АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 МАЙ, 1967 ВЫПУСК 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС В ГАЛАКТИКАХ ПО ДАННЫМ ЛУЧЕВЫХ СКОРОСТЕЙ И ФОТОМЕТРИИ

В. С. СИЗИКОВ

Поступила 2 февраля 1967

Предложена модель галактики в виде неоднородного сфероида с переменной сферичностью. Дается вывод и решение интегральных уравнений, связывающих плотность, сферичность и отношение светимость—масса с законом кругового вращения в плоскости симметрии и с результатами фотометрии. В заключении предлагается способ отыскания круговых скоростей для плоскости симметрии.

Введение. Различными авторами были предложены и разработаны следующие модели масс галактик, имеющих ось и плоскость симметрии:

1. Плоская модель—Уайз и Мэйолл [1], П. П. Паренаго [2], Брандт [3].

2. Неоднородный сфероид (поверхности постоянной плотности — подобные сфероиды) — Перек [4], Г. Г. Кузмин [4], Бэрбиджи и Прендергаст [6] и с использованием предположения об эллипсоидальном распределении остаточных скоростей: модели Галактики Г. М. Идлиса [7, 8], Г. Г. Кузмина [9, 10].

3. Суперпозиция однородных сфероидов различной плотности и сферичности — модель Галактики Оорта [11, 12], модель ядра М 31 Кинмана [13].

4. Суперпозиция неоднородных сфероидов с различными законами плотности и сферичностями — модель Галактики Шмидта [14] и ее варианты, построенные на основе более точных данных [15, 16].

5. Модель общего типа ($\rho = \rho(R, z)$), но в предположении эллипсоидального распределения остаточных скоростей — П. П. Паренаго [17, 18].

В данной работе предлагается модель неоднородного сфероида с переменной сферичностью эквиденсит и рассматривается вопрос о ее расчете на основе данных лучевых скоростей и фотометрии.

Вывод уравнения, связывающего круговую скорость с законом распределения масс. Пусть эквиденситы (поверхности постоянной плотности) в галактике являются сфероидами с переменной сферичностью $c = c(a)$, где a — большая полуось сфероида. Обозначим через $\rho(a)$ плотность. Тогда R-компонент напряженности, создаваемой в некоторой точке (R, z) слоем, заключенным между двумя сфероидами с большими полуосями a и $a + da$, будет равен:

$$d\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \rho(a)\frac{d\chi}{da}da, \tag{1}$$

где $\Phi = \Phi(R, z)$ — потенциал, $\chi = \chi(R, z, c(a))$ — R — компонент напряженности, создаваемой в точке (R, z) однородным сфероидом единичной плотности с большой полуосью a и сферичностью $c(a)$. Будем рассматривать случай $z = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \int\limits_0^R \rho(a)\frac{d\chi}{da}da + \int\limits_R^A \rho(a)\frac{d\chi'}{da}da, \tag{2}$$

причем χ — наружная, а χ' — внутренняя напряженность однородного сфероида; A — большая полуось, при которой плотность обращается в нуль (то есть $\rho(A) = 0$). При этом (см., напр., [14], [19, стр. 60])

$$\chi = -\frac{2\pi Gc}{e^3}R(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha), \tag{3}$$

где $e = e(a) = \sqrt{1 - c^2}$ — эксцентриситет, G — постоянная тяготения, $\alpha = \arcsin(ea/R)$. Для χ' выражение аналогично (3) с той лишь разницей, что в этом случае $\alpha = \arcsin e$. Поэтому

$$\chi = -\frac{2\pi Gc}{e^3}R\left(\arcsin\frac{ea}{R} - \frac{ea}{R^2}\sqrt{R^2 - e^2a^2}\right), \tag{4}$$

$$\chi' = -2\pi GR\frac{c(\arcsin e - ce)}{e^3}. \tag{5}$$

Далее предположим, что нам известна круговая скорость вращения в плоскости симметрии $V_c(R)$. Тогда

$$V_c^2(R) = -R\int\limits_0^R \rho(a)\frac{d\chi}{da}da - R\int\limits_R^A \rho(a)\frac{d\chi'}{da}da \tag{6}$$

или после интегрирования по частям:

$$\omega^2(R) = \int_0^R \frac{\varkappa}{R}\frac{d\varphi}{da}\,da + \int_R^A \frac{\varkappa'}{R}\frac{d\varphi}{da}\,da, \tag{7}$$

где $\omega = \frac{V_c}{R}$ — угловая скорость кругового вращения. Дифференцируя (7) по R и используя (4) и (5), найдем окончательно:

$$\int_0^R \frac{ca^3}{\sqrt{R^2-e^2a^2}}\frac{d\rho}{da}\,da = \frac{\omega}{2\pi G}R^3\frac{\partial\omega}{\partial R}. \tag{8}$$

Уравнение (8) позволяет при известной угловой скорости кругового вращения в плоскости симметрии $\omega(R)$ определять одну из функций: $\rho(a)$ или $c(a)$, если одна из них известна.

В случае $c = \text{const}$ с помощью (4)—(6) найдем

$$\int_0^R \rho(a)\frac{a^2da}{\sqrt{R^2-e^2a^2}} = \frac{V_c^2(R)}{4\pi Gc}. \tag{9}$$

Уравнение (9) было впервые выведено Г. Г. Кузминым [5], а затем Бэрбиджами и Прендергастом [6] и неоднократно применялось последними для расчетов плотностей.

Обобщение уравнения П. Н. Холопова. Для отыскания дополнительных соотношений будем полагать, что проведена фотометрия галактики, в результате которой получены кривые постоянной „видимой" плотности (напр., [25], [26]). Сделаем обобщение уравнения, связывающего результат фотометрии с пространственной плотностью, выведенного П. Н. Холоповым [20] для случая: $\rho = \rho(a)$, $c = \text{const}$, на наш случай: $\rho = \rho(a)$, $c = c(a)$.

Пусть i — угол между осью вращения галактики и лучом зрения. Введем две правые галактоцентрические системы координат: XYZ и $X'Y'Z'$. Оси X и X' направим по линии узлов, Z — по оси вращения, Z' — по лучу зрения. В картинной плоскости введем дополнительно полярные координаты: r — расстояние от центра и ϑ — угол, отсчитываемый от линии узлов. Обозначим через $\varkappa$ отношение светимость — масса. Будем полагать: $\varkappa = \varkappa(a)$. Тогда светимость в проекции на картинную плоскость будет выражаться следующим образом:

$$F(r, \beta) = \int\limits_{z_1'(r,\beta)}^{z_2'(r,\beta)} \varkappa(a)\rho(a)\,dz', \tag{10}$$

где z_1' и z_2' — z'-координаты точек пересечения луча зрения с внешним сфероидом с большой полуосью A. При этом считаем, что фон исключен, то есть $\varkappa(A)\cdot\rho(A) = 0$. Для отыскания связи z' и a запишем уравнение некоторого сфероида в системе XYZ:

$$c^2(a)(x^2 + y^2) + z^2 = a^2c^2(a). \tag{11}$$

Так как

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y'\cos i + z'\sin i, \\ z &= -y'\sin i + z'\cos i, \end{aligned}$$

то в системе $X'Y'Z'$ уравнение этого же сфероида будет иметь вид:

$$c^2(a)x'^2 + [c^2(c)\cos^2 i + \sin^2 i]y'^2 + [c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i]z'^2 - \\ - 2[1 - c^2(a)]\sin i\cos i\cdot y'z' = a^2c^2(a). \tag{12}$$

Луч зрения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cos\beta, \\ y' &= r\sin\beta \end{aligned}\right\}$$

пересекает сфероид (12) в точках:

$$z_{1,2}' = \frac{[1 - c^2(a)]\,r\sin i\cos i\sin\beta}{c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i} \mp \tag{13}$$

$$\mp \frac{c(a)\sqrt{[c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i](a^2 - r^2\cos^2\beta) - r^2\sin^2\beta}}{c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i}.$$

Данный луч касается в точке:

$$z_0' = z_0'(r, \beta) = \frac{[1 - c^2(a_0)]\,r\sin i\cos i\sin\beta}{c^2(a_0)\sin^2 i + \cos^2 i} \tag{14}$$

сфероида с большой полуосью

$$a_0 = r\sqrt{\cos^2\beta + \frac{\sin^2\beta}{c^2(a_0)\sin^2 i + \cos^2 i}}. \tag{15}$$

В результате имеем:

$$F(r,\beta)=\int\limits_{z_1'(A)}^{z_2'(A)}\varkappa(a)\rho(a)\,dz'=\int\limits_{a_0}^{A}\varkappa(a)\rho(a)\frac{dz_2'}{da}da+$$

$$+\int\limits_{A}^{a_0}\varkappa(a)\rho(a)\frac{dz_1'}{da}da=\int\limits_{a_0}^{A}\varkappa(a)\rho(a)\frac{d(z_2'-z_1')}{da}da. \tag{16}$$

После интегрирования по частям (16) получим окончательно:

$$F(r,\beta)=-2\int\limits_{a_0}^{A}\frac{c(a)}{\sqrt{c^2(a)\sin^2 i+\cos^2 i}}\times$$

$$\times\sqrt{a^2-r^2\left(\cos^2\beta+\frac{\sin^2\beta}{c^2(a)\sin^2 i+\cos^2 i}\right)}\frac{d(\varkappa\rho)}{da}da, \tag{17}$$

где a_0 выражается формулой (15). Из уравнения (17) видно, что при произвольных законах $\varkappa(a)\cdot\rho(a)$ и $c(a)$ видимые эквиденситы не являются эллипсами, так как при движении, например, вдоль кривой (15), то есть по эллипсу с большой полуосью a_0 и сферичностью $\sqrt{c^2(a_0)\sin^2 i+\cos^2 i}$, $F(r,\beta)$ не обязательно постоянно. Движение же по эллипсу с другим значением сферичности, но с той же большой полуосью a_0 может дать постоянство $F(r,\beta)$ лишь при условии некоторой зависимости между функциями $\varkappa(a)\cdot\rho(a)$ и $c(a)$. Все сказанное относится и к случаю постоянства $\varkappa$.

Рассмотрим частные случаи уравнения (17). При $\beta=0^\circ$ (наблюдения вдоль линии узлов):

$$F(r,0^\circ)=-2\int\limits_{r}^{A}\frac{c(a)}{\sqrt{c^2(a)\sin^2 i+\cos^2 i}}\sqrt{a^2-r^2}\frac{d(\varkappa\rho)}{da}da. \tag{18}$$

При $\beta=90^\circ$:

$$F(r,90^\circ)=-2\int\limits_{a_0}^{A}\frac{c(a)}{\sqrt{c^2(a)\sin^2 i+\cos^2 i}}\times$$

$$\times\sqrt{a^2-\frac{r^2}{c^2(a)\sin^2 i+\cos^2 i}}\frac{d(\varkappa\rho)}{da}da, \tag{19}$$

где

$$a_0=\frac{r}{\sqrt{c^2(a_0)\sin^2 i+\cos^2 i}}.$$

При $c = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$, обозначая:

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 \sin^2 i + \cos^2 i}},$$

с помощью (16) получим уравнение, выведенное П. Н. Холоповым [20]:

$$\varkappa^{-1} \cdot F(r, \beta) = 2\gamma \int_{a_0}^{A} \frac{\rho(a)\, a\, da}{\sqrt{a^2 - a_0^2}}, \tag{20}$$

где a_0 выражается формулой (15).

Из анализа уравнений (17)—(20) можно сделать следующие выводы:

1. Если через $\eta(a)$ обозначить отношение полуосей „видимой" эквиденситы, то в первом приближении можно положить:

$$c(a) = \frac{\sqrt{\eta^2(a) - \cos^2 i}}{\sin i}, \tag{21}$$

то есть, несмотря на сказанное выше, в первом приближении „видимые" эквиденситы можно считать эллипсами и при этом величина η будет играть роль „видимой" сферичности.

2. Уравнения (18) и (19) (и вообще два уравнения типа (17) с различными β) не являются прямым следствием друг друга, в противовес случаю постоянства c, а образуют систему двух уравнений, у которых при равенстве левых частей правые части не являются тождественно равными.

В следующем разделе эти два обстоятельства будут использованы.

Решение уравнений (8) и (18). Уравнение (8) аналитически не решается (так как не решается аналитически его частный случай (9)), но может быть решено численно. Но прежде чем остановиться на способе решения (8), проанализируем кратко метод решения уравнения (9), предложенный Бэрбиджами и Прендергастом [6]. В их методе делается разложение функций скорости и плотности в ряды по степеням большой полуоси и задача сводится к нахождению коэффициентов разложений.

Заметим следующее (как это уже отмечалось в [21]):

В разложениях используется конечное число членов (параметров в случае разложения скорости). Коэффициенты в разложении скорости определяются способом наименьших квадратов по точкам наблюдений, что при некотором числе параметров может дать хорошую общую картину, но почти полностью сглаживает или искажает местные флуктуации в кривой вращения и, как результат, в функции плотности. К тому же изменение числа параметров обычно ведут к заметным изменениям плотности и массы.

Учитывая сказанное, можно предложить следующий способ решения уравнения (8) (который качественно пригоден и для решения уравнения (9)). Способом, описанным ранее [21], находим непрерывную кривую $V(R)$. Разобьем промежуток, на котором дана функция $V(R)$, на равные достаточно малые интервалы h. Вводя обозначения:

$$P = P(R, a, c(a)) = \frac{ca^3}{R^2\sqrt{R^2 - e^2a^2}}, \tag{22}$$

$$E = \frac{\omega}{2\pi G} R \frac{\partial\omega}{\partial R}, \tag{23}$$

$$g(a) = \frac{d\rho}{da}, \tag{24}$$

запишем уравнение (8) в виде:

$$\int_0^{kh} Pg(a)\, da = E(kh), \tag{25}$$

где $k = 1, 2, 3, \cdots$. Неизвестной функцией считаем $g(a)$. Сделаем разложение интеграла, входящего в (25), по формуле Симпсона (формулы прямоугольников и трапеций, как показали пробные вычисления, дают плохую точность при малых k). В случае нечетного k введем дополнительную точку: $R = h/2$, при этом на интервале $(0, h)$ сделаем интерполяцию:

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(0) + g(h)] = \frac{1}{2} g(h),$$

так как из физических соображений $g(0) = 0$. В результате можно получить следующие соотношения:

1) $k = 1$.

$$g(h) = 6\frac{E(h)}{h} \cdot \frac{1}{2P\left(R = h,\ a = \frac{h}{2}\right) + 1}. \tag{26}$$

2) k — четное $(= 2, 4, 6, \cdots)$.

$$g(kh) = 3\frac{E(kh)}{h} - 2\sum_{j=1}^{k-1} P(R = kh,\ a = jh)\, g(jh)\, \nu_j, \tag{27}$$

где

$$\lambda_j = \begin{cases} 2 \text{ при } j \text{ нечетном,} \\ 1 \text{ при } j \text{ четном.} \end{cases}$$

3) k — нечетное ($= 3, 5, 7, \cdots$).

$$g(kh) = 3\frac{E(kh)}{h} - \frac{g(h)}{2}\left[2P\left(R = kh,\ a = \frac{h}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 3P(R = kh,\ a = h)\right] - 2\sum_{j=2}^{k-1} P(R = kh,\ a = jh)\, g(jh)\, \mu_j, \tag{28}$$

где

$$\mu_j = \begin{cases} 2 \text{ при } j \text{ четном,} \\ 1 \text{ при } j \text{ нечетном.} \end{cases}$$

После отыскания $g(a)$ нетрудно восстановить $\rho(a)$:

$$\rho(a) = -\int_a^A g(t)\, dt. \tag{29}$$

Переходим к решению фотометрических уравнений. В данной работе мы ограничимся лишь решением уравнения (18) относительно $\varkappa(a)$, полагая при этом, что функции $\rho(a)$ и $c(a)$ уже найдены в некотором приближении. Введем обозначение:

$$\frac{c(a)}{\sqrt{c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i}}\,\frac{d(\varkappa\rho)}{da} = \frac{df}{da}. \tag{30}$$

Тогда (18) примет вид:

$$-2\int_r^A \frac{df}{da}\sqrt{a^2 - r^2}\, da = F(r,\ 0°).$$

Это—промежуточное уравнение Цейпеля. Его (промежуточное же) решение [22, стр. 221]:

$$f(a) = -\frac{1}{\pi}\int_a^A \frac{F'(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Сделаем формальную подстановку: $r^2 - a^2 = \xi^2$. Тогда, вводя обозначение:

$$\Omega(r) = -\frac{1}{r}\,\frac{dF(r)}{dr}, \tag{31}$$

получим:

$$f(a) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\sqrt{A^2-a^2}} \Omega\left(\sqrt{\xi^2 + a^2}\right) d\xi, \tag{32}$$

после чего, вводя последнее обозначение:

$$\varepsilon(a) = \frac{\sqrt{c^2(a)\sin^2 i + \cos^2 i}}{c(a)}, \tag{33}$$

найдем окончательно, используя (30):

$$\varkappa(a) = -\frac{1}{\rho(a)} \int\limits_{a}^{A} \varepsilon(t) \frac{df(t)}{dt} dt. \tag{34}$$

Итак, при известных $\rho(a)$ и $c(a)$ формулы (31)—(34) дают решение уравнения (18) относительно $\varkappa(a)$.

Теперь можно сформулировать общий план определения функций $c(a)$, $\rho(a)$ и $\varkappa(a)$. В первом приближении по „видимым" эквиденситам с помощью соотношения (21) находим функцию $c(a)$. Затем по формулам (26)—(29), дающим решение уравнения (8), находим $\rho(a)$. Тогда формулы (31)—(34) дадут возможность определить $\varkappa(a)$. Во втором и последующих приближениях функцию $c(a)$ находим путем решения уравнения типа (17) при $\beta \neq 0$ (для сокращения записей мы в данной работе этого решения не приводим), а функции $\rho(a)$ и $\varkappa(a)$ определяем аналогично первому приближению (соответственно по формулам (26)—(29) и (31)—(34)).

Определение закона кругового вращения в плоскости симметрии. В заключении остановимся на вопросе об определении из наблюдений круговой скорости вращения в плоскости симметрии $V_c(R)$. Как известно (см., напр., [23, стр. 539]),

$$V_c^2 = \overline{V}_\theta^2 + \overline{V_\theta'^2} - \overline{V_R^2} - R\frac{\partial \overline{V_R^2}}{\partial R} - \frac{R\overline{V_R^2}}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial R}. \tag{35}$$

Здесь $\overline{V}_\theta$ — скорость вращения центроида, V_θ' и V_R — остаточные скорости по θ и R, ρ — плотность — все величины для некоторой подсистемы. Бэрбиджи, например, большинство наблюдений для получения кривых вращения произвели в эмиссионных линиях H_α и [N II] λ 6583, которые дают межзвездный газ, газовые туманности и сверхгиганты, расположенные вблизи плоскости симметрии. Совокупность перечисленных объектов образует некоторую подсистему и в данном случае в правой части (35) будут фигурировать величины, характерные для этой подсистемы. Покажем, как их можно определить.

Пусть i, r и β имеют прежние значения. Можно найти, что

$$\overline{V}_0 = \overline{V}\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2 i}} \cdot \frac{1}{\sin i}, \tag{36}$$

$$R = r\sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2 i}} \cdot |\cos\beta|, \tag{37}$$

где $\overline{V}$ — скорость вращения центроида в проекции на луч зрения, R — истинное расстояние от центра.

Далее из соотношений:

$$\overline{V'^2} = \overline{V_R^2}\cos^2\tau + \overline{V_\theta'^2}\cos^2\nu + \overline{V_z^2}\cos^2\varphi, \tag{38}$$

где

$$\cos^2\tau = \frac{\sin^2 i}{1 + \dfrac{\cos^2 i}{\operatorname{tg}^2\beta}},$$

$$\cos^2\nu = \frac{\sin^2 i}{1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2 i}},$$

$$\cos^2\varphi = \cos^2 i,$$

V' — остаточная лучевая скорость, V_z — остаточная скорость по z — координате, можно определить $\overline{V_R^2}$, $\overline{V_\theta'^2}$, $\overline{V_z^2}$ для каждого фиксированного R, для чего необходимы данные $\overline{V'^2}$ для каждого R не менее, чем в трех позиционных углах β. При этом плотность подсистемы ρ можно определить по зависимости интенсивности излучения от концентрации частиц (ср. [24]), причем выражение (35) показывает, что достаточно знать относительный ход плотности. Отметим, что подобные рассуждения можно использовать и при определении $V_c(R)$ по известной $\overline{V}_\theta(R)$ из данных радиоизлучения подсистемы водорода.

Способ решения уравнения (17), а также результаты численных расчетов будут опубликованы.

Ленинградский государственный университет

THE DISTRIBUTION OF MASS IN GALAXIES BY DATA OF RADIAL VELOCITIES AND OF PHOTOMETRY

V. S. SIZIKOV

A model of a galaxy in the form of a non-homogeneous spheroid with a variable sphericity is proposed. The derivation and a solution of integral equations which connect the density, the sphericity and the luminosity — mass ratio with the law of circular rotation in the plane of symmetry and with the results of photometry are given. Finally a way to find circular velocities in the plane of symmetry are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. B. Wyse, N. U. Mayall*, Ap. J., 95, 24, 1942.
2. *П. П. Паренаго*, Усп. астрон. наук, 4, 69, 1948.
3. *J. C. Brandt*, Ap. J., 131, 293, 1960.
4. *L. Perek*, Contr. Astr. Inst. Masaryk, Univ., Brno, 1, № 6, 1948
5. *Г. Г. Кузмин*, Публ. Тарт. астрон. обс., 32, 211, 1952.
6. *E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, K. H. Prendergast*, Ap. J., 130, 739, 1959.
7. *Г. М. Идлис*, Астрон. ж., 33, 20, 1956.
8. *Г. М. Идлис*, Труды Астроф. ин-та АН КазССР, I, 1961.
9. *Г. Г. Кузмин*, Астрон. ж., 33, 27, 1956.
10. *Г. Г. Кузмин*, Известия АН ЭССР, 5, № 2, 1956.
11. *J. H. Oort*, Bull. Astron. Inst. Nerherl., 6, № 249, 1932.
12. *J. H. Oort*, Ap. J., 116, 233, 1952.
13. *T. D. Kinman*, Ap. J., 142, 1376, 1965.
14. *M. Schmidt*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 13, № 468, 15, 1956.
15. *M. Schmidt*, Obs. Aspects Galactic Struct., Athens, 22/1—22/16, 1965.
16. *K. A. Innanen*, Ap. J., 143, 153, 1966.
17. *П. П. Паренаго*, Астрон. ж., 27, 329, 1950.
18. *П. П. Паренаго*, Астрон. ж., 29, 245, 1952.
19. *М. Ф. Субботин*, Курс неб. механики, т. III, ГТТИ, М.—Л., 1949.
20. *П. Н. Холопов*, Астрон. ж., 26, 110, 1949.
21. *В. С. Сизиков*, Вестн. ЛГУ, Серия математики, механики, астрономии, № 1, 137, 1967.
22. *П. П. Паренаго*, Курс зв. астрономии, ГТТИ, М., 1954.
23. *Т. А. Агекян*, Курс астроф. и зв. астрономии, т. II, М., 1962.
24. *H. C. van de Hulst, C. A. Muller, J. H. Oort*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 12 № 452, 117, 1954.
25. *D. S. Evans*, M. N., 111, 526, 1951.
26. *P. W. Hodge, A. E. Merchant*, Ap. J., 144, 875, 1965.