

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

МАЙ, 1967

ВЫПУСК 2

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФфуЗИИ ФОТОНОВ. IV.

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 24 января 1967

Рассматривается диффузия излучения с перераспределением по частотам в плоском слое оптической толщины τ_0 в центре спектральной линии. Получены уравнения, определяющие среднее число рассеяний фотонов при различных источниках излучения. Для оценки той же величины найдены некоторые неравенства и асимптотические формулы при $\tau_0 \gg 1$.

В предыдущих наших статьях [1] предполагалось, что диффузия фотона происходит без изменения частоты. Однако такое предположение не может быть принято при рассмотрении диффузии излучения в спектральной линии. В этом случае при элементарном акте рассеяния происходит перераспределение излучения по частотам, обусловленное рядом причин (см. напр., [2]).

В настоящей статье определяется среднее число рассеяний фотонов в спектральной линии. При этом делается предположение о полном перераспределении излучения по частотам. Такое предположение означает, что частота фотона, рассеянного элементарным объемом, не зависит от частоты фотона, падающего на этот объем. Точнее говоря, рассеянные фотоны могут обладать любой частотой с вероятностью, пропорциональной коэффициенту поглощения в этой частоте.

Из сказанного следует, что каждый фотон, поглощенный в любом месте среды, имеет большую вероятность выйти из среды непосредственно наружу, если он рассеивается в далеких от центра частях линии, в которых оптическая толщина среды мала. Благодаря этому среднее число рассеяний при диффузии излучения с перераспределением по частотам оказывается гораздо меньше, чем оно было бы в случае диффузии без изменения частоты (при большой оптической

толщине среды в центре линии). Очевидно, что среднее число рассеяний фотона в спектральной линии существенно зависит от контура коэффициента поглощения.

Мы будем считать, что диффузия излучения происходит в плоском слое, оптическая толщина которого в центре линии равна τ_0 . Среднее число рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине τ в центре линии, обозначим через $Q(\tau, \tau_0)$.

В начале статьи выводится уравнение, определяющее функцию $Q(\tau, \tau_0)$, а затем выясняются свойства этой функции. Особое внимание уделено получению некоторых неравенств, позволяющих оценивать среднее число рассеяний фотона без решения уравнения для функции $Q(\tau, \tau_0)$. В случае плоского слоя большой оптической толщины из этих неравенств найдены асимптотические формулы для величин $Q(0, \tau_0)$ и $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ при разных контурах коэффициента поглощения.

В конце статьи некоторые из полученных в ней результатов сравниваются с результатами других авторов.

Уравнение, определяющее $Q(\tau, \tau_0)$. Как уже сказано, мы будем предполагать, что диффузия излучения в спектральной линии происходит с полным перераспределением по частотам. В таком случае задача об определении поля излучения в плоском слое сводится к нахождению „функции источника“ $S(\tau, \tau_0)$ из интегрального уравнения

$$S(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) S(t, \tau_0) dt + g(\tau), \quad (1)$$

где функция $g(\tau)$ характеризует распределение и мощность источников энергии, а величина λ представляет собой вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния.

Ядро интегрального уравнения (1) зависит от контура коэффициента поглощения в спектральной линии. Коэффициент поглощения в частоте ν мы представим в виде $\sigma_\nu = \sigma_\nu \alpha(x)$, где ν_0 — центральная частота линии и x — некоторая безразмерная частота, отсчитываемая от центра линии (например, $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$, где $\Delta\nu_D$ — доплеровская полуширина). Тогда функция $K(\tau)$ будет определяться формулой

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(x) E_1[x(x)\tau] dx, \quad (2)$$

где

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} x(x) dx = 1. \quad (3)$$

Если функция источника $S(\tau, \tau_0)$ известна, то среднее число рассеяний фотонов при данных источниках излучения может быть вычислено по формуле

$$Q^* = \frac{\int_0^{\tau_0} S(\tau, \tau_0) d\tau}{\int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau}. \quad (4)$$

Другой способ определения величины Q^* состоит в использовании функции $Q(\tau, \tau_0)$, через которую величина Q^* выражается формулой

$$Q^* = \frac{\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) g(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau}. \quad (5)$$

Очевидно, что формула (5) имеет большие преимущества перед формулой (4), так как функция $Q(\tau, \tau_0)$, в отличие от функции $S(\tau, \tau_0)$, не зависит от источников излучения.

Чтобы применять формулу (5), надо получить уравнение, определяющее функцию $Q(\tau, \tau_0)$. Для этого допустим, что источники излучения находятся на оптической глубине τ_1 и испускают фотоны изотропно. В данном случае функция источника, которую мы обозначим через $S(\tau, \tau_1, \tau_0)$, определяется уравнением (1) при $g(\tau) = \delta(\tau_1 - \tau)$, где δ — функция Дирака. Если $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ — резольвента уравнения (1), то мы имеем

$$S(\tau, \tau_1, \tau_0) = \delta(\tau_1 - \tau) + \Gamma(\tau, \tau_1, \tau_0). \quad (6)$$

Подстановка (6) в (4) дает нам среднее число рассеяний фотонов при источниках излучения, находящихся на оптической глубине τ_1 . С другой

стороны, это число рассеяний представляет собой функцию $Q(\tau, \tau_0)$. Поэтому находим

$$Q(\tau_1, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_1} \Gamma(\tau', \tau_1, \tau_0) d\tau'. \quad (7)$$

Умножая (7) на $\frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau_1|)$, интегрируя по τ_1 в пределах от 0 до τ_0 и пользуясь известным интегральным уравнением для резольвенты, получаем

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) Q(t, \tau_0) dt + 1. \quad (8)$$

Уравнение (8) и может служить для определения функции $Q(\tau, \tau_0)$. Мы видим, что оно аналогично полученному ранее [1] уравнению, определяющему функцию $Q(\tau, \tau_0)$ в случае диффузии излучения без изменения частоты. Как и раньше, мы могли бы получить уравнение (8), пользуясь формулой, выражающей функцию $Q(\tau, \tau_0)$ через вероятность выхода фотона из среды, однако предпочли сделать это иначе.

Свойства функции $Q(\tau, \tau_0)$. Уравнение (8) дает нам возможность установить ряд важных свойств функции $Q(\tau, \tau_0)$.

Прежде всего заметим, что эта функция принимает одинаковые значения на равных расстояниях от границ плоского слоя, то есть

$$Q(\tau, \tau_0) = Q(\tau_0 - \tau, \tau_0). \quad (9)$$

Очевидно также, что функция $Q(\tau, \tau_0)$ монотонно возрастает от значения на границе $Q(0, \tau_0)$ до значения в середине слоя $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$.

Чтобы получить более полное представление о характере изменения функции $Q(\tau, \tau_0)$, выразим ее через функцию $\Phi(\tau, \tau_0) = \Gamma(0, \tau, \tau_0)$. Как известно, через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ выражается также резольвента уравнения (1) и она определяется уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) \Phi(t, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{2} K(\tau). \quad (10)$$

Перепишем уравнение (8) в виде

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K(u) Q(\tau - u, \tau_0) du + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0 - \tau} K(u) Q(\tau + u, \tau_0) du + 1. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по τ и учитывая (9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) \frac{\partial Q(t, \tau_0)}{\partial t} dt + \\ & + \frac{\lambda}{2} Q(0, \tau_0) [K(\tau) - K(\tau_0 - \tau)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая (12) с (10), находим

$$\frac{\partial Q(\tau, \tau_0)}{\partial \tau} = Q(0, \tau_0) [\Phi(\tau, \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)]. \quad (13)$$

Интегрирование (13) дает

$$Q(\tau, \tau_0) = Q(0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)], \quad (14)$$

где

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (15)$$

Входящая в формулу (14) величина $Q(0, \tau_0)$ также может быть выражена через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$. Полагая в (7) $\tau = 0$, имеем

$$Q(0, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0). \quad (16)$$

Формула (16) дает минимальное значение функции $Q(\tau, \tau_0)$. Максимальное же ее значение определяется формулой

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = 2Q(0, \tau_0) \Psi\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) - Q^2(0, \tau_0), \quad (17)$$

вытекающей из (14).

Как видно из (13), вблизи границы слоя функция $Q(\tau, \tau_0)$ возрастает очень быстро (так как $\Phi(0, \tau_0) = \infty$), а при приближении к его середине — очень медленно (так как $\frac{\partial Q}{\partial \tau} = 0$ при $\tau = \frac{\tau_0}{2}$). Вследствие убывания $\Phi(\tau, \tau_0)$ с ростом τ из (13) следует, что кривая, изображающая функцию $Q(\tau, \tau_0)$, обращена выпуклостью вверх.

Если функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ найдена, то, пользуясь формулами (5) и (14), мы можем определить среднее число рассеяний фотонов при любых источниках излучения.

Допустим в виде примера, что источники излучения распределены в среде равномерно, то есть $g(\tau) = 1$. Тогда среднее число рассеяний фотонов будет равно

$$Q_0^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (18)$$

Подставляя в (18) выражение (14) и интегрируя по частям, находим

$$Q_0^* = Q(0, \tau_0) \left[Q(0, \tau_0) - \frac{2}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) \tau d\tau \right]. \quad (19)$$

Для величины Q_0^* мы можем также получить другую формулу. Для этого предварительно найдем производную функцию $Q(\tau, \tau_0)$ по τ_0 . Дифференцируя уравнение (8) по τ_0 , имеем

$$\frac{\partial Q(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|) \frac{\partial Q(t, \tau_0)}{\partial \tau_0} dt + \frac{\lambda}{2} Q(0, \tau_0) K(\tau_0 - \tau) \quad (20)$$

и, сравнивая (20) с (10), заключаем:

$$\frac{\partial Q(\tau, \tau_0)}{\partial \tau_0} = Q(0, \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0). \quad (21)$$

Обратимся теперь к формуле (18). Умножая обе ее части на τ_0 , дифференцируя по τ_0 и пользуясь соотношением (21), находим

$$\frac{\partial(\tau_0 Q_0^*)}{\partial \tau_0} = Q^*(0, \tau_0). \quad (22)$$

Интегрирование (22) приводит к искомой формуле:

$$Q_0^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q^*(0, t) dt. \quad (23)$$

В виде другого примера распределения источников излучения рассмотрим случай, когда $g(\tau) = \tau$. В этом случае среднее число рассеяний фотонов равно

$$Q_1^* = \frac{2}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) \tau d\tau. \quad (24)$$

Пользуясь соотношением (9), получаем

$$Q_1^* = Q_0^*. \quad (25)$$

Следовательно, формулы (19) и (23) могут служить для определения не только величины Q_0^* , но и величины Q_1^* .

Некоторые неравенства. Выше было показано, что для нахождения среднего числа рассеяний фотонов Q^* при произвольных источниках излучения достаточно решить уравнение (8) для функции $Q(\tau, \tau_0)$ или уравнение (10) для функции $\Phi(\tau, \tau_0)$. Теперь мы получим некоторые неравенства, дающие возможность производить приближенную оценку величины Q^* без предварительного определения упомянутых функций. Ясно, что такие неравенства должны представлять значительный интерес для различных практических применений.

Прежде всего заметим, что среднее число рассеяний фотонов при любых источниках излучения удовлетворяет неравенствам

$$Q(0, \tau_0) \leq Q^* \leq Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right). \quad (26)$$

Если источники излучения сосредоточены в середине слоя, то величина Q^* близка к своему верхнему пределу, если у границ слоя, то к нижнему.

В случае равномерного распределения источников излучения среднее число рассеяний фотонов удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2} Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) < Q_0^* < Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right). \quad (27)$$

Они получаются из формулы (18), при учете того, что $Q(\tau, \tau_0) \leq Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ и $Q(\tau, \tau_0) \geq 2 \frac{\tau}{\tau_0} Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ при $\tau \leq \frac{\tau_0}{2}$ (так как на основании формулы (13) $\frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} < 0$).

Существование неравенств (26) и (27) показывает желательность получения оценок величин $Q(0, \tau_0)$ и $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, чем мы сейчас и займемся.

Из уравнения (8) находим

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = \lambda \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} K\left(\frac{\tau_0}{2} - \tau\right) Q(\tau, \tau_0) d\tau + 1 \quad (28)$$

и так как $Q(\tau, \tau_0) \leq Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, то

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \left[1 - \lambda \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} K(\tau) d\tau \right] < 1. \quad (29)$$

Вводя обозначение

$$L(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(t) dt. \quad (30)$$

и учитывая, что $L(0) = 1$, вместо (29) получаем

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) < \frac{1}{1 - \lambda + \lambda L\left(\frac{\tau_0}{2}\right)}. \quad (31)$$

Неравенство (31) и дает искомую верхнюю границу величины $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$.

Для нахождения нижней границы этой величины проинтегрируем обе части уравнения (8) по τ в пределах от 0 до τ_0 . Сделав это, имеем

$$\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) [1 - \lambda + \lambda L(\tau)] d\tau = \tau_0, \quad (32)$$

откуда следует

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) > \frac{1}{1 - \lambda + \frac{\lambda}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} L(\tau) d\tau}. \quad (33)$$

Для величины $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ мы дадим также другую нижнюю границу, которая в некоторых случаях может оказаться точнее предыдущей. Умножая уравнение (8) на $\tau(\tau_0 - \tau)$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , получаем

$$\int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) \tau(\tau_0 - \tau) d\tau = \lambda \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} K(t) (\tau - t)(\tau_0 - \tau + t) dt + \frac{\tau_0^3}{6}, \quad (34)$$

где учтено соотношение (9)

Пользуясь формулой (30), вместо (34) находим

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) (\tau_0 - \tau) d\tau + 2\lambda \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} L(t) t dt = \\ = \lambda \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) (2\tau - \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} L(t) dt + \frac{\tau_0^3}{6}. \end{aligned} \quad (35)$$

Очевидно, что интеграл в правой части (35) положителен. Отбрасывая этот интеграл и внося в левой части (35) величину $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ за знак интеграла, имеем

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) > \frac{1}{1 - \lambda + \frac{12\lambda}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} L(\tau) \tau (\tau_0 - \tau) d\tau}. \quad (36)$$

Найдем теперь граничные значения для величины $Q(0, \tau_0)$. Так как $\Psi\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) < Q(0, \tau_0)$, то из формулы (17) получаем

$$Q^2(0, \tau_0) > Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right). \quad (37)$$

Следовательно, в качестве нижней границы для величины $Q^2(0, \tau_0)$ можно взять нижнюю границу для величины $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, даваемую неравенством (33) или (36).

Чтобы найти верхнюю границу для величины $Q(0, \tau_0)$, обратимся к уравнению (8), из которого следует

$$Q(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(\tau_0 - \tau) Q(\tau, \tau_0) d\tau + 1. \quad (38)$$

Подставляя сюда выражение (14) и производя интегрирование по частям при учете соотношений (15) и (30), получаем

$$\begin{aligned} Q(0, \tau_0) \left[1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} L(\tau_0) \right] = \\ = \frac{\lambda}{2} Q(0, \tau_0) \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) [L(\tau) - L(\tau_0 - \tau)] d\tau + 1. \end{aligned} \quad (39)$$

С другой стороны, интегрирование обеих частей уравнения (10) по τ в пределах от 0 до τ_0 дает

$$\begin{aligned} (1-\lambda) \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) d\tau + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) [L(\tau) + L(\tau_0 - \tau)] d\tau = \\ = \frac{\lambda}{2} [1 - L(\tau_0)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Из (39) и (40) находим

$$(1-\lambda) Q^2(0, \tau_0) + \lambda Q(0, \tau_0) \left[L(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0) L(\tau_0 - \tau) d\tau \right] = 1, \quad (41)$$

где приняты во внимание формулы (15) и (16).

Заменяя в (41) функцию $L(\tau_0 - \tau)$ ее наименьшим значением $L(\tau_0)$, имеем

$$Q^2(0, \tau_0) < \frac{1}{1 - \lambda + \lambda L(\tau_0)}. \quad (42)$$

Полученные неравенства позволяют оценивать среднее число рассеяний фотонов без решения интегрального уравнения диффузии излучения, а при помощи лишь заданной функции $L(\tau)$. Эта функция, как следует из соотношений (2) и (30), определяется формулой

$$L(\tau) = A \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) E_2[\tau a(x)] dx. \quad (43)$$

Для вычисления функции $L(\tau)$ при разных контурах коэффициента поглощения $a(x)$ существуют подробные таблицы и асимптотические формулы (см., напр. [3]).

Приведенные неравенства справедливы при различных контурах коэффициента поглощения $a(x)$, при произвольных значениях параметра λ и при любых значениях оптической толщины слоя τ_0 . Такая общность этих неравенств не позволяет надеяться на их большую точность. Однако, как мы увидим ниже, в наиболее важных случаях (при доплеровском и лоренцовском контурах) они заключают искомые величины в довольно узких пределах.

Асимптотические формулы. Оценка среднего числа рассеяний фотонов наиболее интересна для среды большой оптической толщины.

Мы сейчас произведем такую оценку, используя полученные выше неравенства и асимптотические формулы для функции $L(\tau)$ при доплеровском и лоренцовском контурах коэффициента поглощения. Случай фойгтовского контура рассматривать не будем, так как асимптотические выражения для функции $L(\tau)$ при фойгтовском и лоренцовском контурах отличаются друг от друга лишь численными коэффициентами.

При доплеровском контуре

$$\alpha(x) = e^{-x^2} \quad (44)$$

и

$$L(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} E_2(\tau e^{-x^2}) dx. \quad (45)$$

Если $\tau \gg 1$, то из (45) имеем

$$L(\tau) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi} \tau \sqrt{\ln \tau}}. \quad (46)$$

При лоренцовском контуре

$$\alpha(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (47)$$

и

$$L(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2\left(\frac{\tau}{1+x^2}\right) \frac{dx}{1+x^2}. \quad (48)$$

При $\tau \gg 1$ из (48) следует

$$L(\tau) \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi} \sqrt{\tau}}. \quad (49)$$

Найдем граничные значения величин $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ и $Q(0, \tau_0)$. При доплеровском контуре, пользуясь неравенствами (31), (36), (37) и (42) и асимптотической формулой (46), получаем

$$\frac{1}{1-\lambda + \frac{3\lambda}{\sqrt{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}}} < Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) < \frac{1}{1-\lambda + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}}} \quad (50)$$

и

$$\frac{1}{1-\lambda + \frac{3\lambda}{\sqrt{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}}} < Q^2(0, \tau_0) < \frac{1}{1-\lambda + \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}}}. \quad (51)$$

При лоренцовском контуре использование тех же неравенств (с заменой лишь неравенства (36) на (33)) и асимптотической формулы (49) дает

$$\frac{1}{1-\lambda + \frac{4\lambda}{3\sqrt{\pi} \sqrt{\tau_0}}} < Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) < \frac{1}{1-\lambda + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau_0}}} \quad (52)$$

и

$$\frac{1}{1-\lambda + \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau_0}}} < Q^2(0, \tau_0) < \frac{1}{1-\lambda + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau_0}}} \quad (53)$$

Входящая в найденные неравенства величина $1-\lambda$ представляет собой вероятность истинного поглощения в элементарном акте рассеяния. При диффузии излучения в спектральной линии истинное поглощение может вызываться разными процессами: ударами второго рода, фотоионизациями из возбужденного состояния, поглощением в непрерывном спектре фотонов в частотах линии и др. Обычно вероятности этих процессов очень малы по сравнению с вероятностью спонтанного перехода в линии, вследствие чего очень мала и величина $1-\lambda$.

Однако полученные неравенства показывают, что как бы ни была мала величина $1-\lambda$ при достаточно большой оптической толщине слоя среднее число рассеяний фотонов обусловлено истинным поглощением, а не выходом фотонов наружу. При доплеровском контуре это осуществляется, когда

$$1-\lambda \gg \frac{1}{2\sqrt{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}} \quad (54)$$

а при лоренцовском контуре, когда

$$1-\lambda \gg \frac{2}{3\sqrt{\pi} \sqrt{\tau_0}} \quad (55)$$

В данном случае мы имеем

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) \approx \frac{1}{1-\lambda} \quad (56)$$

и

$$Q(0, \tau_0) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \quad (57)$$

Поэтому среднее число рассеяний фотонов при любых источниках излучения заключено в следующих пределах:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \leq Q^* \leq \frac{1}{1-\lambda}. \quad (58)$$

Важно подчеркнуть, что неравенства (58) справедливы при произвольном контуре коэффициента поглощения. Они выполняются также при диффузии излучения без изменения частоты (см. [1], статья III).

Если вместо условий (54) и (55) имеют место противоположные условия, то есть

$$1-\lambda \ll \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau_0\sqrt{\ln\tau_0}} \quad (59)$$

при доплеровском контуре и

$$1-\lambda \ll \frac{2}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\tau_0}} \quad (60)$$

при лоренцовском контуре, то среднее число рассеяний фотонов обусловлено выходом фотонов из среды, а не их гибелью в среде. В частности, этот случай осуществляется при чистом рассеянии излучения ($\lambda = 1$).

В данном случае при доплеровском контуре из неравенств (50) и (51) получаем

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = A_1\tau_0\sqrt{\ln\tau_0}, \quad (61)$$

где

$$\frac{\sqrt{\pi}}{3} < A_1 < \sqrt{\pi}, \quad (62)$$

и

$$Q(0, \tau_0) = B_1\tau_0^{\frac{1}{2}}(\ln\tau_0)^{\frac{1}{4}}, \quad (63)$$

где

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < B_1 < (2\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}. \quad (64)$$

При равномерном распределении источников излучения среднее число рассеяний фотонов, как следует из неравенства (27) и формулы (61), равно

$$Q_0^* = C_1\tau_0\sqrt{\ln\tau_0}, \quad (65)$$

где

$$\frac{\sqrt{\pi}}{6} < C_1 < \sqrt{\pi}, \quad (66)$$

При лоренцовском контуре из неравенства (52) и (53) находим

$$Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right) = A_2 \sqrt{\tau_0}, \quad (67)$$

где

$$\frac{3}{4} \sqrt{\pi} < A_2 < \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi}, \quad (68)$$

и

$$Q(0, \tau_0) = B_2 \tau_0^{\frac{1}{4}}, \quad (69)$$

где

$$\left(\frac{3}{4} \sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} < B_2 < \left(\frac{3}{2} \sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (70)$$

При равномерном распределении источников излучения имеем

$$Q_0^* = C_2 \sqrt{\tau_0}, \quad (71)$$

где

$$\frac{3}{8} \sqrt{\pi} < C_2 < \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi}. \quad (72)$$

Заметим, что асимптотическое выражение для величины Q_0^* мы можем также получить при помощи формулы (23), для чего надо знать асимптотическое выражение для величины $Q(0, \tau_0)$. Подставляя (63) в (23) приходим к формуле (65), где

$$C_1 = \frac{1}{2} B_1^2. \quad (73)$$

Подстановка же (69) в (23) дает формулу (71), где

$$C_2 = \frac{2}{3} B_2^2. \quad (74)$$

Пользуясь соотношением (73) и неравенствами (64), мы для величины C_1 опять получаем неравенства (66). При помощи же (74) и (70) находим неравенства

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} < C_2 < \sqrt{\pi}, \quad (75)$$

дающее для величины C_2 более узкие границы, чем неравенства (72).

Численные значения нижней и верхней границ коэффициентов, входящих в полученные формулы для величин $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, $Q(0, \tau_0)$ и Q_0^* , приведены в следующей таблице:

	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2
Нижняя граница	0.6	0.8	0.3	1.3	1.2	0.9
Верхняя граница	1.8	1.9	1.8	1.9	1.6	1.8

Мы видим, что граничные значения для каждого из коэффициентов не очень далеки друг от друга. Поэтому полученные формулы вполне можно применять на практике для оценки рассматриваемых величин (беря для коэффициентов средние из их граничных значений).

Подчеркнем тот факт, что найденные выше неравенства для величин $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, $Q(0, \tau_0)$ и Q_0^* позволили нам определить функциональную форму этих величин. Разумеется, только специальный подбор неравенств дал такую возможность. Например, при доплеровском контуре неравенство (33) не приводило к этому, вследствие чего потребовался вывод неравенства (36). В дальнейшем знание функциональной формы рассматриваемых величин может быть использовано для построения более точной теории (в частности, для нахождения точных значений коэффициентов).

Приведем еще приближенную формулу, связывающую величины $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ и $Q(0, \tau_0)$. Из неравенств для этих величин мы имеем

$$Q(0, \tau_0) \approx \sqrt{Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)}, \quad (76)$$

то есть среднее число рассеяний фотонов при источниках излучения на границе слоя по порядку величины равно корню квадратному из среднего числа рассеяний фотонов при источниках излучения в середине слоя. Эта формула верна при любом соотношении между величинами $1 - \lambda$ и τ_0 .

Сравнение с другими результатами. Задача о диффузии излучения в спектральной линии рассматривалась во многих работах, как астрофизических, так и физических. Астрофизики встречаются с этой задачей при исследовании газовых туманностей, физики — при исследовании

довании плазмы. Сначала принималось, что диффузия излучения происходит без изменения частоты, затем стали делать предположение о полном перераспределении излучения по частотам. В ряде работ (Л. М. Бибермана [4], Кулблуда [5], Хёрна [6] и др.) путем численного решения уравнения (1) находилась функция источника $S(\tau, \tau_0)$. Это позволяет определить среднее число рассеяний фотонов по формуле (4). Другие работы (Остерброка [7], Хаммера [8]) были специально посвящены нахождению среднего числа рассеяний фотонов. Мы сейчас сравним некоторые из полученных выше результатов с результатами найденными ранее.

Хаммер [8], используя уравнение (1) и формулу (4), получил, что среднее число рассеяний фотонов при любых источниках излучения удовлетворяет неравенству

$$Q^* < \frac{1}{1 - \lambda + \lambda L\left(\frac{\tau_0}{2}\right)}. \quad (77)$$

Как мы видим, оно вытекает также из наших неравенств (26) и (31). Хаммер считает, что правая часть неравенства (77) может служить хорошей оценкой для величины Q^* , если функция $g(\tau)$ меняется медленно. Это утверждение мы можем несколько уточнить: указанная оценка является наилучшей, когда источники излучения сосредоточены в середине слоя; ею можно пользоваться в случае медленного изменения функции $g(\tau)$; но она не годится в случае нахождения источников на границе слоя (так как имеет место соотношение (76)).

В работе Эйвретта и Хаммера [9] даны результаты численного решения уравнения (1) при равномерном распределении источников излучения, а также средние числа рассеяний фотонов, вычисленные для этого случая по формуле (4). Мы можем сравнить эти точные значения величины Q_0^* с приближенными значениями, вытекающими из формул (65) и (71) (или из более общих неравенств (50), (52) и (26)). Если в качестве приближенного значения величины Q_0^* принять среднее арифметическое из ее граничных значений, то получается удовлетворительное согласие между точным и приближенным значениями. Например, для доплеровского контура при $T = \tau_0 \sqrt{\pi} = 10^4$ и $\varepsilon = 1 - \lambda = 10^{-8}$ точное значение величины Q_0^* равно $1.4 \cdot 10^4$, а приближенное $1.7 \cdot 10^4$. Для лоренцовского контура при $T = \tau_0 \pi = 10^4$ и $\varepsilon = 1 - \lambda = 10^{-4}$ соответствующие числа равны 83 и 76.

Из сравнения между собой уравнений (1) и (8) следует, что функция $Q(\tau, \tau_0)$ совпадает с функцией источника $S(\tau, \tau_0)$ при $g(\tau) = 1$.

Поскольку же в упомянутой работе [9] функция $S(\tau, \tau_0)$ вычислялась при $g(\tau) = 1 - \lambda$, то мы имеем

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{S(\tau, \tau_0)}{1 - \lambda}. \quad (78)$$

Следовательно, пользуясь формулами (5) и (78), можно определить среднее число рассеяний фотонов при любых источниках излучения (а не только при их равномерном распределении, как сделано в [9]). Значения величин $Q(0, \tau_0)$ и $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$, найденные по формуле (78) и по вычисленным значениям функции $S(\tau, \tau_0)$, с довольно большой точностью удовлетворяют соотношению (76).

В некоторых работах (см. напр., [10]) для приближенного решения уравнения (1) предлагался способ, заключающийся в вынесении за знак интеграла функции $S(t, \tau_0)$ при $t = \tau$. Применяя этот способ к уравнению (8), получаем

$$Q(\tau, \tau_0) \approx \frac{1}{1 - \lambda + \frac{\lambda}{2} [L(\tau) + L(\tau_0 - \tau)]}. \quad (79)$$

Сравнивая формулу (79) с неравенствами для величин $Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$ и $Q(0, \tau_0)$, мы видим, что для средних частей слоя использование этой формулы не приводит к большим ошибкам, однако для граничных частей она является слишком грубой (так как дает $Q(0, \tau_0) \approx 1$, в то время как в действительности $Q^2(0, \tau_0) \approx Q\left(\frac{\tau_0}{2}, \tau_0\right)$).

При рассмотрении диффузии излучения в спектральной линии (например, L_α -излучения) в различных астрофизических объектах (газовых туманностях, оболочках новых звезд, межзвездной среде) необходимо принимать во внимание движение среды. Поскольку движение происходит с градиентом скорости, то фотоны имеют возможность выходить из среды наружу вследствие эффекта Допплера. Очевидно, что чем больше градиент скорости, тем меньше среднее число рассеяний фотона. Задача о диффузии L_α -излучения в туманности, расширяющейся с большим градиентом скорости, была рассмотрена автором [11]. При этом использовался тот же прием вынесения искомой функции за знак интеграла, который привел к формуле (79), однако производилось и уточнение решения для граничных областей. В даль-

нейшем [12] плотность L_{α} -излучения в движущейся среде была определена при произвольном контуре коэффициента поглощения и для любого градиента скорости.

В настоящей работе, как и во всех перечисленных выше, делалось предположение о полном перераспределении излучения по частотам. Однако в действительности закон рассеяния света в спектральной линии является гораздо более сложным. Поэтому такое предположение нуждается в обосновании. В ряде работ (см. [13]—[15] и др.) для разных частных случаев показывалась его допустимость, но в этой области желательны новые исследования.

Ленинградский государственный
университет

NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. IV.

V. V. SOBOLEV

Diffusion of radiation with redistribution in frequency in a plane layer of optical thickness τ_0 at the centre of a spectral line is considered. Equations determining the mean number of scatterings of a photon in the presence of different sources of radiation are given. Some inequalities and asymptotic formulae for this quantity are found in the case of $\tau_0 \gg 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, *Астрофизика*, 2, 135, 237, 1966; 3, 101, 1967.
2. D. G. Hummer, *M. N.*, 125, 21, 1962.
3. В. В. Иванов, В. Т. Щербakov, *Астрофизика*, 1, 31, 1965.
4. Л. М. Биберман, *ЖЭТФ*, 17, 416, 1947; 18, 548, 1949.
5. D. Koelbloed, *Bull. Astr. Inst. Netherlands*, 12, 341, 1956.
6. A. G. Hearn, *Proc. Phys. Soc.*, 81, 648, 1963.
7. D. E. Osterbrock, *Ap. J.*, 135, 195, 1962.
8. D. G. Hummer, *Ap. J.*, 140, 276, 1964.
9. E. H. Avrett, D. G. Hummer, *M. N.*, 130, 295, 1965.
10. Л. М. Биберман, *ДАН СССР*, 59, 659, 1948.
11. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 21, 143, 1944.
12. В. В. Соболев, *Астрон. ж.*, 34, 694, 1957.
13. В. В. Соболев, *Вестн. АГУ*, № 5, 1955.
14. J. T. Jefferts, O. R. White, *Ap. J.*, 132, 767, 1960.
15. A. G. Hearn, *Proc. Phys. Soc.*, 84, 11, 1964.