(p+q) G^+(p) G^+(q)} \quad (27)$$

и

$$n_q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{xz} dz}{(z+q) G^+(z) G^+(q)}.$$

С другой стороны,

$$n_q(x) = \int_0^{\infty} \Gamma(x, x') e^{-qx'} dx' + e^{-qx} = \Gamma^+(x, q) + e^{-qx}, \quad (28)$$

где $\Gamma(x, x')$ — введенная выше резольвента интегрального уравнения, через $\Gamma^+(x, q)$ мы обозначили образ функции $\Gamma(x, x')$ по переменной x' . В общем случае решение интегрального уравнения (3) выражается через резольвенту следующим образом (с учетом симметрии функции $\Gamma(x, x')$):

$$n(x) = \int_0^{\infty} \Gamma(x', x) F(x') dx' + F(x).$$

Производя в этом уравнении преобразование Лапласа по переменной x и воспользовавшись (28), получим:

$$n^+(p) = \int_0^{\infty} n_p(x') F(x') dx'$$

и согласно (25):

$$J_v^{(pacc)}(\mu) = \frac{k_v}{4\pi |\mu|} \int_0^{\infty} n \frac{k_{v+\varepsilon}}{|\mu|} (x) F(x) dx.$$

Функция $G^+(p)$ встречается почти во всех расчетных формулах. Отметим, что она совпадает с функцией $\frac{1}{H(1/p)}$. Функция $H(z)$ была использована во многих работах [1, 2, 6, 7, 9, 11]. При $\varepsilon = 0$ интеграл в (9) можно брать по мнимой оси. Переходя в нем простой заменой к действительной переменной и пользуясь четностью функции $G(z)$, интеграл можно свести к пределам $(0, \infty)$. Полученная таким образом формула совпадает с формулой в [6]. Обычно функция $H(z)$ определяется в цитированных работах уравнением:

$$H(z) = 1 + \frac{1}{k + \sigma} zH(z) \int_0^{\infty} \frac{H(z')}{z + z'} \frac{Q\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'} dz'.$$

При нашем подходе его легко можно получить, пользуясь линейностью уравнения переноса и применяя принцип суперпозиции.

Рассмотрим решение уравнения переноса (1) в 2-х случаях:

$$f_v^{(1)} = k \delta(x) \text{ и } f_v^{(2)} = \delta(x) \delta(\mu - \mu_0) \delta(v - v_0).$$

Очевидно, что

$$f_v^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 \int_0^1 d\mu_0 k_{v_0} f_{v_0}^{(2)}.$$

В таком случае в силу линейности

$$n^{(1)+}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_0 \int_0^1 d\mu_0 k_{v_0} n^{(2)+}(p), \tag{29}$$

причем $n^{(2)+}(p)$ зависит как от параметров от μ_0 и v_0 .

Для первого случая, как было получено, $n^{(1)+}(p) = \Gamma^+(p) = \frac{1}{G^+(p)} - 1$. Для второго случая $n^{(2)+}(p)$ дается формулой (25).

Подставляя эти выражения в (29), после небольших преобразований, получим приведенное выше уравнение для функции $H(p)$.

4. *Проблема Милна.* Особо следует упомянуть о случаях, когда источники на конечном расстоянии отсутствуют. Соответствующая задача называется проблемой Милна; она возникает при рассмотрении прохождения света через пластину очень большой оптической толщины. Аналогично [2, 6] мы будем получать решение в этом случае, располагая источник на конечном расстоянии x_0 и устремляя затем x_0 к бесконечности. Очевидно, при этом следует соответствующим образом увеличивать интенсивность источника, чтобы предел решения оставался конечным. Полученное таким образом решение не зависит от типа источника и удовлетворяет, вообще говоря, неоднородному интегральному уравнению.

Наиболее просто переход к задаче без источников получается, если предположить вначале, что на расстоянии x_0 стоит „стандартный“ (6) источник интенсивности $A(x_0)$. В качестве неоднородного члена в интегральное уравнение входит в этом случае $A(x_0)K(x-x_0)$, решение его при $x < x_0$, как следует из (7), есть:

$$A(x_0) \Gamma(x, x_0) = A(x_0) \Gamma(0, x_0 - x) + A(x_0) \int_0^x \Gamma(0, x-u) \Gamma(0, x_0-u) du.$$

Выберем функцию $A(x_0)$ таким образом, чтобы $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} A(x_0) \Gamma(0, x_0 - x)$ был конечным. Согласно (21), $\Gamma(0, x)$ при $x \rightarrow \infty$ ведет себя в основном как $\exp(-\epsilon x)$.

Повтому, приняв $A(x_0) = \frac{c}{\Gamma(0, x_0)}$, получим

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} c \frac{\Gamma(0, x_0 - x)}{\Gamma(0, x_0)} = ce^{\epsilon x}.$$

Плотность возбужденных атомов

$$\psi(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{c \Gamma(x, x_0)}{\Gamma(0, x_0)}$$

в этом случае равна:

$$\psi(x) = ce^{ax} \left(1 + \int_0^x e^{a(x-u)} \Gamma(0, x-u) du \right) = ce^{ax} \left(1 + \int_0^x e^{-at} \Gamma(0, t) dt \right), \quad (30)$$

откуда следует, что $c = \psi(0)$.

Нетрудно убедиться, что функция $\psi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\psi(x) = \int_0^x K(x-t) \psi(t) dt + \psi(0) G^+(-\varepsilon) e^{ax} \quad (31)$$

и что

$$\psi^+(p) = \frac{\psi(0)}{(p-\varepsilon) G^+(p)}. \quad (32)$$

Отметим, что при $\sigma = \varepsilon = 0$ уравнение (31) превращается в однородное. Мы будем условно называть задачу с источником на бесконечности однородной, хотя уравнение для концентрации возбужденных атомов (31) оказывается, вообще говоря, неоднородным. Как следует из (31) и свойств функции $G^+(p)$, это уравнение становится однородным лишь при $\sigma = \varepsilon = 0$.

5. *Асимптотическое поведение функции $G^+(p)$.* Поскольку функция $G^+(p)$ входит почти во все расчетные формулы, представляет интерес рассмотреть ее поведение при малых и больших p . Рассмотрим вначале случай $p \gg 1$. Разобьем интеграл в (19), определяющий функцию $G^+(p)$, на 2 части: \int_0^1 и \int_1^∞ . Поскольку p велико, то в первом интеграле можно вести разложение по отношению $z/p \ll 1$ и порядок его убывания при $p \rightarrow \infty$ есть $1/p$. Второй интеграл, при $p \gg 1$, равен $-\frac{\bar{k}^2}{2(k+\sigma)} \frac{\ln p}{p} + \frac{c'}{p} + 0\left(\frac{1}{p}\right)$. Таким образом, при $p \gg 1$ [1, 2]

$$\ln G^+(p) = 1 - \frac{\bar{k}^2}{2(k+\sigma)} \frac{\ln p}{p} + \frac{c'}{p} + 0\left(\frac{1}{p}\right), \quad (33)$$

где $\bar{k}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dv$, c' — константа порядка единицы.

Отметим, что асимптотическое поведение функции $G^+(p)$ при

$p \rightarrow \infty$ не зависит от формы коэффициента поглощения (в формулу (33) входят величины \bar{k} и \bar{k}^2 , которые лишь весьма грубо характеризуют свойства среды). Асимптотика (33) является, таким образом, универсальной и не меняется даже в случае, когда перераспределение по частотам отсутствует вовсе.

Случай малых p оказывается несколько сложнее. Для того, чтобы рассмотреть свойства $G^+(p)$ при малых p , отметим, что из формул (9) и (10), а также четности функции $G(p)$ следует:

$$G^+(p) = 1/G^-(-p)$$

и

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} = G^+(p) G^+(-p). \quad (34)$$

Исследуем поведение функции $G(p)$ в нуле. Воспользуемся для $G(p)$ выражением

$$G(p) = 1 - \frac{1}{2(\bar{k} + \sigma)p} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \ln \frac{k + \varepsilon + p}{k + \varepsilon - p} dy, \quad (35)$$

которое несложно получить из (14), меняя порядок интегрирования по u и v . Тогда

$$[pG(p)]' = -\frac{1}{2(\bar{k} + \sigma)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dy}{k + \varepsilon + p} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dy}{k + \varepsilon - p} \right] + 1. \quad (36)$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dy}{k + t} = - \int_0^1 \frac{u^2 v'(u) du}{u + t}$$

Здесь $v(u)$ — функция, обратная k , $v'(u) = \frac{dy}{du}$.

Интегрируя далее по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dy}{k + t} = \bar{k} - 2 \int_0^1 \frac{t^2 v(u) du}{(t + u)^2}$$

Заменой $z = \frac{u}{t}$ интеграл в правой части приводится к виду

$$v(t) t \int_0^{1/t} \frac{v(st) ds}{v(t)(1+s)^2}$$

Поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(ts)}{v(t)} = \varphi(s)$ конечен при любом конечном s (это следует из того, что $v(t)$ интегрируема в нуле и монотонно возрастает при $t \rightarrow 0$), главный член в последнем выражении при малых t есть

$$tv(t) \int_0^{\infty} \frac{\varphi(s) ds}{(1+s)^2}$$

Заметим, что при $p, \varepsilon \ll 1$,

$$\int_0^p (\varepsilon+t)v(\varepsilon+t) dt \simeq \gamma(\varepsilon+p)^2 v(\varepsilon+p) - \gamma\varepsilon^2 v(\varepsilon),$$

где

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^p tv(t) dt}{t^2 v(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv(t)}{2tv(t) + t^2 v'(t)} = \frac{1}{2 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv'(t)}{v(t)}}$$

Тогда интегрированием по p из (36) получаем:

$$G(p) \simeq \frac{\sigma}{k + \sigma} + \frac{\alpha\gamma}{(k + \sigma)p} [(\varepsilon + p)^2 v(\varepsilon + p) - (\varepsilon - p)^2 v(\varepsilon - p)]. \quad (37)$$

Здесь

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(s) ds}{(1+s)^2}$$

Это выражение для $G(p)$ было получено при $p < \varepsilon$ и имеет правильное аналитическое поведение при $p, \varepsilon \ll 1$, поскольку $v(p)$ для малых p определена и вещественна при положительных p и имеет разрез в комплексной плоскости, который следует провести по отрицательной части вещественной оси. Тогда аналитическое продолжение (37) дает $G(p)$ при всех комплексных $|p| \ll 1$.

После подстановки (37) в (18) получим по аналогии с выводом формулы (37):

$$G^+(p) \simeq \sqrt{\frac{\sigma}{k + \sigma}} \left(1 + \frac{\alpha\gamma}{\sigma p} [(\varepsilon + p)^2 v(\varepsilon + p) - \varepsilon^2 v(\varepsilon)] \right) (p, \varepsilon \rightarrow 0). \quad (38)$$

Формула (38) справедлива при условии:

$$(\varepsilon + p)^2 \nu(\varepsilon + p) \ll \sigma p \quad (39)$$

и произвольном соотношении между ε и p .

В частности, при $\varepsilon = 0$

$$G^+(p) \approx \sqrt{\frac{\sigma}{k + \sigma}} \left(1 + \frac{\alpha \gamma}{\sigma} p \nu(p) \right). \quad (40)$$

В силу (39) выражение (38) неприменимо при $\sigma = 0$.

Однако, когда $\varepsilon = \sigma = 0$, выражение для функции $G^+(p)$ при $p \rightarrow 0$ может быть получено следующим образом. Заметим, что если $p = 0$ не является существенно особой точкой функции $f(p)$, то при $p \rightarrow 0$ $|f(p)| \approx |f(pe^{i\varphi})|$, то есть модуль функции стремится к предельному значению независимо от выбранной последовательности точек. Поскольку $G^+(p)$ при $p > 0$ положительна, то

$$|G^+(pe^{i\varphi})| \approx G^+(p), \quad p > 0.$$

Тогда из уравнения (34) при положительных p следует, что

$$G^+(p) \approx \sqrt{|G(p)|} \approx \sqrt{G(ip)}, \quad p \rightarrow 0. \quad (41)$$

При $\varepsilon = 0$ формула (37) становится неудобной из-за слишком сложного вида, поэтому рассмотрим этот случай отдельно. При $\varepsilon = 0$ (36) можно преобразовать

$$[pG(p)]' = 1 + \frac{2}{k + \sigma} \int_0^1 \frac{u^3 \nu'(u) du}{u^2 - p^2}.$$

Используя тождество $\frac{u^3}{u^2 - p^2} \equiv u + \frac{up^2}{u^2 - p^2}$ и далее поступая, как при выводе формулы (37), получаем:

$$G(ip) \approx \frac{\sigma}{k + \sigma} - \frac{2\gamma\beta}{k + \sigma} p^2 \nu'(p),$$

где

$$\beta = \int_0^\infty \frac{\varphi(s) ds}{1 + s^2}.$$

Подставляя это выражение при $\sigma = 0$ в (41), окончательно находим при $p \rightarrow 0$ и $\varepsilon = \sigma = 0$

$$G^+(p) \approx p \sqrt{\frac{2\gamma\beta |\nu'(p)|}{k}}. \quad (42)$$

6. *Сводка асимптотик. Обсуждение.* Полученные в предыдущем пункте приближенные выражения для функции $G^+(p)$ позволяют определять интенсивность излучения, выходящего из среды под малыми углами к поверхности или на частотах, далеких от резонансной.

Кроме того, пользуясь формулой (21), мы можем находить погашение плотности возбужденных атомов на больших и малых расстояниях от поверхности. В частности, из (21) следует, что при $x \rightarrow \infty$ и ε или $\sigma \neq 0$ асимптотика функции $\Gamma(0, x)$ совпадает с асимптотикой ядра интегрального уравнения $K(x)$, а именно

$$\Gamma(0, x) \approx \frac{G^+(\varepsilon)(\bar{k} + \sigma)^3}{|\sigma + 2\alpha\gamma\varepsilon\nu(\varepsilon)|^2} K(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \text{ или } \sigma \neq 0. \quad (43)$$

При $\varepsilon = 0$ отсюда получаем:

$$\Gamma(0, x) \approx \sigma^{-1/2} (k + \sigma)^{+1/2} K(x). \quad (44)$$

Величина $K(x)$ пропорциональна концентрации атомов в точке x , возбужденных излучением, дошедшим без рассеяния, когда в начале координат стоит стандартный источник света. $\Gamma(0, x)$ — полное число атомов в точке x , возбужденных как прямым, так и рассеянным излучением. Одинаковое поведение этих функций при $x \rightarrow \infty$ свидетельствует о том, что при наличии нерезонансных процессов интенсивность рассеянного излучения на больших расстояниях убывает так же, как излучения, проходящего без рассеяния, что обусловлено большой ролью длиннопробежных фотонов в этой области.

Совпадение асимптотик функций $\Gamma(0, x)$ и $K(x)$ при $\varepsilon = 0$ было отмечено Ивановым [9].

Когда $\varepsilon = \sigma = 0$, указанное совпадение асимптотик не имеет места. Физически это связано с тем, что теперь на больших расстояниях основную роль играют фотоны с частотой, близкой к резонансной. Нерезонансные процессы, которые могли бы приводить к исчезновению их на больших расстояниях, теперь отсутствуют.

Из (6) несложно получить, что при $|x - x'| \gg 1$ и $x \gg 1$

$$\Gamma(x, x') \approx \Gamma(0, |x - x'|).$$

На больших расстояниях от источников и поверхности среды поведение функции $n(x)$ одинаково для любых типов источников. Этот результат является следствием предположения о полном перемешивании по частотам. Квант, поглотившись, полностью „забывает“ о типе источника. Однако указанные асимптотики существенно зависят от формы линии поглощения при $\nu \rightarrow \infty$ и, таким образом, являются

характеристикой вещества. В табл. 1 приведены выражения для функций $\Gamma(0, x)$ и $\psi(x)$ на больших расстояниях от поверхности.

Эти асимптотики следуют из найденных в предыдущем пункте выражений для $G^+(p)$ при $p \rightarrow 0$ и формулы (21). Заметим, что величина p является в данном случае малым параметром, по которому ведется разложение. Кроме того, существуют еще 2 малых параметра — ε и σ , учитывающие влияние нерезонансных процессов.

Наиболее простые асимптотики получаются, когда между этими параметрами существуют определенные соотношения.

Таблица 1

| k_v | | $k_v = f(v)$ | $k_v = \frac{1}{1+v^2}$ | $k_v = e^{-v^2}$ |
|--|---|--|----------------------------------|--|
| $x \gg \frac{1}{\varepsilon}$ | $\psi(x) \propto$ $\Gamma(0, x) \propto$ | e^{ax} $x^{-4} e^{-ax} v^4 \left(\frac{1}{x}\right)$ | e^{ax} $x^{-3/2} e^{-ax}$ | e^{ax} $x^{-3} (\ln x)^{-1/2} e^{-ax}$ |
| $1 \ll x \ll \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{g(\sigma)}$ | $\psi(x) \propto$ $\Gamma(0, x) \propto$ | $x \left[v' \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{-1/2}$ $\left[v' \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{-1/2}$ | $x^{1/2}$ $x^{-3/2}$ | $x^{1/2} (\ln x)^{1/2}$ $x^{-1/2} (\ln x)^{1/2}$ |
| $\frac{1}{g(\sigma)} \ll x \ll \frac{1}{\varepsilon}$ | $\psi(x) \propto$ $\Gamma(0, x) \propto$ | $1 + c_1 x^{-2} v' \left(\frac{1}{x} \right)$ $x^{-3} v' \left(\frac{1}{x} \right)$ | $1 - c_2 x^{-2/3}$ $x^{-3/2}$ | $1 - c_3 x^{-1} (\ln x)^{-1/2}$ $x^{-2} (\ln x)^{-1/2}$ |

Функция $g(\sigma)$ определяется соотношением $\sigma = gv(g)$, v — функция обратная k_v , $c_1, 2, 3$ — положительные константы.

Отметим, что приведенные в таблице асимптотики для лорентцевой и гауссовой форм линии и $\varepsilon = 0$ (в действительности, $x \ll \frac{1}{\varepsilon}$) были получены иным способом в [2, 6]. Новыми являются здесь первый столбец и первая строка таблицы.

С помощью формулы (33) для $G^+(p)$ можно заключить, что при малых x

$$\Gamma(0, x) \approx a \ln \frac{1}{x} + b + O(1), \quad x \ll 1. \quad (45)$$

В связи с универсальностью асимптотики (33) формула (45) справедлива для любого вида функции k . Плотность возбужденных атомов возрастает у поверхности. Причиной тому изотропный плоский источник (в данную точку приходит большое число фотонов, излученных под малыми углами к поверхности).

Для случая падения извне на среду монохроматического пучка света поведение функции $n(x)$ в нуле, как следует из (25) и (33), определяется выражением

$$n(x) \approx n(0) + cx \ln \frac{1}{x} + O(x), \quad (46)$$

где c — положительная константа. Из (46) следует, что в начале координат $n(x)$ возрастает ($c > 0$). Поскольку при $x \rightarrow \infty$ $n(x) \rightarrow 0$, концентрация возбужденных атомов имеет максимум на некотором расстоянии от границы. Происходит это из-за того, что при приближении к границе все большая доля фотонов выходит наружу без рассеяния. Этот максимум наблюдается экспериментально.

Интенсивность света, выходящего из среды, для случая диффузного прохождения (однородная задача) и диффузного отражения (падение пучка извне) выражается через функцию $G^+(p)$ с помощью формул (22), (26) и (32). Пользуясь приближенными выражениями для $G^+(p)$ при малых и больших p , можно находить интенсивность излучения, выходящего из среды на частотах, далеких от резонансной или под малыми углами к поверхности. Интересно отметить, что в случае лорентцевой формы коэффициента поглощения $k, = \frac{1}{1 + \nu^2}$ и $\epsilon = \sigma = 0$, сравнение расчетных данных с приближенными выражениями для функции $G^+(p)$ (формулы (33) и (41)) показывает, что последние справедливы с хорошей степенью точности не только, когда $p \ll 1$ или $p \gg 1$, но и для $p \sim 1$. Следующая приближенная формула выполняется с точностью не хуже 3.5% во всей области изменения p :

$$G^+(p) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{2p}{9}}, & 0 \leq p \leq 1.5 \\ \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\ln p}{p} - \frac{0.303}{p}\right), & 1.5 \leq p < \infty. \end{cases} \quad (47)$$

Пользуясь (47), можно с хорошей точностью получать угловые и спектральные распределения фотонов на выходе из среды, поскольку в задачах с источниками на поверхности они мало зависят от ϵ и σ .

Края линии при этом будут получаться со значительной ошибкой, так как влияние ε и σ больше, когда k_v мало.

Зная поведение концентрации возбужденных атомов, из формулы (1) несложно найти интенсивность излучения внутри среды — $J_v(x, \mu)$. Нетрудно получить, что по мере удаления от поверхности зависимость $J_v(x, \mu)$ от ν и μ становится все более слабой. При $x \rightarrow \infty$ зависимость от частоты и угла существует только для тех частот, на которых $k_v \ll \varepsilon$.

Для частот таких, что $k_v \gg \varepsilon$, распределение интенсивности на больших расстояниях является сферически симметричным и не зависит от частоты, то есть излучение приходит в „равновесие“ со средой.

7. *О роли перемешивания по частотам.* Интересно проследить, каким образом происходит переход от задачи с некогерентным рассеянием к случаю рассеяния без перераспределения частоты, когда существует постоянная длина пробега фотона и на некотором удалении от границы можно пользоваться диффузионным приближением. В последнем случае для однородной задачи и $\varepsilon = \sigma = 0$ концентрация возбужденных атомов линейно растет на больших расстояниях [14]. Пусть в нашем случае функция k_v имеет вид ступеньки:

$$k_v = \begin{cases} k_0, & |\nu| < 1, \\ 0, & |\nu| > 1 \end{cases}$$

тогда из (35) получим ($\varepsilon = \sigma = 0$):

$$G(p) = 1 - \frac{k_0}{2p} \ln \frac{k_0 + p}{k_0 - p} \quad \text{и}$$

$$G(p) \approx \frac{p^2}{3k_0^2} + O(p^4), \quad p \rightarrow 0.$$

Точно такое же выражение для $G(p)$ получается и для случая рассеяния без изменения частоты, поэтому решения для этих двух случаев оказываются идентичными. При этом на свойства решения при больших x оказывает влияние область малых p , и линейное возрастание концентрации в однородной задаче связано с тем, что $G(p) \propto p^2$ при малых p . Можно показать, что если функция k_v достаточно резко убывает при $\nu \rightarrow \infty$, мы можем приближенно заменить ее „ступенькой“. Как следует из (35), если найдется такая частота ν_T , что при некоторых p

$$\frac{p}{k_{\nu_T}} \ll 1 \quad \text{и} \quad p^2 \int_0^{\nu_T} \frac{d\nu}{k_\nu} \gg \frac{1}{p} \int_{\nu_T}^{\infty} k_\nu^2 d\nu,$$

то в этой области p :

$$G(p) \approx \left(\frac{1}{3} \int_0^{v_1} \frac{dv}{k_v} \right) p^2$$

и, следовательно, существует область линейного роста функции $\psi(x)$. В этой области, с одной стороны, влияние границы сказывается мало и, с другой стороны, можно еще пренебречь длиннопробежными фотонами.

Московский физико-технический
институт

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN SEMIINFINITE MEDIUM

Yu. Yu. ABRAMOV, A. M. DYKHNE, A. P. NAPARTOVICH

The Wiener-Hopf method is used to solve the problem of transfer of resonance radiation. It is assumed that there exists complete redistribution in frequency. Continuous absorption is taken into account.

Many of known and a number of new results can be obtained by means of this method.

Explicit expressions for asymptotic behaviour of the density of excited atoms are found for any form of absorption coefficient.

Interpretation of the obtained formula is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
2. В. В. Иванов, Канд. диссертация, Л., 1962.
3. В. В. Иванов, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
4. Л. М. Биберман, ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
5. T. Holstein, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
6. В. В. Иванов, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.
7. Д. И. Нагурнер, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
8. Звездные атмосферы, ИЛ., М., 1963.
9. В. В. Иванов, Труды Астрон. obs. ЛГУ, 22, 44, 1965.
10. В. В. Иванов, В. Т. Щербаков, Астрофизика, 1, 22, 1965.
11. Теория звездных спектров, Наука, М., 1966.
12. E. N. Avrett, D. Y. Hummer, M. N., 130, 295, 1965.
13. Д. И. Нагурнер, В. В. Иванов, Астрофизика, 2, 5, 1966.
14. Дзвисон, Теория переноса нейтронов, ИЛ., М., 1960.