АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 АВГУСТ, 1967 ВЫПУСК 3

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. Н. МИНИН

Поступила 25 марта 1967

Предложен метод для решения задач о нестационарной диффузии излучения в неоднородной стационарной среде. Дан пример применения метода к задаче о диффузном отражении света.

В теории нестационарной диффузии излучения сравнительно прост случай, когда оптические свойства среды не изменяются с течением времени. Эффективным методом для решения различных задач в таком случае оказывается применение преобразования Лапласа. Автором [1—3] показано, что преобразование Лапласа по времени от любой функции, характеризующей поле излучения, легко находится непосредственно из решения соответствующей задачи для условий стационарного свечения. При этом рассматривалась однородная среда. В данной заметке указанный способ обобщается на случай неоднородной среды.

I. Будем рассматривать среду, состоящую из плоскопараллельных слоев, в которой происходит изотропное рассеяние света с вероятностью „выживания" кванта при элементарном акте рассеяния, равной λ. Пусть t_1 и t_2 — среднее время, проводимое квантом в поглощенном состоянии и в пути между двумя последовательными рассеяниями соответственно. Примем, что вероятность излучения кванта через промежуток времени t после его поглощения экспоненциально убывает с увеличением указанного промежутка. В рассматриваемом случае величины λ, t_1 и t_2 могут изменяться с оптической глубиной τ.

Введем обозначения

$$t_1(\tau) = [t_1(0) + t_2(0)] \cdot f_1(\tau),$$

$$t_2(\tau) = [t_1(0) + t_2(0)] \cdot f_2(\tau), \qquad u = \frac{t}{t_1(0) + t_2(0)}. \tag{1}$$

Тогда уравнение переноса излучения будет иметь вид

$$-\eta \frac{\partial I(\tau, \eta, u)}{\partial \tau} + f_2(\tau) \cdot \frac{\partial I(\tau, \eta, u)}{\partial u} =$$

$$= \frac{\lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^{+1} \left[\int_0^u I(\tau, \eta', u') e^{-\frac{u-u'}{f_1(\tau)}} \frac{du'}{f_1(\tau)} \right] d\eta' + g(\tau, u) - I(\tau, \eta, u), \tag{2}$$

где $I(\tau, \eta, u)$ — интентивность излучения в момент безразмерного времени u на оптической глубине τ, направление распространения которого составляет с внешней нормалью к слоям при $\tau = 0$ угол, косинус которого равен η, $g(\tau, u)\,d\tau$ — количество лучистой энергии, испускаемое источниками, расположенными в элементарном объеме с сечением 1 $см^2$ и оптической толщиной $d\tau$ на оптической глубине τ в момент времени u за единицу времени и в единичном телесном угле.

Применим к уравнению (2) преобразование Лапласа по u, полагая, что в момент времени $u = 0$ среда не светится, то есть $I(\tau, \eta, 0) = 0$. В результате получим

$$-\frac{\eta}{1 + sf_2(\tau)} \frac{\partial \bar{I}(\tau, \eta, s)}{\partial \tau} = \frac{\lambda(\tau)}{2[1 + sf_1(\tau)][1 + sf_2(\tau)]} \int_{-1}^{+1} \bar{I}(\tau, \eta', s)\, d\eta' +$$

$$+ \frac{\bar{g}(\tau, s)}{1 + sf_2(\tau)} - \bar{I}(\tau, \eta, s), \tag{3}$$

где обозначено

$$\bar{I}(\tau, \eta, s) = \int_0^\infty e^{-su} I(\tau, \eta, u)\, du, \quad \bar{g}(\tau, s) = \int_0^\infty e^{-su} g(\tau, u)\, du. \tag{4}$$

С другой стороны, для условий стационарного свечения уравнение переноса излучения имеет вид

$$-\eta \frac{\partial I(\tau', \eta)}{\partial \tau'} = \frac{\lambda(\tau')}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau', \eta')\, d\eta' + g(\tau') - I(\tau', \eta). \tag{5}$$

Пусть нам известно решение уравнения (5), то есть функция $I(\tau', \eta)$, которая, кроме τ' и η, зависит также от $\lambda(\tau')$ и $g(\tau')$. Будем считать, что $I(\tau', \eta)$ нам известна для произвольных функций $\lambda(\tau')$ и $g(\tau')$, которые входят в выражение для $I(\tau', \eta)$. Сопоставляя (3) и (5), видим, что для нахождения $\bar{I}(\tau, \eta, s)$ следует в решении уравнения (5) заменить

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(\tau') \quad \text{на} \quad \frac{\lambda(\tau)}{[1+sf_1(\tau)][1+sf_2(\tau)]}, \\ &\tau' \quad \text{на} \quad \int_0^{\tau}[1+sf_2(\tau)]\,d\tau = \tau + s\int_0^{\tau} f_2(\tau)\,d\tau, \\ &g(\tau') \quad \text{на} \quad \frac{\bar{g}(\tau, s)}{1+sf_2(\tau)}. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Обращая $\bar{I}(\tau, \eta, s)$, получим искомую интенсивность излучения $I(\tau, \eta, u)$. Разумеется, производя указанные замены (6) в любой другой функции, характеризующей стационарное поле излучения, аналогичным путем получим эту функцию для условий нестационарного свечения. Такой прием может быть использован также для получения уравнений, определяющих характеристики нестационарного поля излучения, из соответствующих уравнений в случае стационарного свечения.

II. Для примера рассмотрим диффузное отражение от неоднородной полубесконечной среды при изотропном рассеянии. Задачу о стационарном свечении решили В. В. Соболев [4], Беллман и Калаба [5]. Коэффициент яркости среды $\rho(\eta, \zeta)$ представлен в виде

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \lambda(\alpha)\,\varphi(\eta, \alpha)\,\varphi(\zeta, \alpha)\,e^{-\alpha\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)}\frac{d\alpha}{\eta\zeta}, \tag{7}$$

а для определения вспомогательной функции $\varphi(\eta, \alpha)$ составлено уравнение

$$\varphi(\eta, \alpha) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\int_{\alpha}^{\infty} \lambda(\alpha')\,\varphi(\eta, \alpha')\,\varphi(\zeta, \alpha')\,e^{-(\alpha'-\alpha)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)}d\alpha'. \tag{8}$$

Перейдем теперь к изучению случая нестационарного свечения. Для простоты будем считать, что $t_1(\tau) \gg t_2(\tau)$ при всех значениях τ, а также примем $t_1 = \text{const}$. Введем функции $\rho(\eta, \zeta, u)$ и $\varphi(\eta, \alpha, u)$ и их преобразования Лапласа по u, которые обозначим соответственно через $\bar{\rho}(\eta, \zeta, s)$ и $\bar{\varphi}(\eta, \alpha, s)$. Тогда, согласно изложенному выше, для составления уравнений и соотношений, которым удовлетворяют искомые функции, следует в (7) и (8) сделать замены (6). В рассматриваемом случае это сводится к замене $\lambda(\alpha)$ на $\frac{\lambda(\alpha)}{1+s}$, после чего получаем

$$\bar\rho(\eta, \zeta, s) = \frac{1}{4(1+s)} \int_0^\infty \lambda(\alpha) \bar\varphi(\eta, \alpha, s) \bar\varphi(\zeta, \alpha, s) e^{-\alpha\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\eta}\right)} \frac{d\alpha}{\eta\zeta}, \tag{9}$$

$$\bar\varphi(\eta, \alpha, s) = 1 + \frac{1}{2(1+s)} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta} \int_\alpha^\infty \lambda(\alpha') \bar\varphi(\eta, \alpha', s) \bar\varphi(\zeta, \alpha', s) e^{-(\alpha'-\alpha)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} d\alpha'. \tag{10}$$

Вместо функции $\varphi(\eta, \alpha, u)$ введем новую функцию $\omega(\eta, \alpha, u)$ следующим образом

$$\bar\omega(\eta, \alpha, s) = \frac{\bar\varphi(\eta, \alpha, s)}{1+s}. \tag{11}$$

Тогда соотношение (9) примет вид

$$\bar\rho(\eta, \zeta, s) = \frac{1+s}{4} \int_0^\infty \lambda(\alpha) \bar\omega(\eta, \alpha, s) \bar\omega(\zeta, \alpha, s) e^{-\alpha\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\alpha}{\eta\zeta}, \tag{12}$$

а уравнение (10) запишется в форме

$$\bar\omega(\eta, \alpha, s) = \frac{1}{1+s} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta} \int_\alpha^\infty \lambda(\alpha') \bar\omega(\eta, \alpha', s) \bar\omega(\zeta, \alpha', s) e^{-(\alpha'-\alpha)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} d\alpha'. \tag{13}$$

Используя известные правила операционного исчисления, из (12) и (13) находим

$$\rho(\eta, \zeta, u) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \lambda(\alpha) \left[a(\eta, \zeta, \alpha, u) + \frac{\partial a(\eta, \zeta, \alpha, u)}{\partial u} \right] e^{-\alpha\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\alpha}{\eta\zeta}, \tag{14}$$

где

$$a(\eta, \zeta, \alpha, u) = \int_0^u \omega(\eta, \alpha, u') \omega(\zeta, \alpha, u-u') du', \tag{15}$$

а функция $\omega(\eta, \alpha, u)$ определяется уравнением

$$\omega(\eta, \alpha, u) = e^{-u} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty} \lambda(\alpha') \times$$

$$\times \left\{ \int_0^u \omega(\eta, \alpha', u') \left[\int_0^1 \omega(\zeta, \alpha', u-u')\, e^{-(\alpha'-\alpha)\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] du' \right\} d\alpha'. \quad (16)$$

Заметим, что $\rho(\eta, \zeta, u)$ дает свечение среды под воздействием мгновенного импульса излучения. Для любой другой зависимости мощности облучения среды от времени решение легко получить из найденного путем интегрирования.

III. Задачи о нестационарной диффузии излучения в неоднородной среде рассматривал в последнее время Н. Б. Енгибарян [6]. Используя принцип инвариантности для исследования нестационарных процессов диффузии излучения и применяя преобразование Лапласа по времени, он получил ряд уравнений и соотношений для преобразованных функций. Как показано выше, для получения преобразованных функций или уравнений для их определения нет необходимости в рассмотрении нестационарных процессов диффузии излучения.

В заключение заметим, что изложенный нами способ получения решений задач о нестационарной диффузии излучения в стационарной среде может применяться и в более сложных случаях (при неизотропном рассеянии, для среды произвольной формы и т. д.). Легко сделать соответствующую модификацию на случай диффузии излучения с перераспределением по частотам при рассеянии.

Ленинградский государственный
университет

ON THE NONSTATIONARY DIFFUSION OF RADIATION IN NONUNIFORM MEDIUM

I. N. MININ

The method to solve the problems of nonstationary diffusion of radiation in a nonuniform stationary medium is developed. As an example of the application of the method the problem of diffuse reflection of radiation is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 13, 137, 1959; № 19, 124, 1962.
2. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
3. *И. Н. Минин*, сб. „Теория звездных спектров", Наука, М., 1966.
4. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 111, 1000, 1956.
5. *R. Bellman, R. Kalaba*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42, 629, 1956.
6. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 167, 1965; 2, 197, 1966.