АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 АВГУСТ, 1967 ВЫПУСК 3

# О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

В. Ю. ТЕРЕБИЖ

Поступила 20 марта 1967
Исправлена 12 мая 1967

Рассматривается диффузия излучения в плоском изотермическом слое газа, состоящем из двух- или трехуровенных атомов (в последнем случае переходы 1—2 запрещены). Учитывается вынужденное излучение и перераспределение квантов по частотам при рассеянии. С помощью метода самосогласованных оптических глубин В. А. Амбарцумяна задача сводится к решению линейных интегральных уравнений и определению истинных оптических толщин слоя в центрах линий из соотношений, связывающих $X$- и $Y$-функции или их моменты.

В последнее время благодаря новым методам в теории переноса излучения, введенным В. А. Амбарцумяном [1—3], появилась возможность строгого решения некоторых нелинейных задач. Были рассмотрены, в частности, задачи о диффузном отражении света от одномерной полубесконечной среды, состоящей из трехуровенных атомов [4], и о поле излучения в трехмерной среде конечной оптической толщины, состоящей из атомов с тремя (при условии, что переходы 1—2 запрещены) и двумя уровнями [5]. Представляет интерес применение указанных методов к проблеме диффузии излучения в спектральных линиях с учетом перераспределения квантов по частотам при рассеянии. В данной работе рассматривается простейшая задача о просветлении среды в спектральной линии под действием внешних или внутренних источников излучения. Оказывается, что учет перераспределения квантов по частотам не вносит принципиальных трудностей. Метод самосогласованных оптических глубин позволяет свести задачу к решению линейных интегральных уравнений, причем оптическая толщина слоя находится из соотношений, связывающих функции Амбарцумяна или их моменты.

*Основные уравнения.* Рассмотрим плоский изотермический слой газа, имеющий толщину $z_0$ и состоящий из двухуровенных атомов и свободных электронов. Обозначим через $n_e$, $n_1$ и $n_2$ соответственно концентрации свободных электронов, атомов в основном и возбужденном состояниях. Пусть на границу $z=0$ слоя падает внешнее излучение, имеющее некоторое угловое и спектральное распределение. Примем следующие допущения: а) электронная концентрация постоянна в слое, б) индикатриса рассеяния сферическая, в) диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частотам. Это означает, что вероятность переизлучения кванта в заданной частоте не зависит от частоты поглощенного кванта и пропорциональна коэффициенту поглощения.

Уравнение переноса излучения в спектральной линии имеет при этих предположениях вид

$$\eta \frac{dI_\nu}{dz} = -\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right) k_\nu I_\nu + n_2 A_{21} \frac{k_\nu}{\int\limits_0^\infty k_\nu d\nu} \frac{h\nu}{4\pi}, \qquad (1)$$

где $I_\nu$ — интенсивность диффузного излучения, идущего под углом $\arccos\eta$ к внутренней нормали к границе $z=0$, $k_\nu$ — коэффициент поглощения в частоте $\nu$, рассчитанный на один атом. В дальнейшем удобно записывать $k_\nu$ в форме $k_\nu = k_0 \alpha(x)$, где $k_0$ — коэффициент поглощения в центре линии, а $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}$ — расстояние от центра линии, выраженное в подходящих единицах (например, допплеровских ширинах).

Степень возбуждения атомов определяется из условия стационарности

$$n_2 (A_{21} + B_{21}\rho + n_e q_{21}) = n_1 (B_{12}\rho + n_e q_{12}), \qquad (2)$$

где $\rho$ — усредненная с весом $\alpha(x)$ по ширине линии плотность излучения, являющаяся суммой плотностей диффузного излучения и излучения, обусловленного внешними источниками:

$$\rho = \rho_d + \rho_0, \qquad (3)$$

а $q_{ik}$ — вероятности возбуждения и деактивации атомов посредством электронных ударов.

Введем оптическую глубину в центре линии

$$\tau = \int\limits_0^z k_0 \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right) dz. \qquad (4)$$

В соответствии с методом самосогласованных оптических глубин; оптическая толщина слоя $\tau_0$ остается пока неопределенной.

Обозначая далее $I_\nu/h\nu$ через $N(\tau, \eta, x)$ и пользуясь известным соотношением

$$\int_0^\infty k_\nu d\nu = \frac{h\nu_0}{c} B_{12}, \tag{5}$$

запишем уравнение переноса в виде

$$\eta \frac{dN(\tau, \eta, x)}{d\tau} = -\alpha(x) N(\tau, \eta, x) + \frac{c}{4\pi h\nu_0} \alpha(x) B(\tau, \tau_0), \tag{6}$$

где

$$B(\tau, \tau_0) = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \frac{\frac{g_1}{g_2}\frac{n_2}{n_1}}{1 - \frac{g_1}{g_2}\frac{n_2}{n_1}}. \tag{7}$$

В случае, когда степень возбуждения определяется формулой Больцмана, функция $B(\tau, \tau_0)$ совпадает с функцией Планка, которую мы будем обозначать через $B^*$.

Обратимся к условию стационарности (2). Из него следует

$$B(\tau, \tau_0) = \lambda\varphi(\tau, \tau_0) + (1-\lambda) B^*, \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e q_{21}\left(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}\right)}. \tag{9}$$

Уравнения (6) и (8) при граничных условиях

$$\begin{aligned} N(0, \eta, x) &= 0 \quad \text{при } \eta > 0, \\ N(\tau_0, \eta, x) &= 0 \quad \text{при } \eta < 0, \end{aligned} \tag{10}$$

эквивалентны следующему хорошо изученному в линейной теории интегральному уравнению для функции $B(\tau, \tau_0)$:

$$B(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} K(|\tau-\tau'|) B(\tau', \tau_0) d\tau' + \lambda\varphi_0(\tau) + (1-\lambda) B^*. \tag{11}$$

Здесь

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx, \tag{12}$$

$A$ — нормировочная постоянная

$$A\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\,dx=1, \tag{13}$$

и $E_1(t)$ — интегральная показательная функция первого порядка

$$E_1(t)=\int\limits_{1}^{\infty}e^{-tx}\,\frac{dx}{x}. \tag{14}$$

Теперь мы можем найти зависимость истинной оптической толщины слоя $\tau_0$ от предельной оптической толщины $y_0$, когда все атомы находятся в основном состоянии:

$$y_0=\int\limits_0^{z_0}k_0(n_1+n_2)\,dz. \tag{15}$$

Сравнивая (4), (7) и (15), получаем

$$y_0=\tau_0+\gamma c\int\limits_0^{\tau_0}B(\tau,\ \tau_0)\,d\tau, \tag{16}$$

где постоянная

$$\gamma=\frac{c^2}{8\pi h\nu_0^3}\left(1+\frac{g_2}{g_1}\right). \tag{17}$$

Уравнение (16) и должно служить для нахождения $\tau_0$.

В дальнейшем удобнее рассматривать отдельно случаи, когда действуют только внешние или только внутренние источники излучения.

*Внешние источники излучения.* Рассмотрим сначала случай, когда переходами под действием электронных ударов в среде можно пренебречь. Тогда $\lambda=1$ и, как это видно из соотношения (8), плотность излучения $\rho(\tau,\ \tau_0)$ равна $B(\tau,\ \tau_0)$. Следовательно, для определения $\rho(\tau,\ \tau_0)$ мы имеем уравнение

$$\rho(\tau,\ \tau_0)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}K(|\tau-\tau'|)\,\rho(\tau',\ \tau_0)\,d\tau'+\rho_0(\tau). \tag{18}$$

Обозначим интенсивность падающего на среду излучения через $h\nu N_\nu^0(\zeta,\ \varphi)$. Тогда

$$\rho_0(\tau) = 2\pi A \frac{h\nu_0}{c} \int_0^1 d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) N_0(\zeta, x) e^{-\alpha(x)\frac{\tau}{\zeta}} dx, \tag{19}$$

где

$$N_0(\zeta, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_*^0(\zeta, \varphi)\, d\varphi. \tag{20}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$P(\tau, z, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z, \tau_0)\, d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}, \tag{21}$$

где $\lambda$ считается произвольным, так как в дальнейшем нас будет интересовать и случай $\lambda \neq 1$. Полагая в (21) $z = \dfrac{\zeta}{\alpha(x)}$, $\lambda = 1$ и сравнивая полученное уравнение с (18) и (19), находим

$$\rho(\tau, \tau_0) = 8\pi^2 A \frac{h\nu_0}{c} \int_0^1 d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) N_0(\zeta, x) P\left(\tau, \frac{\zeta}{\alpha(x)}, \tau_0\right) dx. \tag{22}$$

Из формул (16) и (22) видно, что для нахождения истинной оптической толщины слоя необходимо знать функцию

$$J(z, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} P(\tau, z, \tau_0)\, d\tau. \tag{23}$$

Значение интеграла в правой части формулы (23) было дано в [6]. Используя его находим:

$$J(z, \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{z[X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]}{1 - \frac{\lambda}{2}[X_0(\tau_0) - Y_0(\tau_0)]}, \tag{24}$$

где функции

$$X(z, \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(0, z, \tau_0), \qquad Y(z, \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau_0, z, \tau_0) \tag{25}$$

являются обобщением функций Амбарцумяна на случай диффузии излучения с полным перераспределением по частотам и

$$X_0(\tau_0) = \int_0^\infty G(z)\, X(z, \tau_0)\, dz,$$
$$Y_0(\tau_0) = \int_0^\infty G(z)\, Y(z, \tau_0)\, dz. \tag{26}$$

Здесь

$$G(z) = 2A \int_{x(z)}^\infty \alpha^2(t)\, dt, \tag{27}$$

причем $x(z) = 0$ при $z \leqslant 1$ и $\alpha[x(z)] = \frac{1}{z}$ при $z > 1$.

В случае чистого рассеяния

$$X_0(\tau_0) + Y_0(\tau_0) = 2, \tag{28}$$

так что

$$J(z, \tau_0) = \frac{1}{4\pi Y_0(\tau_0)}\, z\, [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)] \tag{29}$$

и уравнение для нахождения $\tau_0$ имеет вид

$$y_0 = \tau_0 + 8\pi^2 A h\nu_0 \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx \int_0^1 N_0(\zeta, x)\, J\left(\frac{\zeta}{\alpha(x)}, \tau_0\right) d\zeta. \tag{30}$$

Естественно, что полученное значение $\tau_0$ не зависит от распределения падающего излучения по азимуту. Если же $N_0(\zeta, x) = N_0 = \text{const}$, то, учитывая, что при $\lambda = 1$ имеет место соотношение [6]

$$\int_0^\infty [X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]\, z\, G(z)\, dz = \tau_0 Y_0(\tau_0), \tag{31}$$

из двух последних формул находим

$$y_0 = (1 + 2\pi\gamma\, h\nu_0 N_0)\, \tau_0. \tag{32}$$

Таким образом, достаточно большой поток внешнего излучения может вызвать существенное просветление среды в спектральной линии.

Следует отметить, что формулы, аналогичные приведенным выше, можно найти и в случае, когда кванты сохраняют частоту при рассеянии. Тогда вместо (30) будем иметь (см. [7], стр. 208) следующую связь между $\tau_0$ и $y_0$:

$$y_0 = \tau_0 + \frac{2\pi\gamma}{\beta_0(\tau_0)} \int_0^1 I_0(\zeta)\,[\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)]\,\zeta\, d\zeta, \qquad (33)$$

где $I_0(\zeta)$ — интенсивность падающего извне излучения, $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$ — функции Амбарцумяна, $\beta_0(\tau_0)$ — нулевой момент функции $\psi(\zeta, \tau_0)$. В частном случае, когда на среду падает параллельный пучок излучения под углом $\arccos \zeta$ к внешней нормали,

$$y_0 = \tau_0 + \frac{2\pi\gamma}{\beta_0(\tau_0)} I_0 \zeta\,[\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)]. \qquad (34)$$

Функции $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$ хорошо изучены, поэтому численное решение уравнений (33) или (34) не представляет труда. Асимптотические выражения для этих функций были найдены В. В. Соболевым [8], их численные значения (а также значения первых трех моментов) приведены в работе Собоути [9]. $X$- и $Y$-фукнции изучены в работах В. В. Иванова [6, 10].

*Внутренние источники излучения.* Обратимся к случаю, когда источником возбуждения в среде являются электронные удары. Вводя функцию

$$S(\tau, \tau_0) = \frac{B(\tau, \tau_0)}{B^*}, \qquad (35)$$

получаем из (11):

$$S(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)\, S(\tau', \tau_0)\, d\tau' + 1 - \lambda. \qquad (36)$$

Как легко видеть, $S(\tau, \tau_0)$ связана с функцией $P(\tau, \tau_0)$, определяемой равенством

$$P(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^{\infty} P(\tau, z, \tau_0)\, G(z)\, dz \qquad (37)$$

следующим соотношением

$$S(\tau, \tau_0) = 1 - P(\tau, \tau_0) - P(\tau_0 - \tau, \tau_0). \qquad (38)$$

Подставляя (35) и (38) в (16), находим

$$y_0 = \tau_0 + \gamma c B^* \left[ \tau_0 - 2 \int_0^{\tau_0} P(\tau, \tau_0)\, d\tau \right]. \qquad (39)$$

Входящий в уравнение (39) интеграл легко можно выразить через $X$- и $Y$-функции. Действительно, интегрируя (37) по $\tau$ от 0 до $\tau_0$, получаем

$$\int_0^{\tau_0} P(\tau, \tau_0)\, d\tau = 2\pi \int_0^{\infty} G(z)\, J(z, \tau_0)\, dz. \tag{40}$$

Подставляя $J(z, \tau_0)$ из (24) в (40) и учитывая найденное в [6] соотношение

$$X(\infty, \tau_0) = Y(\infty, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}[X_0(\tau_0) - Y_0(\tau_0)]}, \tag{41}$$

имеем:

$$\int_0^{\tau_0} P(\tau, \tau_0)\, d\tau = \frac{\lambda}{2} X(\infty, \tau_0) \int_0^{\infty} G(z)[X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]\, z\, dz. \tag{42}$$

Таким образом, в данном случае уравнение, служащее для нахождения $\tau_0$, имеет вид

$$y_0 = \tau_0 + \gamma c B^* \left\{\tau_0 - \lambda X(\infty, \tau_0) \int_0^{\infty} G(z)[X(z, \tau_0) - Y(z, \tau_0)]\, z\, dz\right\}. \tag{43}$$

Как и следовало ожидать, при $\lambda \to 1$ (в рассматриваемой модели это означает отсутствие источников возбуждения) уравнения (43), (28), (31) и (41) дают $\tau_0 \to y_0$. Поэтому в данном случае роль диффузного излучения в просветлении среды не может быть значительной.

*Атомы с тремя уровнями.* Приведенные выше результаты частично обобщаются на случай, когда атомы могут находиться в трех состояниях, причем второе состояние является метастабильным. Рассмотрим задачу об освещении плоского слоя внешними источниками излучения. Переходами под действием электронных ударов будем при этом пренебрегать. Допустим, что коэффициенты поглощения в линиях 1—3 и 2—3 имеют один и тот же вид и что вероятность излучения кванта в заданной частоте при переходе атома из третьего состояния не зависит от того, каким образом атом попал в это состояние. Все величины, относящиеся к линиям 1—3 и 2—3 обозначим соответственно индексами 1 и 2.

Связь истинных оптических толщин слоя в центрах линий

$$\tau_i^0 = \int_0^{z_0} \left( n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3 \right) k_i \, dz, \quad (i = 1, 2) \tag{44}$$

с предельной оптической толщиной

$$y_0 = \int_0^{z_0} (n_1 + n_2 + n_3) \, k_1 dz \tag{45}$$

находится совершенно так же, как в работе Н. Б. Енгибаряна [5], и дается формулами

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_1 g_1} \int_0^{\tau_1^0} \rho_1 (\tau, \tau_1^0) \, d\tau + \tau_1^0 + \frac{k_1}{k_2} \tau_2^0 \\ y_0 &= \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_2 g_2} \frac{k_1}{k_2} \int_0^{\tau_2^0} \rho_2 (\tau, \tau_2^0) \, d\tau + \tau_1^0 + \frac{k_1}{k_2} \tau_2^0 \end{aligned} \right| \tag{46}$$

где $\sigma_i = \frac{8\pi h \nu_i^3}{c^3}$, а функции $\rho_i (\tau, \tau_i^0)$ удовлетворяют уравнениям

$$\rho_i (\tau, \tau_i^0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_i^0} K (|\tau - \tau'|) \, \rho_i (\tau', \tau_i^0) \, d\tau' + \rho_{0i} (\tau). \tag{47}$$

Входящие в систему уравнений (46) интегралы следующим образом выражаются через $X$- и $Y$-функции и числа квантов, падающих на среду в линиях 1—3 и 2—3:

$$\int_0^{\tau_i^0} \rho_i (\tau, \tau_i^0) \, d\tau = 8\pi^2 A \frac{h\nu_i}{c} \int_0^1 d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \alpha (x) \, N_i (\zeta, x) \, J \left( \frac{\zeta}{\alpha (x)}, \tau_i^0 \right) dx, \tag{48}$$

где

$$J (z, \tau_i^0) = \frac{1}{4\pi Y_0 (\tau_i^0)} z [X (z, \tau_i^0) - Y (z, \tau_i^0)]. \tag{49}$$

Отметим простое решение уравнений (46), получающееся при $N_i (\zeta, x) = N_i = \text{const}$:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1^0 &= \frac{y_0}{1+2\pi\delta I_1+\dfrac{\sigma_2 g_2}{\sigma_1 g_1}\dfrac{I_1}{I_2}} \\ \tau_2^0 &= \frac{y_0}{1+2\pi\delta I_1+\dfrac{\sigma_2 g_2}{\sigma_1 g_1}\dfrac{I_1}{I_2}}\,\frac{\sigma_2 g_2 k_2}{\sigma_1 g_1 k_1}\frac{I_1}{I_2} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Здесь $\delta = \dfrac{g_1+g_2+g_3}{c\sigma_1 g_1}$; $I_1$ и $I_2$ — интенсивности падающего излучения в центрах линий.

Следует отметить, что иногда, не решая уравнений, определяющих $\tau_0$, можно предполагать, что истинная оптическая толщина слоя велика. В этом случае можно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Амбарцумяна, найденными в [6, 8, 10]. К сожалению, отсутствие таблиц $X$- и $Y$-функций не позволяет сделать вычисления, относящиеся к случаям, когда указанное выше условие не выполняется.

Автор благодарен академику В. А. Амбарцумяну и В. В. Иванову за критические замечания, сделанные при просмотре статьи.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

## ON SOME NONLINEAR PROBLEMS OF RADIATIVE TRANSFER IN SPECTRAL LINES

V. Ju. TEREBIZH

The problem of diffusion of radiation in a plane-parallel isothermal layer of gas, consisting of two or three-level atoms is considered (in the last case transitions 1—2 are forbidden). The stimulated emission and the frequency redistribution are taken into account. The application of Ambartsumian's method of self-consistent optical depths reduces the problem to the solution of linear integral equations and to the determination of real optical thicknesses of a layer in the center of the lines from relations bounding the $X$- and $Y$-functions or their moments.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 38, 225, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 39, 159, 1964.

3. *В. А. Амбарцумян*, сб. „Теория звездных спектров", Наука, М., 1966.
4. *А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 1, 285, 1965.
5. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 297, 1965.
6. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 40, 257, 1963.
7. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
8. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
9. *Y. Sobouti*, Ap. J., Suppl. ser., 7, № 72, 1963.
10. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 41, 1097, 1964.