АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 АВГУСТ, 1967 ВЫПУСК 3

К ЗАДАЧЕ ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 7 апреля 1967

Рассматривается задача полихроматического рассеяния света в среде, состоящей из атомов с тремя энергетическими уровнями. В двух частных случаях удается интегрировать систему уравнений переноса.

Некоторые задачи полихроматического переноса излучения рассмотрены в [1—5]. Рассмотрим 2 частных случая следующей схемы полихроматического рассеяния. Пусть одномерная среда с геометрической толщиной z_0 равномерно заполнена атомами одного типа, имеющими 3 энергетических уровня — 1, 2, 3. Пусть с левого конца на среду падают излучения с интенсивностями I_{12}^0, I_{13}^0, I_{23}^0, частоты которых соответствуют переходам $1 \to 2$, $1 \to 3$ и $2 \to 3$. Учитываются переходы из верхних состояний на нижние вследствие ударов второго рода. В каждой точке z среды создается определенное поле излучения и распределение атомов по уровням. Обозначим через $I_{ik}(z)$ и $F_{ik}(z)$ отношение числа квантов (идущих за 1 *сек* вправо и влево) частоты ν_{ik} к полному числу n атомов в 1 *см*^{3}. Обозначим также через

$$p_k(z) = \frac{n_k}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{n_k}{n} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{1}$$

долю атомов, находящихся в k-том состоянии.

$$p_1(z) + p_2(z) + p_3(z) = 1. \tag{2}$$

Уравнения переноса имеют следующий вид:

$$I_{ik}'(z) = -I_{ik}(z)\, q_{ik}(z) + \frac{A_{ik}}{2} p_k(z) \tag{3}$$

$$-F'_{ik}(z) = -F_{ik}(z)\,q_{ik}(z) + \frac{A_{ki}}{2}\,p_k(z) \tag{4}$$

$$I_{ik}(0) = \frac{\Delta\nu_{ik}}{nh\nu_{ik}}\,I^0_{ik},\ F_{ik}(z_0) = 0; \quad (i = 1,\ 2,\ k > i,\ k = 2,\ 3), \tag{5}$$

где

$$q_{ik}(z) = \alpha_{ik}\,p_i(z) - \alpha_{ki}\,p_k(z), \tag{6}$$

$$\alpha_{ik} = nB_{ik},\ \alpha_{ki} = nB_{ki}$$

B_{ik}, B_{ki}, A_{ki} — эйнштейновские коэффициенты переходов.

Обозначим через

$$S_{ik} = I_{ik} + F_{ik}, \tag{7}$$

$$H_{ik} = I_{ik} - F_{ik}. \tag{8}$$

Условия стационарности для первого и второго состояния имеют следующий вид:

$$-S_{12}q_{12} + (A_{21} + a_{21})\,p_2 - S_{13}q_{13} + (A_{31} + a_{31})\,p_3 = 0 \tag{9}$$

$$S_{12}q_{12} - (A_{21} + a_{21})\,p_2 - S_{23}q_{23} + (A_{32} + a_{32})\,p_3 = 0, \tag{10}$$

где a_{ki} — коэффициент перехода $k \to i$ вследствие ударов второго рода.

Вычитая и складывая (3) и (4), получим

$$S'_{ik} = -H_{ik}\,q_{ik} \tag{11}$$

$$H'_{ik} = -S_{ik}\,q_{ik} + A_{ki}\,p_k. \tag{12}$$

Умножая (3) на F_{ik}, (4) на I_{ik} и вычитая друг от друга, получим

$$(I_{ik}F_{ik})' = -\frac{A_{ki}}{2}\,p_k H_{ik}. \tag{13}$$

Используя (12), из (9) и (10) получаем

$$H'_{12} + H'_{13} = -a_{21}\,p_2 - a_{31}\,p_3 \tag{14}$$

$$H'_{12} - H'_{23} = -a_{21}\,p_2 + a_{32}p_3, \tag{15}$$

а также

$$H'_{13} + H'_{23} = -(a_{31} + a_{32})\,p_3, \tag{16}$$

умножим (16) на $2\,(H_{13} + H_{23})$:

$$[(H_{13} + H_{23})^2]' = -2\,(a_{31} + a_{32})\,p_3\,(H_{13} + H_{23}). \tag{17}$$

Из (13_{13}) и (13_{23}) получается

$$p_3(H_{13}+H_{23}) = -\frac{2}{A_{31}}(I_{13}F_{13})' - \frac{2}{A_{32}}(I_{23}F_{23})'. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и интегрируя, получим следующий первый интеграл:

$$(H_{13}+H_{23})^2 - 4(a_{31}+a_{32})\left[\frac{I_{13}F_{13}}{A_{31}} + \frac{I_{23}F_{23}}{A_{32}}\right] = C_1. \qquad (19)$$

В следующих частных случаях удается найти остальные первые интегралы системы (10)—(12).

Случай а). $\qquad a_{13} = a_{31} = A_{31} = 0. \qquad (20)$

Тогда, очевидно,

$$H'_{13} = S'_{13} = q_{13} = 0, \qquad (21)$$

так что при использовании предыдущих формул в этом пункте всегда нужно учитывать (20) и (21). Тогда (19) заменяется следующим первым интегралом:

$$A_{32}H_{23}^2 - 4(a_{31}+a_{32})I_{23}F_{23} = (a_{31}+a_{32})C_1, \qquad (22)$$

откуда, так как $4I_{lk}F_{lk} = S_{lk}^2 - H_{lk}^2$,

$$H_{23} = +\sqrt{\frac{a_{31}+a_{32}}{A_{32}+a_{32}+a_{31}}}\sqrt{S_{23}^2+C_1}. \qquad (23)$$

Из (14) и (16) получается:

$$(H_{12}H_{23})' = -a_{21}p_2H_{23} - a_{31}p_3H_{23} - (a_{31}+a_{32})p_3H_{12}. \qquad (24)$$

Из (6_{23}) имеем

$$p_2H_{23} = [q_{23}H_{23} + a_{32}p_3H_{23}]/a_{23}. \qquad (25)$$

Используя (12_{23}) и (13_{23}), можно (25) записать в следующем виде:

$$p_2H_{23} = -\left[S'_{23} + 2\frac{a_{32}}{A_{32}}(I_{23}F_{23})'\right]\Big/a_{23}. \qquad (26)$$

Аналогично получается

$$p_1H_{12} = -\left[S'_{12} + 2\frac{a_{21}}{A_{21}}(I_{12}F_{12})'\right]\Big/a_{12}. \qquad (27)$$

Умножим (14) на $2H_{12}$

$$(H_{12}^2)' = -2a_{21}p_2H_{12} - 2a_{31}\,p_3H_{12}. \tag{28}$$

Учитывая здесь (13_{12}), получим

$$p_3H_{12} = \left[-(H_{12}^2)' + 4\,\frac{a_{21}}{A_{21}}\,(I_{12}F_{12})'\right] \Big/ 2a_{31}. \tag{29}$$

Подставляя (26), (29), а также значение p_3H_{23} из (13_{23}) в (24) и интегрируя, получим второй из первых интегралов

$$\begin{gathered} H_{12}H_{23} - \frac{a_{21}}{\alpha_{23}}\,S_{23} - 2\,(a_{21}\,\alpha_{32} + a_{31}\alpha_{22})/(\alpha_{23}A_{32})\,I_{23}F_{23} - \\ -\frac{a_{31}+a_{32}}{2a_{31}}H_{12}^2 + \frac{2a_{21}\,(a_{31}+a_{32})}{a_{31}A_{21}}\,I_{12}F_{12} = \frac{1}{2}\,C_2; \end{gathered} \tag{30}$$

или

$$\begin{gathered} \frac{a_{21}\,(a_{31}+a_{32})}{a_{31}\,A_{21}}\,S_{12}^2 = \frac{(a_{31}+a_{32})\,(a_{21}+A_{21})}{a_{31}A_{21}}\,H_{12}^2 + \\ + \frac{a_{21}\alpha_{32}+a_{31}\alpha_{23}}{\alpha_{23}A_{32}}\,(S_{23}^2 - H_{23}^2) + 2\,\frac{a_{21}}{\alpha_{22}}\,S_{23} - H_{12}H_{23} + C_2. \end{gathered} \tag{30'}$$

Чтобы получить третий из первых интегралов, разделим (14) на (16)

$$\frac{H_{12}'}{H_{23}'} = \frac{a_{31}}{a_{31}+a_{32}} + \frac{a_{21}}{a_{31}+a_{32}}\,\frac{p_2}{p_3}. \tag{31}$$

Складывая (9) и (10) и учитывая (6_{23}), получим соотношение, откуда получается следующее выражение для $\dfrac{p_2}{p_3}$:

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}} + (A_{32} + a_{32} + a_{31})/\alpha_{23}\,S_{23}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в (31), получим

$$H_{12}' = \frac{a_{31}\,\alpha_{23} + a_{21}\alpha_{32}}{(a_{31}+a_{32})\,\alpha_{23}}\,H_{23}' + \frac{a_{21}\,(A_{32}+a_{32}+a_{31})}{(a_{31}+a_{32})\,\alpha_{23}}\,\frac{H_{23}'}{S_{23}}. \tag{33}$$

Подставляя вместо H_{23} его выражение через S_{23} из (22) и интегрируя, получим третий из первых интегралов:

$$H_{12} = \frac{a_{31}\alpha_{23} + a_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{23}\sqrt{(a_{31}+a_{32})(A_{32}+a_{31}+a_{32})}}\sqrt{S_{23}^2+C_1} -$$
$$-\frac{a_{31}}{\alpha_{23}}\sqrt{\frac{A_{32}+a_{32}+a_{31}}{a_{32}+a_{31}}}\ln\left[S_{23}+\sqrt{S_{23}^2+C_1}\right]+C_3. \tag{34}$$

Последний из независимых первых интегралов можно получить, заметив, что система (11—12) явно не содержит z (автономная).

Из (29) можно получить выражение S_{12} через S_{23}, используя формулы (23) и (34).

Из (2), (6), (9), (10) получается выражение q_{23} через S_{12} и S_{23}. Учитывая (33), (34) и подставляя (23) и выражение q_{23} через S_{12} и S_{23} в (11_{23}), получим уравнение для S_{23}, интегрируя которое, получим четвертый из первых интегралов.

Случай б) $$\alpha_{12} = \alpha_{21} = A_{21} = 0. \tag{35}$$

Тогда

$$H'_{12} = S'_{12} = q_{12} = 0. \tag{36}$$

Из (14) получаем

$$p_2 H_{23} = \frac{H_{23}H'_{23} + a_{32}p_3H_{23}}{a_{21}}. \tag{37}$$

Умножим (5_{23}) на H_{23}, учитывая (11_{23}), (12_{23}) и (37), получим следующее соотношение:

$$a_{31}S'_{23} + \alpha_{23}H_{23}H'_{23} + 2\,\frac{\alpha_{32}a_{21} - \alpha_{23}a_{32}}{A_{32}}\,(I_{23}F_{23})' = 0, \tag{38}$$

которое дает следующий первый интеграл:

$$2a_{31}S_{23} + \alpha_{23}H_{23}^2 + 4\,\frac{\alpha_{32}a_{21} - \alpha_{23}a_{32}}{A_{32}}\,I_{23}F_{23} = C_2. \tag{39}$$

Откуда можно H_{23} выразить через S_{23}:

$$H_{23} = \sqrt{\frac{A_{32}}{\alpha_{23}(A_{32}+a_{32}) - \alpha_{32}a_{21}}}\sqrt{C_2 - 2a_{21}S_{23} - \frac{\alpha_{32}a_{21} - \alpha_{23}a_{32}}{A_{32}}S_{23}^2} \tag{40}$$

Из (5_{23}) и (10) имеем:

$$p_2 = \frac{S_{23}\alpha_{32} + A_{32} + a_{32}}{S_{23}\alpha_{23} + a_{21}}\,p_3. \tag{41}$$

Разделим (14) на (15), учитывая (41), получим

$$\frac{H'_{13}}{H'_{23}}=\frac{-(a_{31}\alpha_{23}+a_{21}\alpha_{32})S_{23}-a_{21}(A_{32}+a_{32}+a_{31})}{S_{23}(a_{21}\alpha_{32}-a_{32}\alpha_{23})+a_{21}A_{32}}, \tag{42}$$

или, используя (40), получим третий из независимых первых интегралов:

$$H_{13}-\sqrt{\frac{A_{32}}{a_{23}(A_{32}+a_{32})-\alpha_{32}a_{21}}}\int\frac{P}{Q}dS_{23}=C_3, \tag{43}$$

где

$$P=[a_{21}+(\alpha_{32}a_{21}-\alpha_{23}a_{32})S_{23}][(a_{31}\alpha_{23}+a_{21}\alpha_{32})S_{23}-$$

$$-a_{21}(a_{31}+a_{32}+A_{32})]$$

$$Q=[S_{23}(a_{21}\alpha_{32}-a_{32}\alpha_{23})+a_{21}A_{32}]\sqrt{C_2-2a_{21}S_{23}-\frac{\alpha_{32}a_{21}-\alpha_{23}a_{32}}{A_{32}}S_{23}^2}$$

(можно интегрировать в конечном виде).

Последний из первых интегралов находится аналогично пункту a).

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики
АН АрмССР

ON THE PROBLEM OF POLYCHROMATIC SCATTERING IN ONE-DIMENSIONAL MEDIUM

N. B. YENGIBARIAN

The problem of polychromatic scattering of radiation in one-dimensional medium consisting of atoms with three energy levels is considered. The system of transfer equations is solved in two particular cases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 39, 159, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, сб. „Теория звездных спектров", М., 1966.
3. *А. Г. Никогосян*, ДАН АрмССР, 39, 227, 1964.
4. *А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 1, 3, 1965.
5. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 3, 1965.