АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 АВГУСТ, 1967 ВЫПУСК 3

К ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ НЬЮТОНА

Г. С. СААКЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

Поступила 31 марта 1967

Рассмотрен ньютоновский вариант обобщенной теории гравитации (теории с переменной $\varkappa$). Найдены внутренние решения для конфигураций из несжимаемой жидкости.

1. Гипотеза Дирака о медленном изменении гравитационной постоянной со временем [1—2] послужила стимулом Иордану и его сотрудникам для развития нового варианта теории тяготения, названного ими обобщенной теорией тяготения [3—11] (см. также [12—13]). В этой теории гравитационное поле характеризуется одиннадцатью функциями координат и времени, а именно, компонентами метрического тензора g_{ik} и $\varkappa = 8\pi k/c^2$, где k — „постоянная" тяготения Ньютона.

В настоящей статье рассматривается ньютоновский вариант теории Иордана. Нас особенно интересуют внутренние решения уравнений гравитационного поля. Насколько нам известно, такие решения ранее не были получены, между тем, именно они могут представлять значительный интерес для астрофизики. Ньютоновское приближение мы сознательно будем применять и для случая сильных полей, где, строго говоря, оно неприменимо; полученные при этом результаты, разумеется, будут носить лишь качественный характер. Уместно вспомнить, что даже расчеты параметров сверхплотных звездных конфигураций в ньютоновском приближении дают результаты во многих отношениях схожие с эйнштейновскими [14]. Это обстоятельство позволяет нам надеяться, что и здесь решение задач для внутренних областей в нерелятивистском приближении должно в известном смысле облегчить нахождение точных решений.

2. В ньютоновском варианте обобщенной теории поле тяготения описывается двумя скалярными функциями: $\varkappa$ и потенциалом φ. Уравнения поля получаются из вариационного принципа, который можно записать в виде

$$\delta S=\delta\int\left[\frac{\rho v^2}{2}-P-\rho\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{(\nabla\varphi)^2}{\varkappa}+c^2\zeta\frac{(\nabla\varkappa)^2}{\varkappa^3}-\zeta\frac{\dot{\varkappa}^2}{\varkappa^3}\right]dVdt=0. \qquad (1)$$

Здесь ρ — плотность массы, P — давление, v — макроскопическая скорость движения масс, c — скорость света, ζ — безразмерный параметр новой теории. Величины ρ, P, v, φ и $\varkappa$ являются функциями координат и времени. Точка над $\varkappa$ означает временную производную. Мы опустили член, пропорциональный $\dot{\varphi}^2$ как величину высшего порядка малости. Вообще говоря, в (1) при слабых полях главным является предпоследний член, первые четыре слагаемые следует считать малыми по сравнению с ним. Однако, они являются первыми неисчезающими членами в разложении релятивистского лагранжиана материи и поля по степеням v/c и φ/c^2. Сохранение этих членов обязательно, поскольку именно из них путем виртуальных изменений траектории и потенциала получаются уравнения движения и поля. Кроме того, они необходимы для получения ньютоновской теории с переменной $\varkappa$: при их пренебрежении получается $\varkappa=\mathrm{const}$.

Варьирование производится по $\vec{r}$, φ и $\varkappa$ независимо и приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dt}(\rho v)+\nabla P+\rho\nabla\varphi=0,$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{\varkappa}\right)=\frac{c^2}{2}\rho, \qquad (2)$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla\varkappa}{\varkappa^{3/2}}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\varkappa}}{\varkappa^{3/2}}\right)=\frac{1}{2c^4\zeta}\frac{(\nabla\varphi)^2}{\varkappa^{1/2}}.$$

Первое есть уравнение гидродинамики. Второе при $\varkappa=\mathrm{const}$ переходит в уравнение Пуассона. Что касается последнего уравнения, то для случая $\varkappa=\mathrm{const}$ оно не имеет места по той простой причине, что в этом случае вариация $\delta\varkappa=0$. Чтобы здесь осуществить переход к ньютоновской теории, мы должны наряду с $\varkappa=\mathrm{const}$ положить $|\zeta|=\infty$.

В статическом случае систему уравнений (2) следует дополнить уравнением состояния и граничными условиями. При решении же нестационарной задачи, помимо уравнения состояния, необходимо задать распределение источников энергии, уравнения переноса, и, наконец, начальные условия.

3. Рассмотрим статическое центрально-симметрическое распределение масс. Из (2) имеем

$$P' = -\rho\varphi', \tag{3}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varphi'}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}\rho r^2, \tag{4}$$

$$\varkappa^{1/2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varkappa'}{\varkappa^{3/2}}\right) = \frac{r^2\varphi'^2}{2\zeta}. \tag{5}$$

Мы перешли к системе единиц, в которой $k_0 = c = 1$, $m_n^4c^5/(32\pi^2h^3) = \frac{1}{4\pi}$ (m_n — масса нейтрона, h — постоянная Планка). В этой системе единица длины равна $1.37\cdot10^6$ *см*, единица массы — 9.29 $M_\odot$.

Вне распределения масс

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varphi'}{\varkappa}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\varkappa^{1/2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varkappa'}{\varkappa^{3/2}}\right) = \frac{1}{2\zeta}r^2\varphi'^2. \tag{7}$$

В качестве граничных условий к последним уравнениям примем $\varkappa(\infty) = 8\pi \equiv \varkappa_0$ и на больших расстояниях $\varphi' \to \frac{M}{r^2}$, где M — активная гравитационная масса небесного тела.

Из уравнения (6) имеем

$$\varphi' = \frac{M}{r^2}\cdot\frac{\varkappa(r)}{8\pi}. \tag{8}$$

Подставляя это выражение для φ' в (7) и интегрируя, получаем

$$\varkappa(r) = \frac{\varkappa_0 r^2}{r^2 + 2C_1r + C_2}. \tag{9}$$

C_2 — постоянная интегрирования, зависящая от параметра ζ; посредством C_1 обозначена величина

$$C_1 = \frac{1}{2}(4C_2 + M^2/\zeta)^{1/2}. \tag{10}$$

Зависимость C_2 от ζ должна быть такой, чтобы при $|\zeta| \to \infty$, $C_2 \to 0$; при этом $C_1 \to 0$ и из (9) имеем $\varkappa = \text{const}$.

Подставляя (9) в (8) и интегрируя последнее, получаем следующее выражение для потенциала вне распределения масс

$$\varphi(r) = -2\sqrt{-\zeta}\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{M}{2\sqrt{-\zeta}(r+C_1)} \quad \text{при} \quad \zeta<0, \tag{11}$$

и

$$\varphi(r) = -\sqrt{\zeta}\ \ln\frac{r+C_1+M/(2\sqrt{\zeta})}{r+C_1-M/(2\sqrt{\zeta})} \quad \text{при} \quad \zeta>0. \tag{12}$$

Потенциал нормирован так, что на бесконечности он исчезает.

На больших расстояниях

$$\varphi(r) \approx -\frac{M}{r} + C_1\frac{M}{r^2}. \tag{13}$$

4. Решение (9) мы должны согласовать с соответствующим решением в общей теории относительности, найденным Гекманом [8]. Так, требуя, чтобы на больших расстояниях эти оба решения совпали, находим

$$C_1 = \frac{M}{3-2\zeta}, \tag{14}$$

где M — масса звезды.

Численное значение ζ можно было определить, рассматривая три известных эффекта Эйнштейна. При получении результата (14) явление красного смещения уже использовалось. В двух других эффектах (прецессия орбит планет и отклонение луча света) непостоянство $\varkappa$ приводит к появлению дополнительного члена, относительная величина которого порядка $|1/(2\zeta-3)|$. Поскольку эти эффекты общей теории относительности с определенной точностью уже подтверждены наблюдениями, то естественно требовать, чтобы относительная величина дополнительных членов не превышала точность измерения этих эффектов. Так Иордан, потребовав, чтобы изменение в эффекте прецессии орбит планет не превышала 2 % (это точность измерения величины угла прецессии для Меркурия), пришел к выводу, что $|\zeta| > 30$. Далее, следуя Иордану, мы полагаем

$$\zeta = \pm 30. \tag{15}$$

Для последующего удобно ввести следующие обозначения

$$C_1 = \alpha M, \qquad C_2 = \beta M^2,$$

$$\alpha = \frac{1}{3-2\zeta} = \begin{cases} -0.0175 & \text{при} \quad \zeta=+30, \\ 0.0159 & \text{при} \quad \zeta=-30, \end{cases} \tag{16}$$

$$\beta = \alpha^2 - \frac{1}{4\zeta} = \begin{cases} -0.00802 & \text{при} \quad \zeta=+30, \\ 0.00858 & \text{при} \quad \zeta=-30. \end{cases}$$

5. Исключим из уравнений поля (3)—(5) потенциал φ и введем новую переменную

$$m(r) = -8\pi r^2 P'/(\rho\varkappa),$$

имеющую смысл массы, заключенной в сфере с радиусом r. Приходим к системе уравнений:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2,$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\rho\varkappa m}{r^2}, \tag{17}$$

$$\varkappa'' + \frac{2}{r}\varkappa' - \frac{3}{2}\frac{\varkappa'^2}{\varkappa} = \frac{1}{128\pi^2\zeta}\frac{\varkappa^3 m^2}{r^4},$$

$$\rho = \rho(P).$$

Последнее является уравнением состояния.

Решение внутренней задачи (17) должно быть согласовано с внешним решением (9). Для этого выясним поведение функций $\varkappa(r)$ и $\varkappa'(r)$ на поверхности конфигурации. Очевидно, всюду должна соблюдаться непрерывность φ'. Тогда из (8) следует непрерывность $\varkappa(r)$ на поверхности. Далее, в ньютоновской теории величина $\varphi''(r)$ на поверхности испытывает скачок, равный $\varkappa_0\rho/2$. Разумно предположить, что и в случае переменной $\varkappa$ скачок φ'' равен $\varkappa\rho/2$. Это условие приводит к непрерывности $\varkappa'$, как это следует из уравнения (4). Таким образом, из выражения (9) получаются следующие граничные условия на поверхности конфигурации

$$\varkappa(R) = \frac{8\pi R^2}{R^2 + 2C_1R + C_2},$$
$$\varkappa'(R) = \frac{16\pi R(C_1R + C_2)}{(R^2 + 2C_1R + C^2)^2}, \tag{18}$$

где R — радиус конфигурации, определяемый условием $P(R) = 0$.

Теперь мы можем сформулировать граничные условия для системы (17). Интегрирование от центра может быть выполнено, если кроме тривиального условия $m(0) = 0$, заданы

$$P(0), \quad \varkappa(0), \quad \varkappa'(0).$$

Однако, вследствие наличия граничных условий (18), между параметрами $P(0)$, $\varkappa(0)$, $\varkappa'(0)$ существуют две связи. Отсюда следует, что

$\varkappa(0)$ и $\varkappa'(0)$ являются функциями от центрального давления, а поэтому не могут быть заданы произвольным образом. При таких обстоятельствах интегрирование от центра связано с большими трудностями, и для заданного $P(0)$ может быть осуществлено путем многократных повторных попыток. Итак, мы приходим к заключению, что масса, радиус, функция $\varkappa(r)$ и структура конфигурации определяются лишь одним параметром, а именно, давлением в центре.

Поскольку для системы (17) аналитическое решение не существует и численное интегрирование от центра связано с большими трудностями, то остается единственная возможность — это интегрирование от поверхности. При интегрировании от поверхности в качестве граничных условий мы должны задавать

$$r = R,\ P(R) = 0,\ m(R) = M,\ \varkappa(R),\ \varkappa'(R). \tag{19}$$

Согласно (18), $\varkappa(R)$ и $\varkappa'(R)$ определяются через M и R. Поскольку конфигурация характеризуется одним параметром, то, очевидно, M и R зависят друг от друга и не могут быть заданы произвольно. Однако, в этом случае, задача более легкая, чем интегрирование от центра, поскольку взамен двух неизвестных параметров теперь мы имеем один неизвестный параметр. Возникает вопрос: как определить массу M, соответствующую радиусу R. Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим, что произойдет, если при наугад выбранных R и M интегрирование произведем от поверхности до центра $r = 0$. Единственная неприятность, которую можно при этом ожидать — это, очевидно, неисчезновение массы $m(r)$ в центре. Фиксируя R и производя интегрирование для ряда значений M, мы можем, в конце концов, найти истинное значение M, соответствующее заданному R, для которого $m(0) = 0$. Этот вопрос будет детально обсуждаться при решении конкретных задач с определенным уравнением состояния.

6. В этой статье в качестве иллюстрации рассмотрим модель несжимаемой жидкости, $\rho = \text{const}$. Из (17) имеем

$$P' = -\frac{1}{6}\rho^2 r\varkappa,$$

$$\varkappa'' + \frac{2}{r}\varkappa' - \frac{3}{2}\frac{\varkappa'^2}{\varkappa} = \frac{1}{72\zeta}\rho^2 r^2 \varkappa^3. \tag{20}$$

Совершим следующее преобразование подобия

$$r = Ry, \quad P(r) = \rho\sqrt{2|\zeta|}\cdot p(y), \quad \varkappa(r) = \frac{6\sqrt{2|\zeta|}}{\rho R^2}\omega(y), \tag{21}$$

где R — радиус конфигурации. Получаем

$$p' = -\omega y, \tag{22}$$

$$\omega'' + \frac{2}{y}\omega' - \frac{3}{2}\frac{\omega'^2}{\omega} = \varepsilon y^2 \omega^3, \tag{23}$$

где $\varepsilon = +1$ при $\zeta > 0$ и $\varepsilon = -1$ при $\zeta < 0$. В соответствии с предыдущими рассуждениями, для граничных условий на поверхности имеем

$$y = 1, \quad p(1) = 0, \quad \omega(1), \quad \dot{\omega}(1), \tag{24}$$

где

$$\omega(1) = \frac{\sigma w}{1 + 2\alpha w + \beta w^2}, \qquad \dot{\omega}(1) = -\frac{2\sigma w^2(\alpha + \beta w)}{(1 + 2\alpha w + \beta w^2)^2}. \tag{25}$$

Здесь мы ввели новые обозначения $w = M/R$, $\sigma = 1/\sqrt{2|\zeta|} = 0.129$.

Как мы видим, модели звезд из несжимаемой жидкости характеризуются параметром

$$w = M/R. \tag{26}$$

Таким образом, для заданного w существует бесконечное число подобных конфигураций, для которых отношение массы к радиусу является постоянной, равной w.

Уравнения (22) и (23) были интегрированы численным способом с граничными условиями (24) для ряда значений параметра w. Результаты представлены на рис. 1—3.

Очевидно, $\omega(y)$ всюду должна быть положительной. Следовательно, допустимыми следует считать те значения параметра w, для которых $\omega(1) > 0$. Из (25) и (16) мы замечаем, что при $\zeta = -30$ это условие удовлетворяется для всей физической области $0 < w < \infty$, значений w. Для $\zeta = 30$ условие $\omega(1) > 0$ выполняется лишь в интервале $0 < w < 9.17$. В случае $\zeta = -30$ производная $\omega'(1) > 0$ для любого значения w. При этом получается результат, представляющий определенный физический интерес. В центре конфигурации функция $\omega(y)$ исчезает, $\omega(0) = 0$, далее с возрастанием расстояния y она монотонно растет и на бесконечности стремится к ньютоновскому пределу, равному

$$\omega(\infty) = \frac{w}{\sqrt{2|\zeta|}} = \sigma w. \tag{27}$$

Класс этих решений представлен на рис. 1.

Имея в нашем распоряжении численное решение, мы можем найти приближенное аналитическое выражение для $\omega(y)$. Так, вблизи начала координат можно пренебречь правой частью уравнения (23). Тогда полученное уравнение допускает решение

$$\omega(y) = \frac{ay^2}{(y+b)^2}, \tag{28}$$

где a и b — постоянные интегрирования. Очевидно, обе эти постоянные должны быть положительными: $a > 0$ является следствием условия $\omega(y) > 0$, а второе требование $b > 0$ непосредственно вытекает из характера решений в случае $\zeta = -30$. Постоянные a и b должны быть определены путем сопоставления (28) с численным решением вблизи начала координат. Можно показать, что при таком подборе значений a и b, решение (28) достаточно хорошо аппроксимирует точное решение в области $0 < y < 1$. Можно было постоянные a и b определить путем сравнения (28) с наружным решением. Однако, в этом случае при малых y приближенное решение (28) дает неверный результат.

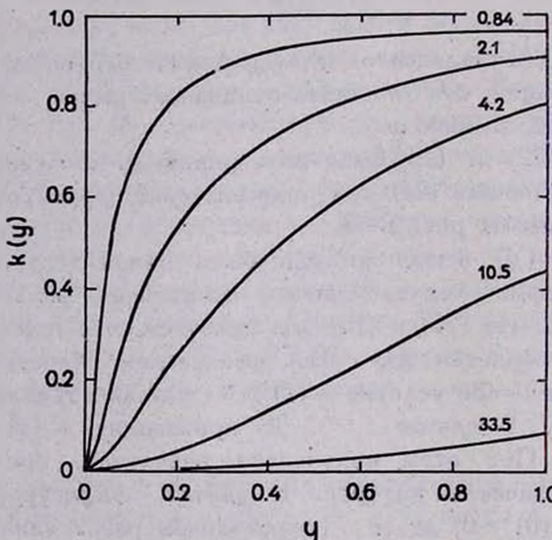

Рис. 1. Графики функций $k(y) = \varkappa(y)/8\pi$ для конфигураций, состоящих из несжимаемой жидкости для случая $\zeta = -30$. Числами на кривых отмечены значения параметра $w = M/R$, где M и R — масса и радиус конфигураций, а ρ — плотность, $y = r/R$, r — расстояние от центра.

При $\zeta = 30$ постоянные α и β отрицательные, поэтому $\omega'(1) < 0$. В этом случае численное интегрирование показывает, что всегда при некотором y_0, находящемся в интервале (0, 1) функция $\omega(y)$ расходится. Давление при $y < y_0$ становится бесконечным. Опять пренебрегая правой частью уравнения (23), находим

$$\omega(y) = \frac{ay^2}{(y - y_0)^2}, \tag{29}$$

где a и y_0 — постоянные интегрирования, причем $a > 0$, $0 < y_0 < 1$. Нам кажется, что случай $\zeta > 0$ из-за расходимостей $\omega(y)$ и $p(y)$ для физики не представляет интерес и поэтому дальше исключается из нашего рассмотрения.

Теперь рассмотрим асимптотическое поведение $\omega(y)$ при достаточно малых и больших значениях параметра w. Как видно из (25), в этих случаях $\omega(1) \ll 1$ и, следовательно, $\omega(y) \ll 1$. Тогда без заметной ошибки во всем интервале (0, 1) можно пренебречь правой частью уравнения (23) и написать приближенное решение (28). При этом постоянные a и b можно определить из граничных условий (25).

При $w \ll 1$ из (25) имеем $\omega(1) \approx \sigma w$; $\dot{\omega}(1) \approx 2\alpha\sigma w^2$. Тогда почти во всей внутренней области $b \ll y$ и как следует из (28)

$$\omega(y) \approx \sigma w. \tag{30}$$

При $w \gg 1$ имеем $\omega(1) \approx \sigma/(\beta w)$; $\dot{\omega}(1) \approx 2\sigma/(\beta w)$; $b \gg 1$ и

$$\omega(y) \approx \frac{\sigma}{\beta w} y^2. \tag{31}$$

Легко заметить из (28), что „гравитационная постоянная" существенно отличается от ньютоновского значения 8π на расстояниях $y \sim b$. Из (30) находим, что

$$\alpha w < b < \frac{\beta}{\alpha} w.$$

Согласно (16), при $\zeta = -30$, $\alpha \sim 0.016$, $\beta/\alpha \approx 0.54$. Мы видим, что область расстояний, где $\varkappa$ существенно отличается от 8π порядка гравитационного радиуса конфигурации $y_g = 2w$.

7. Давление p_0 в центре конфигурации определяется решением уравнения (22) с условием $p(1) = 0$. Его зависимость от параметра w изображена на рис. 2. При $w \ll 1$ из (30) и (22) получаем

$$p_0(w) \approx \frac{\sigma w}{2}, \tag{32}$$

а для $w \gg 1$

$$p_0(w) \approx \frac{\sigma}{4\beta w}. \tag{33}$$

Для массы конфигурации имеем $M = 4\pi\rho R^3/3$. Перепишем это выражение в виде

$$M\sqrt{\rho} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, w^{3/2}. \tag{34}$$

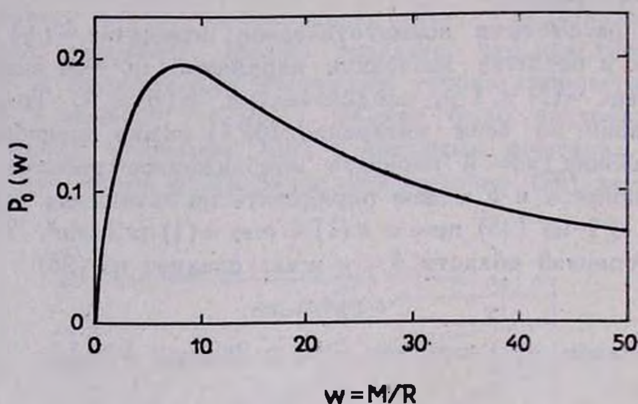

Рис. 2. Зависимость центрального давления от параметра w для случая $\zeta = -30$. Истинное центральное давление связано с функцией $p_0(w)$ соотношением $P(0) = 2\sqrt{15}\,\rho\, p_0(w)$.

Давление в центре такой конфигурации есть $p_0(w)$. Конфигурация с давлением и центре $P(0)$ и плотностью $\rho = \mathrm{const}$, согласно теории с постоянной $\varkappa$, обладает массой

$$M_N = \frac{2}{\rho^2}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot P^{3/2}(0),$$

или с помощью (21)

$$M_N\sqrt{\rho} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,(2|\zeta|)^{3/4} \cdot p_0^{3/2}(w). \tag{35}$$

Разделив (34) на (35), получаем

$$\frac{M}{M_N} = \left(\frac{\sigma w}{2p_0(w)}\right)^{3/2} = 0.0164\left(\frac{w}{p_0(w)}\right)^{3/2}. \tag{36}$$

При $w \ll 1$, как и следовало ожидать,

$$M/M_N \approx 1 + 6\alpha w \to 1,$$

а при $w \gg 1$

$$M/M_N \approx (2\beta)^{3/2} w^3 = 0.00227\, w^3. \tag{37}$$

Зависимость (36) дана на рис. 3.

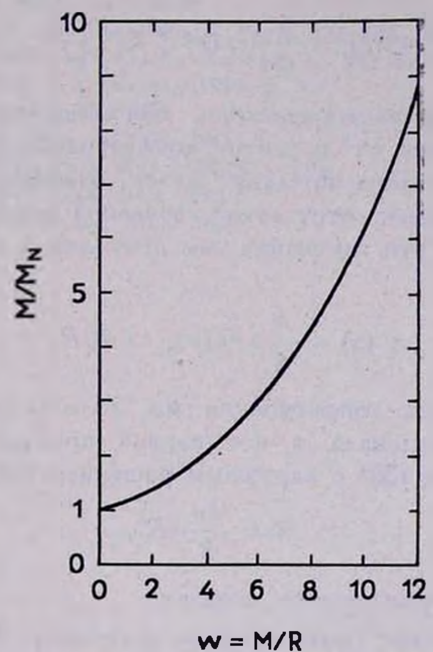

Рис. 3. Зависимость отношения M/M_N от параметра $w = M/R$. M и M_N массы конфигураций, вычисленные при одинаковом центральном давлении по теориям с переменной и постоянной $\varkappa$ соответственно.

Заметим, что уравнение (20) допускает частное решение $\varkappa(r) = 12\sqrt{-2\zeta}\,/(\rho r^2)$, которое, однако, не представляет интереса, поскольку не удовлетворяет граничным условиям на поверхности.

До сих пор мы предполагали, что масса M, входящая в выражение (8) для производной потенциала φ', идентична с

$$4\pi \int_0^R \rho\, r^2 dr.$$

Первая — это та масса небесного тела, которая на достаточно больших расстояниях создает тяготение Ньютона (тяжелая масса).

Вторая масса измеряется количеством полной энергии вещества в звезде, и она, по сути дела, является ее инертной массой. Благодаря нелинейности наших уравнений, их равенство априори не очевидно. Однако докажем, что оно на самом деле верно.

Для внутренней области несжимаемой жидкой сферы из (4) имеем:

$$\varphi'(r) = \frac{1}{6}\rho r \varkappa(r) + C\frac{\varkappa(r)}{r^2},$$

где C — постоянная интегрирования. Согласно полученным выше результатам, отношение $\varkappa/r^2$ в центре конфигурации стремится к конечному, отличному от нуля пределу. Далее, очевидно, следует считать $\varphi'(0) = 0$, что означает отсутствие точечной массы в центре конфигурации. Учитывая эти замечания, мы приходим к выводу, что $C = 0$, следовательно,

$$\varphi'(r) = \frac{1}{6}\rho r \varkappa(r), \quad r \leqslant R. \tag{38}$$

На поверхности конфигурации мы должны потребовать также непрерывность потенциала и его первой производной. Сопоставляя внутреннее решение (38) с наружным решением (8), находим

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3,$$

то есть то, что и требовалось доказать.

Авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за многочисленные обсуждения и ценные замечания. Мы благодарны нашим коллегам В. А. Варданяну, Ю. Л. Вартаняну, Н. Б. Енгибаряну, Р. С. Оганесяну, Д. М. Седракяну и Э. В. Чубаряну за обсуждения, а также М. А. Мартиросяну и Э. В. Мартиросяну за оказание помощи в проведении численных расчетов на машине „Наири".

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

ON THE GENERALIZED NEWTONIAN THEORY OF GRAVITATION

G. S. SAHAKIAN, M. A. MNATSAKANIAN

The Newtonian version of the generalized theory of gravity (i. e. the theory with variable $\varkappa$) is considered. Internal solutions for incompressible liquid configurations in equilibrium are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. A. M. Dirac*, Nature, 139, 323, 1937; Proc. Roy. Soc., (A) 165, 199, 1938.
2. *P. Iordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
3. *P. Iordan, Cl. Müller*, Z. Naturf., 2a, 1, 1947.
4. *P. Iordan*, Astron. Nachr., 276, 193, 1948.
5. *G. Ludwig, Cl. Müller*, Ann. d. Phys., 2, 76, 1948.
6. *G. Ludwig*, Arch. d. Math., 1, 2, 1948.
7. *G. Ludwig*, Z. Naturf., 2a, 482, 1947; Z. Phys., 124, 450, 1948; 125, 545, 1949.
8. *O. Heckmann, P. Iordan, W. Fricke*, Astroph. Z., 28, 113, 1951.
9. *P. Iordan*, Akad. Wiss., Lit. (Mainz), 1950, S. 319.
10. *O. Heckmann*, Naturwiss., 38, 1951.
11. *P. Iordan*, Rev. Mod. Phys., 34, 596, 1962.
12. *C. Brans, R. H. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
13. *R. H. Dicke*, Phys. Rev., 125, 2163, 1962.
14. *Г. С. Саакян*, Астрон. ж., 39, 1014, 1962.