

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР  
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

АВГУСТ, 1967

ВЫПУСК 3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ  $X$  И  $Y$ -ФУНКЦИЙ  
В ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ  
ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНИИ

Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 1 июня 1967

Исправлена 13 июля 1967

Изучается рассеяние резонансного излучения в плоском слое большой оптической толщины  $\tau_0$ . Считается, что происходит чистое рассеяние с полным перераспределением по частоте. Рассмотрены доплеровский контур коэффициента поглощения и контур, убывающий в крыле линии пропорционально некоторой степени частоты. Для функций  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$ , через которые во многих случаях выражаются интенсивности выходящего излучения, при  $\tau_0 \gg 1$  получены асимптотические формулы, охватывающие все значения аргумента  $z$ . В качестве примеров применения полученных асимптотик построены некоторые контуры линий излучения, а также найдены асимптотические выражения для среднего числа рассеяний в слое.

1. *Введение.* Приближение полного перераспределения по частоте, применяемое в теории многократного рассеяния света в спектральной линии, обладает рядом преимуществ по сравнению с другими описаниями этого физического явления. Указанное приближение ближе к действительности, чем предположение о неизменности частоты фотона при рассеянии [1]. Во многих случаях функция, дающая вероятность переизлучения кванта определенной частоты при полном перераспределении, близка к соответствующей функции при истинном перераспределении по частоте (см., например, [2]). Но для истинного перераспределения возможно лишь численное решение уравнений, в то время как предположение о полном перераспределении упрощает численное решение, а также позволяет развить математический аппарат, подобный тому, который применялся к монохроматическому рассеянию [1, 3, 4]. В частности, интенсивность излучения, выходящего из плоскопараллельной атмосферы, в большинстве задач, возникающих на

практике, может быть выражена через  $H$ -функцию, когда оптическая толщина атмосферы бесконечна [5, 6], и через  $X$  и  $Y$ -функции при конечной оптической толщине [7].

Что касается полубесконечной атмосферы, то для нее найдены в явном виде и резольвента основного интегрального уравнения и  $H$ -функция и изучены их свойства [5, 8]. Для доплеровского контура коэффициента поглощения  $H$ -функция табулирована [8]. С  $X$  и  $Y$ -функциями дело обстоит гораздо хуже, что объясняется невозможностью точного и трудностью численного решения уравнений для них, особенно при больших оптических толщинах слоя в центре линии  $\tau_0$ . Поэтому представляет интерес получение асимптотических формул для функций  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$ . Такая задача решалась для монохроматического рассеяния В. В. Соболевым [10], В. В. Ивановым [11] и другими авторами, а для полного перераспределения по частоте В. В. Ивановым [11, 12]. В настоящей статье мы получим асимптотики  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  при  $\tau_0 \gg 1$  в случае чистого рассеяния, охватывающие все значения аргумента  $z$ .

2. *Основные уравнения. Постановка задачи.* Пусть в слое газа, состоящего из поглощающих и излучающих в спектральной линии атомов, распространяется излучение. Контур коэффициента поглощения, то есть отношение коэффициента поглощения в данной безразмерной частоте  $x$  к коэффициенту в центре линии, является заданной функцией  $\alpha(x)$ . В среде происходит чистое рассеяние с полным перераспределением по частоте. Если первичные источники излучают энергию пропорционально коэффициенту поглощения  $\alpha(x)$ , а полная мощность их на оптической глубине в центре линии  $\tau$  равна  $4\pi g(\tau)$ , то задача об определении поля излучения в слое сводится к следующему интегральному уравнению [6]

$$S(\tau)' = g(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau', \quad (1)$$

где  $S(\tau)$  — функция источников,  $\tau_0$  — оптическая толщина слоя, а

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\tau\alpha(x)] dx. \quad (2)$$

Здесь  $A = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx}$ , а  $E_1$  — интегральная показательная функция.

Уравнение вида (1) решалось численно для некоторых функций  $g(\tau)$ . Эйвреттом и Хаммером [13].

Ядро  $K(\tau)$  можно привести к виду

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} G(z) e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{dz}{z}, \tag{3}$$

где

$$G(z) = \begin{cases} 2A \int_0^1 \alpha^2(x) dx & \text{при } z \leq 1, \\ 2A \int_{\lambda(z)}^{\infty} \alpha^2(x) dx & \text{при } z > 1, \end{cases} \tag{4}$$

а  $\alpha(x) = \frac{1}{z}$ , и применить к исследованию уравнения (1) метод, развитый В. В. Соболевым [7] для таких ядер. Резольвента уравнения (1) выражается через функцию  $\Phi(\tau, \tau_0)$ , удовлетворяющую уравнению (1) с  $g(\tau) = \frac{1}{2} K(\tau)$ . Знание функции  $\Phi(\tau, \tau_0)$  позволяет решить задачу о нахождении поля излучения и степени возбуждения в слое полностью.

В большинстве случаев достаточно найти выходящее излучение. Если источники в среде распределены по экспоненциальному закону,

то есть при  $g(\tau) = e^{-\frac{\tau}{z_0}}$ , интенсивности выходящего через границы слоя  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  излучения просто выражаются через X и Y-функции [7]

$$\begin{aligned} I(0, \theta, x) &= A z_0 \frac{X(z, \tau_0) X(z_0, \tau_0) - Y(z, \tau_0) Y(z_0, \tau_0)}{z_0 + z}, \\ I(\tau_0, \theta, x) &= A z_0 \frac{X(z, \tau_0) Y(z_0, \tau_0) - X(z_0, \tau_0) Y(z, \tau_0)}{z_0 - z}, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $z = \frac{\cos \theta}{\alpha(x)}$ , а  $\theta$  — угол между направлением пучка выходящего излучения и нормалью к среде.

Как уже говорилось, для  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  выведены различного рода уравнения и соотношения (см., например, [12]). Приведем основные из них для случая чистого рассеяния (вероятность выжива-

ния кванта при однократном рассеянии  $\lambda = 1$ ).  $X$  и  $Y$  — функции удовлетворяют следующей системе уравнений

$$X(z, \tau_0) = 1 + \frac{1}{2} z \int_0^{\infty} \frac{X(z, \tau_0) X(z', \tau_0) - Y(z, \tau_0) Y(z', \tau_0)}{z' + z} G(z') dz', \quad (6)$$

$$Y(z, \tau_0) = e^{-\frac{z}{z}} + \frac{1}{2} z \int_0^{\infty} \frac{X(z, \tau_0) Y(z', \tau_0) - X(z', \tau_0) Y(z, \tau_0)}{z' - z} G(z') dz'.$$

Другие уравнения для  $X$  и  $Y$  являются интегродифференциальными

$$\frac{\partial X(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} = Y(z, \tau_0) \Phi(\tau_0, \tau_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial Y(z, \tau_0)}{\partial \tau_0} = -\frac{1}{z} Y(z, \tau_0) + X(z, \tau_0) \Phi(\tau_0, \tau_0),$$

причем  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$  выражается через  $Y(z, \tau_0)$ :

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} Y(z, \tau_0) G(z) \frac{dz}{z}. \quad (8)$$

$X$  и  $Y$  — функции связаны некоторыми интегральными соотношениями, а именно

$$\int_0^{\infty} X(z, \tau_0) G(z) dz + \int_0^{\infty} Y(z, \tau_0) G(z) dz = X_0(\tau_0) + Y_0(\tau_0) = 2, \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] z G(z) dz = \tau_0 Y_0(\tau_0). \quad (10)$$

Отметим граничные значения

$$X(z, \infty) = H(z), \quad Y(z, \infty) = 0, \quad (11)$$

а также

$$X(\infty, \tau_0) = Y(\infty, \tau_0) = \frac{1}{Y_0(\tau_0)} < \infty. \quad (12)$$

Если функции  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  с помощью уравнений (6) продолжить на всю комплексную плоскость, то может быть получено соотношение между ними [14]

$$X(-z, \tau_0) = e^{\frac{\tau_0}{z}} Y(z, \tau_0). \quad (13)$$

Систему (7) также можно рассматривать при любых комплексных  $z$ . В частности, из любого из уравнений (7) и соотношения (12) следует

$$\frac{dX(\infty, \tau_0)}{d\tau_0} = X(\infty, \tau_0) \Phi(\tau_0, \tau_0). \quad (14)$$

Мы хотим получить асимптотические формулы для  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  при больших  $\tau_0$ . Но прежде выясним, какого рода формулы следует ожидать. Для любого конечного  $z$  функция  $X(z, \tau_0)$  стремится при  $\tau_0 \rightarrow \infty$  к функции  $H(z)$ . Однако стремление это неравномерное, так как  $X(\infty, \tau_0)$  величина конечная, а  $H(z) \rightarrow +\infty$  при  $z \rightarrow +\infty$ . Поэтому, вообще говоря, не следует ожидать, что условие (11) обеспечит асимптотическую формулу для  $X(z, \tau_0)$ , годную при всех  $z$ . Это условие подходит для получения асимптотики для всех  $z$ , которые не слишком велики по сравнению с  $\tau_0$ . Напротив, условие (12) конечности  $X(\infty, \tau_0)$  будет соответствовать случаю, когда  $z$  не очень мало по сравнению с  $\tau_0$ . В промежуточной области, то есть при  $z$ , примерно равных  $\tau_0$ , обе формулы должны давать один и тот же результат с одинаковой точностью. Это условие, как и связь  $X(\infty, \tau_0)$  с  $Y_0(\tau_0)$ , позволяет найти асимптотику  $X(\infty, \tau_0)$ . Указанное обстоятельство сильно отличает случай рассеяния с перераспределением по частоте от монохроматического, где соответствующие функции (функции Амбарцумяна  $\varphi(\mu)$ ,  $\varphi(\mu, \tau_0)$  и  $\psi(\mu, \tau_0)$ ) достаточно найти лишь для значений аргумента, заключенных между нулем и единицей.

3. *Асимптотическое поведение функции  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ .* Перейдем теперь непосредственно к поставленной задаче. Оказывается, что сравнительно более легким является получение асимптотики для функции  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ . В недавней работе В. В. Соболева [15] непосредственно из основного интегрального уравнения получены простые неравенства, дающие довольно точные оценки числа рассеяний кванта в слое толщиной  $\tau_0$ . Из них, в частности, следует, что для числа рассеяний кванта, поглощенного на глубине  $\tau = 0$  (эта величина равна  $X(\infty, \tau_0)$ ), справедлива формула

$$X(\infty, \tau_0) \sim \frac{c}{\sqrt{L(\tau_0)}}, \quad (15)$$

где  $c$  — постоянная, зависящая от коэффициента поглощения линии, а

$$L(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} G(z) e^{-\frac{\tau}{z}} dz. \quad (16)$$

Для постоянных  $c$  в [15] в наиболее важных случаях получены границы возможного их численного значения. С помощью (14) отсюда получаем, что

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) \sim -\frac{1}{2} \frac{d \ln L(\tau_0)}{d\tau_0}. \quad (17)$$

Нас будут интересовать главным образом лоренцовский ( $\alpha_L(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ) и доплеровский ( $\alpha_D(x) = e^{-x^2}$ ) контуры коэффициентов поглощения. Для них функции  $L(\tau)$  хорошо изучены (см., например, [16]). В частности, при  $\tau \gg 1$

$$L_L(\tau) \sim \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad L_D(\tau) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau\sqrt{\ln\tau}}}. \quad (18)$$

Отсюда немедленно вытекает

$$\Phi_L(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{4\tau_0}, \quad \Phi_D(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{2\tau_0}. \quad (19)$$

Отметим, что при монохроматическом рассеянии [17]

$$\Phi_M(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{\tau_0 + 1.4209} \sim \frac{1}{\tau_0}. \quad (20)$$

Рассмотрим также некоторый общий случай, когда при больших значениях безразмерной частоты  $x$  коэффициент поглощения убывает по степенному закону, то есть пропорционален  $\frac{1}{x^2}$ , где  $x > 1$ . Легко показать, что тогда справедливо соотношение

$$G(z) \sim A_0 z^{-2\gamma-1} \text{ при } z \gg 1, \quad (21)$$

причем  $0 < 2\gamma = \frac{x-1}{x} < 1$ . Тогда при  $\tau \gg 1$

$$L(\tau) \sim \frac{A_0 \Gamma(2\gamma)}{\tau^{2\gamma}}, \quad (22)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Все эти случаи можно объединить ( $\gamma$  — любое):

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\gamma}{\tau_0} \tag{23}$$

4. *Асимптотические формулы для X(z, τ<sub>0</sub>) и Y(z, τ<sub>0</sub>).* Теперь мы можем воспользоваться уравнениями (7), где неизвестными являются только X(z, τ<sub>0</sub>) и Y(z, τ<sub>0</sub>). Рассмотрим сперва случай, когда z не ≫ τ<sub>0</sub>. Подставляя (23) в (7), получим систему, где z является параметром. Поэтому вместо τ<sub>0</sub> введем новую переменную  $t = \frac{\tau_0}{z}$  и будем производную по t отмечать штрихом:

$$X' = \frac{\gamma}{t} Y, \tag{24}$$

$$Y' = -Y + \frac{\gamma}{t} X.$$

В соответствии со сказанным выше мы должны добавить условия при  $t = \infty$ , то есть (11). Однако эта точка является особой для системы (24), поэтому приходится пользоваться еще и соотношением (13) между X и Y — функциями, которое не противоречит системе. Система (24) сводится к уравнению

$$t^2 X'' + t(t + 1) X' - \gamma^2 X = 0, \tag{25}$$

решение которого может быть выражено через функции Уиттекера  $W_{k, \gamma}(t)$  [18]. Учитывая начальные условия (11) и соотношение (13), находим

$$X(z, \tau_0) = H(z) (-t)^{-1/2} e^{-\frac{t}{2}} W_{1/2, \gamma}(-t) - \gamma H(-z) t^{-1/2} e^{-\frac{t}{2}} W_{-1/2, \gamma}(t), \tag{26}$$

$$Y(z, \tau_0) = -\gamma H(z) (-t)^{-1/2} e^{-\frac{t}{2}} W_{-1/2, \gamma}(-t) + H(-z) t^{-1/2} e^{-\frac{t}{2}} W_{1/2, \gamma}(t),$$

где

$$W_{k, \gamma}(t) = \frac{t^k e^{-\frac{t}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \gamma\right)} \int_0^\infty u^{-k-1/2+\gamma} \left(1 + \frac{u}{t}\right)^{k-1/2+\gamma} e^{-u} du, \tag{27}$$

а  $t = \frac{\tau_0}{z}$ .

Найденное решение требует некоторых пояснений. При нецелых γ и вещественных положительных t функции  $W_{k, \gamma}(-t)$  ветвятся. В

соответствии с рекомендациями книги Уиттекера и Ватсона [18] в этом случае необходимо брать полусумму решений, отвечающих значениям  $t + i0$  и  $t - i0$ . Аналогично, функция  $H(-z)$  имеет линией ветвления положительную часть вещественной оси. Здесь тоже надо взять полусумму для  $z + i0$  и  $z - i0$ . При этом нужно пользоваться уравнением для  $H$ -функции [5]

$$H(z)H(-z)[1 - u(z)] = 1, \quad (28)$$

где

$$u(z) = z^2 \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{z^2 - z'^2} dz'. \quad (29)$$

Из него с помощью формул Сохоцкого для интегралов типа Коши [19], так же, как в [8], получаем

$$H(-z \mp i0) = \frac{1}{1 - u(z) \mp i \frac{\pi^2}{4} z G(z)} \frac{1}{H(z)}. \quad (30)$$

Отделить вещественную часть не представляет труда. Таким образом для вещественных  $z > 0$  имеем

$$H(-z) = \frac{1 - u(z)}{[1 - u(z)]^2 + \frac{\pi^2}{4} z^2 G^2(z)} \cdot \frac{1}{H(z)}, \quad (31)$$

причем интеграл  $u(z)$  понимается в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, равенства (26) представляют собой асимптотические формулы, годные при  $z$ , не слишком больших по сравнению с  $\tau_0$  (то есть при  $t$  не  $\ll 1$ ).

В противоположном случае, когда  $t$  не  $\gg 1$ , мы пользуемся условием (12). Для облегчения выкладок введем его явно (как это было сделано в [11]):

$$X(z, \tau_0) = X(\infty, \tau_0) f_1, \quad Y(z, \tau_0) = X(\infty, \tau_0) f_2. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (7) и пользуясь (14), найдем систему дифференциальных уравнений для функций  $f_1$  и  $f_2$  (производная берется по  $t$ ):

$$\begin{aligned} f_1' &= -\frac{\gamma}{t} (f_1 - f_2), \\ f_2' &= \frac{\gamma}{t} (f_1 - f_2) - f_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Начальные условия для  $f_1$  и  $f_2$  имеют весьма простой вид

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ при } t = 0. \tag{34}$$

Точка  $t = 0$  также особая для системы (33). Здесь мы опять в качестве дополнительного условия используем (13). Система (33) сводится к уравнению

$$t f_1' + (t + 2\gamma + 1) f_1 + \gamma f_1 = 0, \tag{35}$$

решения которого также могут быть выражены через функции Уиттекера. Они дают асимптотики  $X$  и  $Y$ -функций для  $z$ , не меньших по порядку величины, чем  $\tau_0$ , то есть для  $t$  не  $\gg 1$ . К сожалению, в общем случае (для произвольного  $\gamma$ ) написать решение затруднительно, поэтому мы этого делать не будем.

5. Частные случаи рассеяния.

а. При монохроматическом рассеянии  $\gamma = 1$  и решения (26) выражаются через элементарные функции и функцию  $\varphi(z)$ :

$$\varphi(z, \tau_0) = \varphi(z) \left(1 - \frac{1}{t}\right) - \varphi(-z) \frac{e^{-1}}{t}, \tag{36}$$

$$\psi(z, \tau_0) = \varphi(z) \frac{1}{t} + \varphi(-z) e^{-1} \left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Эти формулы очень близки к найденным в [11] другим путем. Можно было бы из уравнений (7) получить формулы, совпадающие с теми, которые выведены в [11], если взять для  $\Phi_M(\tau_0, \tau_0)$  первую формулу в (20). Равенства (36), как легко убедиться, справедливы при любых  $z$  и из них может быть получено и второе решение [11].

б. Для доплеровского контура  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Исходя из (26) решения можно выразить через бесселевы функции от чисто мнимого аргумента ( $K_n\left(\frac{t}{2}\right)$  определены согласно книге [18]):

$$X_D(z, \tau_0) = H_D \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \left[ I_0\left(\frac{t}{2}\right) + I_1\left(\frac{t}{2}\right) \right] + \\ + H_D(-z) \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} \left[ K_0\left(\frac{t}{2}\right) + K_1\left(\frac{t}{2}\right) \right], \tag{37}$$

$$Y_D(z, \tau_0) = H_D(z) \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[ I_0\left(\frac{t}{2}\right) - I_1\left(\frac{t}{2}\right) \right] + \\ + H_D(-z) \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \left[ K_0\left(\frac{t}{2}\right) - K_1\left(\frac{t}{2}\right) \right].$$

Функция  $G_D(z)$  просто связана с функцией вероятностей, таблица функции  $U_D(z)$ , входящей в выражение (31) для  $H_D(-z)$ , будет опубликована в скором времени. Свойства этих функций изучены в работе [16].

Формулы (37) верны только, если  $z$  не  $\gg \tau_0$ . К пределу при  $z \rightarrow \infty$  в них перейти нельзя. В противоположном случае ( $z$  не  $\ll \tau_0$ ) из уравнения (35), учитывая (32) и (13), имеем:

$$X_D(z, \tau_0) = X_D(\infty, \tau_0) e^{-\frac{t}{2}} \left[ I_0\left(\frac{t}{2}\right) + I_1\left(\frac{t}{2}\right) \right], \quad (38)$$

$$Y_D(z, \tau_0) = X_D(\infty, \tau_0) e^{-\frac{t}{2}} \left[ I_0\left(\frac{t}{2}\right) - I_1\left(\frac{t}{2}\right) \right].$$

Решения (38) были получены ранее в работе [11] В. В. Ивановым, где была высказана идея замены в (7) функции  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$  ее асимптотикой.

Величина  $X(\infty, \tau_0)$  пока осталась неопределенной. Для ее нахождения воспользуемся тем, что в области, где  $z$  порядка  $\tau_0$ , оба решения должны совпадать. Асимптотические свойства входящих в (37) функций известны: при  $z \gg 1$

$$1 - u_D(z) \sim -\frac{\pi^{1/2}}{16z \ln^{3/2} z}, \quad H_D(z) \sim \frac{2}{\pi^{1/2}} z^{1/2} \ln^{1/2} z, \quad (39)$$

$$z G_D(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z \sqrt{\ln z}}, \quad H_D(-z) \sim -\frac{\pi^{1/2}}{2} z^{1/2} \ln^{-3/2} z.$$

Приравняем выражения для  $X_D(z, \tau_0)$ , даваемые (37) и (38), и подставим в правую часть (37)  $z = \frac{\tau_0}{t}$ . Считая  $\tau_0$  и  $\frac{\tau_0}{t}$  большими и учитывая асимптотики  $H_D\left(\frac{\tau_0}{t}\right)$  и  $H_D\left(-\frac{\tau_0}{t}\right)$ , найдем, что второй член в правой части (37) по порядку величины меньше первого. Отсюда получаем

$$X_D(\infty, \tau_0) \sim \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\tau_0^{1/2}}{\sqrt{t}} [\ln \tau_0 - \ln t]^{1/2} \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \sim \pi^{1/2} \tau_0^{1/2} \ln^{1/2} \tau_0. \quad (40)$$

Последнее приближение справедливо, если  $|\ln t| \ll \ln \tau_0$ , или  $1/\tau_0 \ll t \ll \tau_0$ , то есть в довольно широких пределах ( $\tau_0$  велико). Таким образом оба решения совпадают, если  $1 \ll z \ll \tau_0^2$ . Из них, в частности, получаются и различные предельные случаи формул для X и Y-функций, найденные в работе [12].

Заметим, что вторым членом в (37) можно всегда пренебречь. Таким образом, для доплеровского контура мы можем пользоваться формулами (38) и (40) при всех z, кроме тех значений, для которых несправедливы асимптотические формулы (39). В этой области в (38) величину  $X_D(\infty, \tau_0)$  надо заменить на  $H_D(z) \cdot \frac{\sqrt{\pi t}}{2}$ .

в. Наконец, рассмотрим случай (21), то есть  $0 < \gamma < 1/2$ . Из решения (26), пользуясь соотношениями, приведенными в [18], можно получить следующие выражения для X и Y-функций (выкладки элементарны, хотя довольно утомительны):

$$X(z, \tau_0) = \frac{H(z)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} \cos \pi \gamma \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)}{2^{2\gamma+1} \sqrt{\pi}} M_{-1/2, \gamma}(t) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)} M_{-1/2, -\gamma}(t) \right] + \frac{H(-z)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)}{2^{2\gamma+1} \sqrt{\pi}} M_{-1/2, \gamma}(t) - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)} M_{-1/2, -\gamma}(t) \right], \quad (41)$$

$$Y(z, \tau_0) = \frac{H(z)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} \cos \pi \gamma \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)}{2^{2\gamma+1} \sqrt{\pi}} M_{1/2, \gamma}(t) - \right. \\ \left. - \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)} M_{1/2, -\gamma}(t) \right] + \frac{H(-z)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)}{2^{2\gamma+1} \sqrt{\pi}} M_{1/2, \gamma}(t) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma)} M_{1/2, -\gamma}(t) \right].$$

Функция  $M_{k, \gamma}(t)$  подробно изучается в книге [18]. Все же она не является общеизвестной, поэтому мы приведем для нее некоторые формулы. Определяется  $M_{k, \gamma}(t)$  равенством

$$M_{k, \gamma}(t) = t^{\gamma+1/2} e^{-\frac{t}{2}} \left[ 1 + \frac{\frac{1}{2} + \gamma - k}{(2\gamma + 1) 1!} t + \frac{\left(\frac{1}{2} + \gamma - k\right) \left(\frac{3}{2} + \gamma - k\right)}{(2\gamma + 1)(2\gamma + 2) 2!} t^2 + \dots \right], \quad (42)$$

с помощью которого она может быть вычислена для не очень больших  $t$ . При больших  $t$  справедлива асимптотическая формула

$$M_{k, \gamma}(t) \sim \frac{\Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma - k\right)} t^{-k} e^{\frac{t}{2}}. \quad (43)$$

Кроме того

$$t^{-\gamma-\frac{1}{2}} M_{k, \gamma}(t) = (-t)^{-\gamma-\frac{1}{2}} M_{-k, \gamma}(-t). \quad (44)$$

Второе решение ( $t$  не  $\gg 1$ ) получается из первого (41) предельным переходом, когда  $z \rightarrow \infty$ . При этом нужно воспользоваться асимптотиками функций  $H(z)$  и  $H(-z)$ . Легко показать, что при (21) выполняются соотношения:

$$1 - u(z) \sim \frac{\pi A_0}{2} \operatorname{ctg} \pi \gamma \cdot \frac{1}{z^{2\gamma}}, \quad (45)$$

$$H(z) \sim \sqrt{\frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi A_0}} \cdot z^\gamma, \quad H(-z) \sim \cos \pi \gamma \sqrt{\frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi A_0}} \cdot z^\gamma.$$

С помощью этих формул находим, что при  $z$  не  $\ll \tau_0$

$$X(z, \tau_0) = X(\infty, \tau_0) e^{-\frac{t}{2}} t^{-\gamma-1/2} M_{-1/2, \gamma}(t), \quad (46)$$

$$Y(z, \tau_0) = X(\infty, \tau_0) e^{-\frac{t}{2}} t^{-\gamma-1/2} M_{1/2, \gamma}(t),$$

где

$$X(\infty, \tau_0) \sim \cos \pi \gamma \sqrt{\frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi A_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)}{2^{2\gamma} \sqrt{\pi}} \tau_0^{-\gamma}}. \quad (47)$$

Из рассмотренного общего случая формулы для лоренцовского и фойгтовского коэффициентов поглощения получаются подстановкой [16]

$$\gamma = \frac{1}{4}, \quad A_0^L = \frac{2}{3\pi}, \quad A_0^V = \frac{2}{3\pi} \sqrt{\pi a U(a, 0)}. \quad (48)$$

и соответствующих *H*-функций. В частности:

$$X_L(\infty, \tau_0) \sim \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} \tau_0^{3/4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \sqrt{\pi}}. \quad (49)$$

Таблицы  $H_L(z)$  и  $H_V(z)$  будут опубликованы в одной из следующих работ, формулы для функций  $u_L(z)$  и  $G_L(z)$  приведены в [16] (это функции элементарные).

**6. Некоторые замечания.** При рассеянии с лоренцовским контуром коэффициента поглощения (и в более общем случае (21)), как и при монохроматическом, асимптотические формулы, выражающие *X* и *Y*-функции через соответствующие *H*-функции, оказались годными для всех *z* и даже при  $z = \infty$ . В этом смысле доплеровский контур является исключением. По-видимому, это связано с характером точки ветвления  $z = \infty$  функции  $H_D(z)$ .

Для многих целей достаточно более простого второго решения. Так, например, при вычислении интеграла, входящего в равенство (10), получается правильный результат, если вместо *X* и *Y* подставить функции (38) и (46). В то же время вычисление  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$  по формуле (8) с помощью (38) и (46) приводит к неверным результатам, хотя и здесь можно произвести это вычисление правильно, действуя более аккуратно. Тогда мы, конечно, получим равенства (19) и (23). Для этого надо воспользоваться уравнением, связывающим  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$  с  $\Phi(\tau)$  — резольвентой интегрального уравнения, описывающего рассеяние в полубесконечной среде (см., например, [12]):

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = \Phi(\tau_0) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} G(z) X(z, \tau_0) \frac{dz}{z}. \quad (50)$$

Интегрируя во внешнем интеграле два раза по частям и делая небольшие преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_0, \tau_0) &= \frac{1}{2} \Phi(\tau_0) Y_0(\tau_0) - \frac{1}{2} \Phi'(\tau_0) \tau_0 Y_0(\tau_0) - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi'(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} Y(z, \tau_0) G(z) dz - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi''(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] z G(z) dz. \end{aligned} \quad (51)$$

Подставим сюда асимптотики для  $X_D(z, \tau_0)$  и  $Y_D(z, \tau_0)$  при  $z$  не  $\ll \tau_0$ , то есть формулы (38), а также формулу для  $G_D(z)$  из (39) и асимптотику  $\Phi_D(z)$  при  $\lambda = 1$ , полученную в [20],

$$\Phi_D(\tau_0 + t) \sim 2\pi^{-1/2} (\tau_0 + t)^{-1/2} \ln^{1/2}(\tau_0 + t) \sim 2\pi^{-1/2} (\tau_0 + t)^{-1/2} \ln^{1/2} \tau_0. \quad (52)$$

Если получившиеся интегралы, содержащие бесселевы функции, вычислить точно и воспользоваться равенством (12), то придем ко второй формуле в (19).

Аналогичную операцию можно проделать и в случае, когда справедлива формула (21). Тогда с помощью (45) легко вывести, что при  $\tau \gg 1$  и  $\lambda = 1$

$$\Phi(\tau) \sim \sqrt{\frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi A_0}} \frac{1}{\Gamma(\gamma) \tau^{1-\gamma}}. \quad (53)$$

Пользуясь этим, также можно убедиться, что равенство (23) и при  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$  выполняется. (Выкладки мы не приводим, так как они ничего нового не дают).

При выводе асимптотик все время в этой статье считалось, что вероятность выживания кванта  $\lambda$  точно равна 1. Однако полученные формулы могут применяться и для значений  $\lambda$ , близких к 1. Как показано в [20], истинным поглощением в слое можно пренебречь и рассеяние считать чистым, если выполняется условие

$$\frac{L(\tau_0)}{1 - \lambda} \gg 1, \quad (54)$$

где при  $\tau_0 \gg 1$  для функции  $L(\tau_0)$  можно воспользоваться асимптотиками (18) и (22). Аналогичный критерий был установлен в [13] на основе данных численного решения уравнения (1).

Для случая, когда справедливо противоположное неравенство, то есть если слой настолько толстый, что процессы истинного поглощения в нем играют определяющую роль, основные асимптотики для  $X(z, \tau_0)$  и  $Y(z, \tau_0)$  при доплеровском коэффициенте поглощения были получены ранее во много раз уже цитировавшихся работах В. В. Иванова [11, 12]. При  $\lambda = 1$  в [11] были найдены асимптотики (38), а в [12] предельный случай (37) при  $z \ll \tau_0$ , а также асимптотика  $X_D(\infty, \tau_0)$ . При этом для нахождения  $X_D(\infty, \tau_0)$  использовалась связь между  $X(\infty, \tau_0)$ ,  $Y_0(\tau_0)$  и  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ , то есть равенства (12) и (14). В качестве третьего уравнения было взято (51), причем в правой части его было оставлено только первое слагаемое. Вычисление остальных членов показывает, что этого делать нельзя, так как все слагаемые имеют один порядок. Поэтому асимптотика  $X_D(\infty, \tau_0)$ , полученная в [12], при правильной функциональной форме содержала неверный численный множитель, что отмечалось Хаммером [13]. Правые части в формулах (38), (58) и (62) работы [12] должны быть домножены на  $\pi/2$ , в формуле (42) на  $2/\pi$ , а в (71) на  $\pi^2/4$ . В то же время асимптотика  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$  была найдена правильно, так как из (14) видно, что ошибка на численный множитель или даже степень  $\ln \tau_0$  в  $X(\infty, \tau_0)$  не влияет на  $\Phi(\tau_0, \tau_0)$ .

7. Примеры применения полученных результатов.

а. Профили спектральных линий. В качестве одного из примеров использования полученных асимптотик построим теоретические профили спектральных линий при равномерном распределении источников в толстом слое ( $g(\tau) = 1$  в уравнении (1)). Переходя в формулах (5) к пределу при  $z_0 \rightarrow \infty$ , найдем, что в этом случае

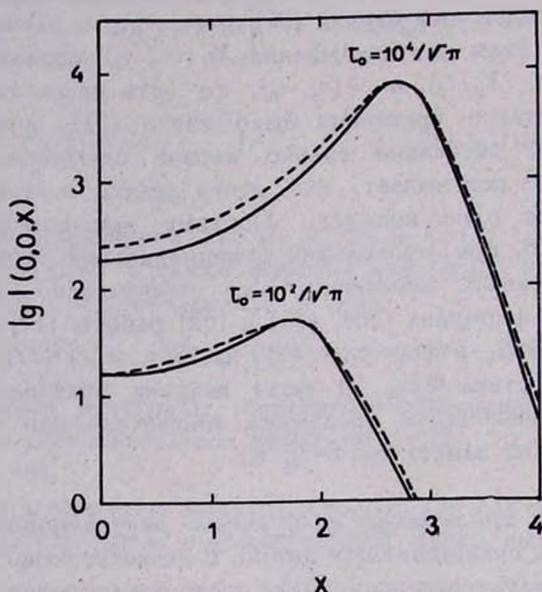
$$I(0, \theta, x) = I(\tau_0, \theta, x) = AX(\infty, \tau_0) [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]. \quad (55)$$

Примем для простоты, что коэффициент поглощения в линии доплеровский, а излучение выходит по нормали к среде, то есть  $\theta = 0$ . Тогда

$$I(0, 0, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} X_D(\infty, \tau_0) H_D(e^{x^2}) \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \cdot 2e^{-\frac{t}{2}} I_1\left(\frac{t}{2}\right), & t \text{ не } \ll 1, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} X_D^2(\infty, \tau_0) \cdot 2e^{-\frac{t}{2}} I_1\left(\frac{t}{2}\right), & t \text{ не } \gg 1, \end{cases} \quad (56)$$

где  $t = \tau_0 e^{-x^2}$ . Возьмем  $\tau_0 = \frac{10^4}{\sqrt{\pi}}$  и  $\tau_0 = \frac{10^2}{\sqrt{\pi}}$  и вычислим для сравнения интенсивность по обеим формулам. Соответствующие кривые

приведены на рисунке. Контуры линий представляют сплошные кривые, пунктиром изображены кривые, соответствующие второй формуле при  $z < \tau_0$  и первой при  $z > \tau_0$ . Из рисунка видно, что вторая формула в ядре линии, а первая в крыле дают для интенсивности несколько завышенные значения, в районе же максимума кривые совпадают.



Контуры линий выходящего излучения при равномерном распределении источников в слое и доплеровском коэффициенте поглощения.

Полученные контуры можно сопоставить с рассчитанными для  $\lambda = 1 - 10^{-6}$  в работе [13] после численного решения уравнения (1). Хотя при  $\lambda = 1 - 10^{-6}$  происходит не чистое рассеяние, условие (54) при выбранных нами оптических толщинах выполняется. При сравнении надо иметь в виду, что в [13] было взято  $g(\tau) = \sqrt{\pi} (1 - \lambda)$ , и следовательно, интенсивности там в  $\frac{10^6}{\sqrt{\pi}}$  раз меньше. Если учесть это обстоятельство, то оказывается, что соответствующие контуры линий, полученные с помощью (56) и численных расчетов [13], на рисунке не отличимы везде кроме максимума, где они различаются примерно на 5 процентов от значения интенсивности.

6. *Среднее число рассеяний.* Полученные результаты позволяют также найти асимптотическое поведение среднего числа рассеяний кванта при полном перераспределении по частоте в плоском слое

большой оптической толщины (при чистом рассеянии). Рассмотрим два случая.

Если источники излучения находятся на границе слоя, оптической толщины  $\tau_0$ , то как уже говорилось, среднее число рассеяний таких квантов равно  $X(\infty, \tau_0)$ . Следовательно, при больших  $\tau_0$  мы можем пользоваться формулами (40), (47) и (49). В частности,

$$X_D(\infty, \tau_0) = 1.331 \cdot \tau_0^{-1/2} \ln^{1/2} \tau_0, \quad X_L(\infty, \tau_0) = 1.490 \cdot \tau_0^{1/2}. \quad (57)$$

Согласно результатам работы [15] приведенные численные коэффициенты должны находиться соответственно в пределах от 0.8 до 1.9 и от 1.2 до 1.6. Мы видим, что истинные значения лежат приблизительно посередине между указанными границами.

Среднее число рассеяний квантов при равномерно распределенных в слое источниках  $N_{cp}(\tau_0)$ , как показано в [12], равно

$$N_{cp}(\tau_0) = \frac{1}{\tau_0} \lim_{z \rightarrow \infty} X(\infty, \tau_0) z [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]. \quad (58)$$

Используя формулы (38) и (46), получаем для этой важной величины при  $\tau_0 \gg 1$  в случае доплеровского и лоренцовского контуров

$$N_{cp}^D(\tau_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tau_0 \ln^{1/2} \tau_0, \quad N_{cp}^L(\tau_0) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2} \pi} \tau_0^{1/2}. \quad (59)$$

Численные значения коэффициентов последних равенств 0.8862 и 1.479 также попадают примерно в середину интервалов, указанных для них в [15], а именно (0.3; 1.8) и (0.9; 1.8).

Приведенные в этом разделе формулы для среднего числа рассеяний согласуются с результатами расчетов [13]. Так при  $\lambda = 1 - 10^{-6}$  и  $\tau_0 = \pi^{-1/2} \cdot 10^4$  (в этом случае условие (54) выполняется) из опубликованных в [13] данных находим  $X_D(\infty, \tau_0) = 1.8 \cdot 10^2$  и  $N_{cp}^D(\tau_0) = 1.34 \cdot 10^4$ . По формулам (57) и (59) для этих величин получаем соответственно  $1.73 \cdot 10^2$  и  $1.47 \cdot 10^4$ .

В заключение отметим, что очень интересной, хотя, по-видимому, и очень трудной задачей является получение асимптотических формул, связывающих резольвенты основных интегральных уравнений для рассеяния с полным перераспределением в полубесконечном  $\Phi(\tau)$  и конечном  $\Phi(\tau, \tau_0)$  слоях. Для монохроматического рассеяния такие формулы были получены В. В. Соболевым [17].

# ON THE ASYMPTOTIC FORMULAE FOR THE $X$ - AND $Y$ -FUNCTIONS IN THE THEORY OF MULTIPLE SCATTERING IN A SPECTRAL LINE

D. I. NAGIRNER

The scattering of resonance radiation in a plane-parallel layer of large optical thickness  $\tau_0$  is studied. The scattering is assumed to be conservative with the complete redistribution in frequency. The profiles of the absorption coefficient considered are the Doppler one and the profile decreasing in the line wings as a power of frequency. The asymptotic ( $\tau_0 \gg 1$ ) formulae are found for the functions  $X(z, \tau_0)$  and  $Y(z, \tau_0)$  in terms of which the emergent intensities can be expressed. The asymptotics are valid for arbitrary  $z$ . To illustrate the results the line profiles and the mean number of scatterings of a quantum in an optically thick isothermal gas layer are found.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, 1956.
2. D. J. Hummer, MN, 125, 21, 1962.
3. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. I, АН АрмССР, Ереван, 1960.
4. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
5. В. В. Соболев, Астрон. ж., 26, 564, 1959.
6. В. В. Иванов, Уч. зап. ЛГУ, № 307 (Тр. Астр. обс. ЛГУ, XIX), 52, 1962.
7. В. В. Соболев, Изв. АН АрмССР, (серия физ.-мат. наук) 11, № 5, 39, 1958.
8. Д. И. Нагирнер, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
9. В. В. Иванов, Д. И. Нагирнер, Астрофизика, 1, 143, 1965.
10. В. В. Соболев, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
11. В. В. Иванов, Астрон. ж., 41, 1097, 1964.
12. В. В. Иванов, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
13. E. H. Avrett, D. J. Hummer, MN, 130, 295, 1965.
14. T. W. Mullikin, Ap. J., 136, 627, 1962.
15. В. В. Соболев, Астрофизика, 3, 137, 1967.
16. Д. И. Нагирнер, В. В. Иванов, Астрофизика, 2, 147, 1966.
17. В. В. Соболев, ДАН СССР, 155, 336, 1964.
18. Э. Уиттекер, Дж. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, Физматгиз, М., 1963.
19. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.
20. В. В. Иванов, сб. "Теория звездных спектров", Наука, М., 1966.