

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3

ФЕВРАЛЬ, 1967

ВЫПУСК 1

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФFUЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ. II

Р. И. КОСТИК

Поступила 10 ноября 1966

Рассматривается задача о диффузии резонансного излучения в среде конечной оптической толщины. Предполагается, что диффузия излучения происходит с полным перераспределением по частотам. Вычислены матрицы A^{-1} , с помощью которых определяется функция источника $B(\tau)$.

Как известно, интенсивность излучения, выходящего из среды в резонансной линии, дается выражением

$$I(\tau_0, \theta, x) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) \alpha(x) e^{-\alpha(x) \sec \theta \tau} \sec \theta d\tau, \quad (1)$$

причем

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|t - \tau|) B(t) dt + g(\tau), \quad (2)$$

где $B(t)$ — функция источника; λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния; $g(\tau)$ — мощность первичных источников излучения;

$$K(y) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)y] dx; \quad \alpha(x) = e^{-x^2}.$$

Предполагается, что в элементарном акте рассеяния имеет место полное перераспределение энергии по частотам, коэффициент поглощения — доплеровский, индикатриса рассеяния — сферическая, поглощение в частотах непрерывного спектра отсутствует.

Уравнения (1) и (2) можно заменить следующей системой матричных уравнений (см. [1])

$$\begin{aligned} I - CB &= 0 \\ AB + G &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \|a_{ik} - \delta_{ik}\|^m, & B &= \begin{bmatrix} B(\tau_1) \\ B(\tau_2) \\ \vdots \\ B(\tau_m) \end{bmatrix}, & G &= \begin{bmatrix} g(\tau_1) \\ g(\tau_2) \\ \vdots \\ g(\tau_m) \end{bmatrix}, \\ C &= \|c_{jk}\|^m, & I &= \begin{bmatrix} I(\tau_0, \theta, x_1) \\ I(\tau_0, \theta, x_2) \\ \vdots \\ I(\tau_0, \theta, x_m) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь A, C — квадратные матрицы порядка m ; B, G, I — столбцовые порядка m ; δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$.

Элементы матриц A и C вычисляются по формулам

$$a_{ik} = \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} K\left(\left|t - \frac{\tau_{i-1} + \tau_1}{2}\right|\right) dt \quad i, k = 1, 2, \dots, m$$

$$c_{j,k} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x(x_j) e^{-x(x_j) \sec \theta \tau} \sec \theta d\tau \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Из (3) находим

$$I = TG \quad (4)$$

$$B = -A^{-1} G, \quad (5)$$

где $T = -CA^{-1}$.

Таким образом, имея матрицы T и A^{-1} по формулам (4) и (5) легко найти контур линии излучения и функцию источника при заданном распределении источников возбуждения в среде.

Матрицы T были приведены в предыдущей работе [1]. В данной работе, при перечисленных выше предположениях, даются матрицы $-A^{-1}$. Область интегрирования τ_0 разбита на 14 интервалов (см. рис. 1), вероятность выживания кванта λ принята равной единице. Для τ_0 выбраны значения: 1, 2, ..., 10, 20, ..., 100.

Погрешность определения $B(\tau)$ в случае $g(\tau) = \text{const}$ не превышает 3—12 единиц четвертой значащей цифры для $\tau_0 = 1—10$ и 5—16 единиц третьей значащей цифры для $\tau_0 = 20—100$ (более подробно см. [1]).

Численные значения элементов матрицы A^{-1} представлены в форме $s \cdot 10^n$, где $0.1 \leq s < 1$. Например, число $1452 - 1$ следует читать $0.1452 \cdot 10^{-1} = 0.01452$.

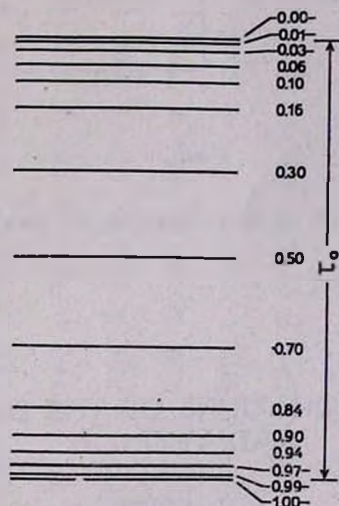


Рис. 1.

Распределение источников возбуждения в данной задаче считается известным — значения $g(\tau)$ следует задать для следующих оптических глубин τ (в единицах τ_0): 0.005, 0.020, 0.045, 0.080, 0.130, 0.230, 0.400, 0.600, 0.770, 0.870, 0.920, 0.955, 0.980, 0.995. В этих же точках получим искомую функцию $B(\tau)$.

Вычисление матриц A^{-1} велось на электронно-вычислительной машине Института кибернетики АН УССР.

Рассмотрим пример. Пусть источники возбуждения распределены в среде с оптической толщиной $\tau_0 = 10$ по закону

$$g(\tau) = \frac{\omega}{V\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x) \alpha(x) E_2[x(x)\tau] dx + \\ + \frac{\omega}{V\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x) \alpha(x) E_2[x(x)(\tau_0 - \tau)] dx,$$

где $i(x)$ — контур фраунгоферовой линии H_α в спектре фотосферы. График этой функции показан на рис. 2 ($\omega = 0.3$). Умножая квадратную

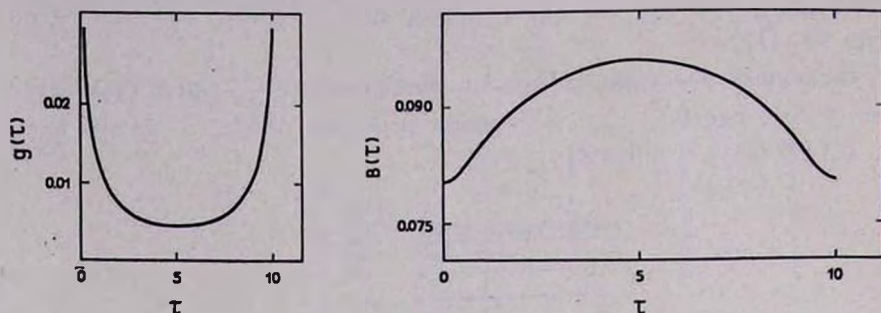


Рис. 2.

матрицу A^{-1} ($\tau_0 = 10$) на столбцевую G , получим функцию источника (рис. 2).

ГАО АН УССР

THE MATRIX EQUATIONS OF THE DIFFUSION OF RADIATION. II

R. I. KOSTIK

The problem of diffusion of resonance radiation in a medium of finite optical thickness is considered. It is assumed that the radiation diffuses with complete redistribution in frequency. The matrixes A^{-1} are tabulated. The source function $B(\tau)$ is computed using these matrixes.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Яковкин, Р. И. Костик, *Астрофизика*, 2, 379, 1966.

МАТРИЦЫ A^{-1} .

$$\tau_0 = 1$$

1025	1	3616-1	4385-1	5019-1	6553-1	1284	0	1469	0	1167	0	6647-1	2475-1	1531-1	1082-1	6863-2	3312-2
1783-1	1046	1	5008-1	5443-1	6967-1	1347	0	1531	0	1212	0	6895-1	2566-1	1586-1	1121-1	7110-2	3431-2
1452-1	3309-1	1066-1	6391-1	7711-1	1451	0	1625	0	1280	0	7259-1	2699-1	1668-1	1178-1	7472-2	3605-2	
1250-1	2711-1	4763-1	1035-1	9140-1	1606	0	1755	0	1369	0	7735-1	2871-1	1773-1	1252-1	7939-2	3830-2	
1089-1	2316-1	3839-1	6035-1	1124-1	1891	0	1947	0	1494	0	8392-1	3107-1	1917-1	1353-1	8574-2	4135-2	
9054-2	1900-1	3064-1	4505-1	7859-1	1259	1	2413	0	1754	0	9696-1	3570-1	2197-1	1548-1	9803-2	4724-2	
7231-2	1507-1	2399-1	3447-1	5719-1	1661	0	1358	1	2328	0	1218	0	4414-1	2701-1	1896-1	1198-1	5764-2
5764-2	1198-1	1896-1	2701-1	4414-1	1218	0	2328	0	1358	1	1661	0	5719-1	3447-1	2399-1	1507-1	7231-2
4724-2	9803-2	1548-1	2197-1	3570-1	9696-1	1754	0	2413	0	1259	1	7859-1	4505-1	3064-1	1900-1	9054-2	
4135-2	8574-2	1353-1	1917-1	3107-1	8392-1	1494	0	1947	0	1891	0	1124	1	6035-1	3839-1	2316-1	1089-1
3830-2	7939-2	1252-1	1773-1	4871-1	7735-1	1369	0	1755	0	1606	0	9140-1	1086	1	4763-1	2711-1	1250-1
3605-2	7472-2	1178-1	1668-1	2699-1	7259-1	1280	0	1625	0	1451	0	7711-1	6391-1	1066	1	3309-1	1452-1
3431-2	7110-2	1121-1	1586-1	2566-1	6895-1	1212	0	1531	0	1347	0	6967-1	5443-1	5008-1	1046	1	1783-1
3312-2	6863-2	1082-1	1531-1	2475-1	6647-1	1167	0	1469	0	1284	0	6553-1	5019-1	4385-1	3616-1	1025	1

$$\tau_0 = 2$$

1047	1	6656—1	7980—1	9066—1	1175	0	2292	0	2577	0	1966	0	1055	0	3713—1	2221—1	1523—1	9391—2	4427—2
3275—1	1087—1	9343—1	1006	0	1277	0	2461	0	2747	0	2090	0	1120	0	3939—1	2355—1	1615—1	9957—2	4693—2
2639—1	6165—1	1127—1	1214	0	1452	0	2722	0	2999	0	2269	0	1213	0	4264—1	2548—1	1746—1	1077—1	5075—2
2256—1	5005—1	9040—1	1168	1	1768	0	3100	0	3336	0	2503	0	1333	0	4679—1	2795—1	1915—1	1180—1	5562—2
1951—1	4243—1	7225—1	1166	0	1246	1	3755	0	3822	0	2825	0	1497	0	5242—1	3129—1	2142—1	1320—1	6217—2
1603—1	3441—1	5701—1	8614—1	1544	0	1527	1	4924	0	3471	0	1813	0	6317—1	3762—1	2572—1	1583—1	7456—2	
1251—1	2668—1	4365—1	6455—1	1104	0	3363	0	1746	1	4802	0	2392	0	8220—1	4871—1	3319—1	2039—1	9588—2	
9588—2	2039—1	3319—1	4871—1	8220—1	2392	0	4802	0	1746	1	3363	0	1104	0	6455—1	4365—1	2668—1	1251—1	
7456—2	1583—1	2572—1	3762—1	6317—1	1813	0	3471	0	4924	0	1527	1	1544	0	8614—1	5701—1	3441—1	1603—1	
6217—2	1320—1	2142—1	3129—1	5242—1	1497	0	2825	0	3822	0	3755	0	1246	1	1166	0	7225—1	4243—1	1951—1
5562—2	1180—1	1915—1	2795—1	4679—1	1333	0	2503	0	3336	0	3100	0	1768	0	1168	1	9040—1	5005—1	2256—1
5075—2	1077—1	1746—1	2548—1	4264—1	1213	0	2269	0	2999	0	2722	0	1452	0	1214	0	1127—1	6165—1	2639—1
4693—2	9957—2	1615—1	2355—1	3939—1	1120	0	2090	0	2747	0	2461	0	1277	0	1006	0	9343—1	1087—1	3273—1
4427—2	9391—2	1523—1	2221—1	3713—1	1055	0	1966	0	2577	0	2292	0	1174	0	9066—1	7980—1	6656—1	1047	1

$$\tau_s = 3$$

1067—1	9490—1	1131	0	1280	0	1652	0	3227	0	3598	0	2679	0	1382	0	4668—1	2725—1	1826—1	1100—1	5082—2		
4662—1	1127	1	1351	0	1447	0	1830	0	3532	0	3912	0	2905	0	1496	0	5051—1	2948—1	1975—1	1190—1	5496—2	
3736—1	8903—1	1188	1	1784	0	2125	0	3996	0	4371	0	3229	0	1659	0	5596—1	3265—1	2186—1	1317—1	6084—2		
3181—1	7198—1	1328	0	1251	1	2639	0	4651	0	4976	0	3647	0	1868	0	6292—1	3669—1	2456—1	1479—1	6829—2		
2740—1	6075—1	1057	0	1739	0	1371	1	5748	0	5840	0	4222	0	2151	0	7230—1	4212—1	2817—1	1696—1	7831—2		
2234—1	4892—1	8287—1		1279	0	2339	0	1818	1	7716	0	5346	0	2689	0	8996—1	5230—1	3494—1	2101—1	9697—2		
1719—1	3739—1	6261—1		9469—1	1657	0	5225	0	2182	1	7582	0	3656	0	1208	0	6988—1	4654—1	2793—1	1287—1		
1287—1	2793—1	4654—1		6988—1	1208	0	3656	0	7582	0	2182	1	5225	0	1657	0	9469—1	6261—1	3739—1	1719—1		
9697—2	2101—1	3494—1		5230—1	8996—1	2689	0	5346	0	7716	0	1818	1	2339	0	1279	0	8287—1	4892—1	2234—1		
7831—2	1696—1	2817—1		4212—1	7230—1	2151	0	4222	0	5840	0	5748	0	1371	1	1739	0	1057	0	6075—1	2740—1	
6829—2	1479—1	2456—1		3569—1	6292—1	1868	0	3647	0	4976	0	4651	0	2639	0	1251	1	1328	0	7198—1	3181—1	
6084—2	1317—1	2186—1		3265—1	5596—1	1659	0	3229	0	4371	0	3996	0	2125	0	1784	0	1188	1	8903—1	3736—1	
5496—2	1190—1	1975—1		2948—1	5051—1	1496	0	2905	0	3912	0	3532	0	1830	0	1447	0	1351	0	1127	1	4662—1
5082—2	1100—1	1826—1		2725—1	4668—1	1382	0	2679	0	3598	0	3227	0	1652	0	1280	0	1131	0	9490—1	1067	1

$$\tau_0 = 4$$

1087	1	1219	0	1448	0	1634	0	2100	0	4115	0	4569	0	3347	0	1676	0	5483—1	3142—1	2066—1	1220—1	5538—2
5981—1	1165	1	1759	0	1879	0	2367	0	4584	0	5057	0	3694	0	1847	0	6039—1	3460—1	2274—1	1343—1	6095—2	
4774—1	1158	0	1248	1	2356	0	2801	0	5287	0	5764	0	4189	0	2090	0	6826—1	3909—1	2569—1	1517—1	6882—2	
4054—1	9334—1	1753	0	1336	1	3534	0	6267	0	6690	0	4825	0	2400	0	7827—1	4479—1	2942—1	1737—1	7879—2		
3478—1	7850—1	1392	0	2326	0	1502	1	7868	0	8002	0	5697	0	2819	0	9174—1	5245—1	3443—1	2032—1	9215—2		
2818—1	6282—1	1085	0	1704	0	3166	0	2129	1	1077	1	7376	0	3605	0	1168	0	6663—1	4368—1	2575—1	1167—1	
2144—1	4750—1	8112—1	1250	0	2227	0	7227	0	2660	1	1063	1	5000	0	1600	0	9087—1	5939—1	3494—1	1582—1		
1582—1	3494—1	5939—1	9087—1	1600	0	5000	0	1063	1	2660	1	7227	0	2227	0	1250	0	8112—1	4750—1	2144—1		
1167—1	2575—1	4368—1	6663—1	1168	0	3605	0	7376	0	1077	1	2129	1	3166	0	1704	0	1085	0	6282—1	2818—1	
9215—2	2032—1	3443—1	5245—1	9174—1	2819	0	5697	0	8002	0	7868	0	1502	1	2326	0	1392	0	7850—1	3478—1		
7879—2	1737—1	2942—1	4479—1	7827—1	2400	0	4825	0	6690	0	6267	0	3534	0	1336	1	1753	0	9334—1	4054—1		
6882—2	1517—1	2569—1	3909—1	6826—1	2090	0	4189	0	5764	0	5287	0	2801	0	2356	0	1248	1	1158	0	4774—1	
6095—2	1343—1	2274—1	3460—1	6039—1	1847	0	3694	0	5057	0	4584	0	2367	0	1879	0	1759	0	1165	1	5981—1	
5538—2	1220—1	2066—1	3142—1	5483—1	1676	0	3347	0	4569	0	4115	0	2100	0	1634	0	1448	0	1219	0	1087	1

$$\tau_0 = 5$$

1106	1	1481	0	1753	0	1973	0	2527	0	4969	0	5508	0	3988	0	1952	0	6217—1	3510—1	2272—1	1319—1	5889—2
7252—1	1204	1	2162	0	2304	0	2894	0	5626	0	6196	0	4473	0	2186	0	6959—1	3928—1	2542—1	1476—1	6587—2	
5770—1	1422	0	1309	1	2933	0	3480	0	6601	0	7186	0	5162	0	2517	0	8005—1	4516—1	2921—1	1696—1	7568—2	
4887—1	1144	0	2181	0	1422	1	4451	0	7947	0	8479	0	6046	0	2938	0	9331—1	5260—1	3402—1	1974—1	8807—2	
4177—1	9583—1	1727	0	2926	0	1636	0	1011	1	1030	1	7254	0	3508	0	1111	0	6259—1	4045—1	2346—1	1047—1	
3363—1	7622—1	1339	0	2136	0	4020	0	2460	1	1406	1	9546	0	4561	0	1438	0	8084—1	5217—1	3023—1	1348—1	
2535—1	5710—1	9923—1	1553	0	2810	0	9345	0	3178	1	1392	1	6412	0	1998	0	1118	0	7191—1	4158—1	1851—1	
1851—1	4158—1	7191—1	1118	0	1998	0	6412	0	1392	1	3178	1	9345	0	2810	0	1553	0	9923—1	5710—1	2535—1	
1318—1	3023—1	5217—1	8084—1	1438	0	4561	0	9546	0	1406	1	2460	1	4020	0	2136	0	1339	0	7622—1	3363—1	
1047—1	2346—1	4045—1	6259—1	1111	0	3508	0	7254	0	1030	1	1011	1	1636	1	2926	0	1727	0	9583—1	4177—1	
8807—2	1974—1	3402—1	5260—1	9331—1	2938	0	6046	0	8479	0	7947	0	4451	0	1422	1	2181	0	1144	0	4887—1	
7568—2	1696—1	2921—1	4561—1	8005—1	2517	0	5162	0	7186	0	6601	0	3480	0	2933	0	1309	1	1422	0	5770—1	
6587—2	1476—1	2542—1	3928—1	6959—1	2186	0	4473	0	6196	0	5626	0	2894	0	2304	0	2162	0	1204	1	7252—1	
5889—2	1319—1	2272—1	3510—1	6217—1	1952	0	3988	0	5508	0	4969	0	2527	0	1973	0	1753	0	1481	0	1106	1

$$\tau_0 \approx 6$$

1125	1	1735	0	2049	0	2300	0	2936	0	5798	0	6425	0	4613	0	2216	0	6900—1	3848—1	2458—1	1405—1	6180—2
8486—1	1242	1	2563	0	2726	0	3413	0	6663	0	7338	0	5252	0	2520	0	7839—1	4370—1	2791—1	1596—1	7016—2	
6733—1	1684	0	1370	1	3517	0	4165	0	7939	0	8644	0	6157	0	2947	0	9158—1	5103—1	3258—1	1862—1	8186—2	
5688—1	1351	0	2514	0	1510	1	5389	0	9689	0	1035	1	7314	0	3489	0	1083	0	6029—1	3847—1	2198—1	9661—2
4843—1	1128	0	2054	0	3538	0	1774	1	1246	1	1274	1	8894	0	4220	0	1307	0	7269—1	4635—1	2647—1	1163—1
3876—1	8919—1	1592	0	2572	0	4895	0	2809	1	1757	1	1185	1	5556	0	1712	0	9505—1	6052—1	3453—1	1516—1	
2899—1	6630—1	1170	0	1856	0	3400	0	1156	1	3731	1	1741	1	7883	0	2401	0	1326	0	8418—1	4793—1	2102—1
2102—1	4793—1	8418—1	1326	0	2401	0	7883	0	1741	1	3731	1	1156	1	3400	0	1856	0	1170	1	6630—1	2899—1
1516—1	3453—1	6052—1	9505—1	1712	0	5556	0	1185	1	1757	1	2809	1	4895	0	2572	0	1592	0	8919—1	3876—1	
1163—1	2647—1	4635—1	7269—1	1307	0	4220	0	8894	0	1274	1	1246	1	1774	0	3538	0	2064	0	1128	0	4843—1
9661—2	2198—1	3847—1	6029—1	1083	0	3489	0	7314	0	1035	1	9689	0	5389	0	1510	1	2614	0	1351	0	5688—1
8186—2	1862—1	3258—1	5103—1	9158—1	2947	0	6157	0	8644	0	7939	0	4165	0	3517	0	1370	1	1684	0	6733—1	
7016—2	1596—1	2791—1	4370—1	7839—1	2520	0	5252	0	7338	0	6663	0	3413	0	2726	0	2563	0	1242	1	8486—1	
6180—2	1405—1	2458—1	3848—1	6900—1	2216	0	4613	0	6426	0	5798	0	2936	0	2300	0	2049	0	1735	0	1125	1

1143	1	1984	0	2339	0	2618	0	3330	0	6608	0	7331	0	5230	0	2474	0	7547—1	4165—1	2630—1	1483—1	6431—2	
9689—1	1280	1	2963	0	3145	0	3925	0	7700	0	8489	0	6038	0	2851	0	8694—1	4797—1	3028—1	1708—1	7403—2		
7670—1	1945	0	1432	1	4108	0	4855	0	9303	0	1014	1	7178	0	3381	0	1030	0	5680—1	3584—1	2021—1	8759—2	
6462—1	1557	0	3051	0	1600	1	6347	0	1149	1	1229	1	8633	0	4053	0	1233	0	6793—1	4285—1	2415—1	1047—1	
5481—1	1295	0	2402	0	4161	0	1916	1	1492	1	1530	1	1062	1	4958	0	1504	0	8281—1	5220—1	2940—1	1274—1	
4359—1	1018	0	1842	0	3011	0	5788	0	3175	1	2128	1	1428	1	6589	0	1989	0	1093	0	6880—1	3871—1	1676—1
3239—1	7513—1	1345	0	2159	0	3996	0	1386	1	4317	1	2109	1	9406	0	2806	0	1534	0	9626—1	5405—1	2337—1	
2337—1	5405—1	9626—1	1534	0	2806	0	9406	0	2109	1	4317	1	1386	1	3996	0	2159	0	1345	0	7513—1	3239—1	
1676—1	3871—1	6880—1	1093	0	1989	0	6589	0	1428	1	2128	1	3175	1	5788	0	3011	0	1842	0	1018	0	4359—1
1274—1	2940—1	5220—1	8281—1	1504	0	4958	0	1062	1	1530	1	1492	1	1916	1	4161	0	2402	0	1295	0	5481—1	
1047—1	2415—1	4285—1	6793—1	1233	0	4053	0	8633	0	1229	1	1149	1	6347	0	1600	1	3051	0	1557	0	6462—1	
8759—2	2021—1	3584—1	5680—1	1030	0	3381	0	7178	0	1014	1	9303	0	4855	0	4108	0	1432	1	1945	0	7670—1	
7403—2	1708—1	3028—1	4797—1	8694—1	2851	0	6038	0	8489	0	7700	0	3925	0	3145	0	2963	0	1280	1	9689—1		
6431—2	1483—1	2630—1	4165—1	7547—1	2474	0	5230	0	7331	0	6608	0	3330	0	2618	0	2339	0	1984	0	1143	1	

$$\tau_0 = 8$$

1161	1	2229	0	2622	0	2928	0	3712	0	7402	0	8230	0	5843	0	2726	0	8167—1	4468—1	2793—1	1556—1	6657—2			
1087	0	1318	1	3363	0	3562	0	4432	0	8740	0	9655	0	6834	0	3183	0	9531—1	5213—1	3258—1	1814—1	7762—2			
8584—1	2206	0	1494	1	4706	0	5550	0	1070	1	1168	1	8227	0	3823	0	1143	0	6251—1	3905—1	2174—1	9300—2			
7213—1	1761	0	3492	0	1692	1	7324	0	1335	1	1432	1	1000	1	4633	0	1383	0	7557—1	4719—1	2627—1	1123 -1			
6093—1	1459	0	2742	0	4794	0	2061	1	1749	1	1799	1	1242	1	5720	0	1704	0	9300—1	5803—1	3228—1	1380—1			
4817—1	1140	0	2090	0	3452	0	6693	0	3556	1	2517	1	1682	1	7656	0	2270	0	1236	0	7702—1	4280—1	1829—1		
3559—1	8367—1	1517	0	2460	0	4595	0	1623	1	4935	1	2494	1	1097	1	3215	0	1742	0	1082	0	5998—1	2559—1		
2559—1	5998—1	1082	0	1742	0	3215	0	1097	1	2494	1	4935	1	1623	1	4595	0	2460	0	1517	0	8367—1	3559—1		
1829—1	4280—1	7702—1		1236	0	2270	0	7656	0	1682	1	2517	1	3556	1	6693	0	3452	0	2090	0	1140	0	4817—1	
1380—1	3228—1	5803—1		9300—1		1704	0	5720	0	1242	1	1799	1	1749	1	2061	1	4794	0	2742	0	1459	0	6093—1	
1123—1	2627—1	4719—1		7557—1		1383	0	4533	0	1000	1	1432	1	1335	1	7324	0	1692	1	3492	0	1761	0	7213—1	
9300—2	2174—1	3905—1		6251—1		1143	0	3823	0	8227	0	1168	1	1070	1	5550	0	4706	0	1494	1	2206	0	8584—1	
7752—2	1814—1	3258—1		5213—1		9531—1		3183	0	6834	0	9655	0	8740	0	4432	0	3562	0	3363	0	1318	1	1087	0
6657—2	1556—1	2793—1		4468—1		8167—1		2726	0	5843	0	8230	0	7402	0	3712	0	2928	0	2622	0	2229	0	1161	1

$$\pi_0 = 9$$

1179	1	2470	0	2901	0	3231	0	4083	0	8186	0	9126	0	6455	0	2975	0	8765—1	4760—1	2949—1	1624—1	6862—2	
1203	0	1355	1	3764	0	3979	0	4935	0	9786	0	1084	1	7642	0	3517	0	1035	0	5621—1	3482—1	1917—1	8100—2
9480—1	2466	0	1558	1	5311	0	6250	0	1212	1	1327	1	9308	0	4273	0	1257	0	6819—1	4222—1	9324—1	9818—2	
7944—1	1965	0	3938	0	1784	1	8318	0	1527	1	1642	1	1143	1	5228	0	1535	0	8324—1	5152—1	2835—1	1197—1	
6682—1	1621	0	3082	0	5434	0	2209	1	2015	1	2081	1	1430	1	6508	0	1906	0	1033	0	6387—1	3512—1	1483—1
5253—1	1259	0	2335	0	3894	0	7608	0	3952	1	2925	1	1948	1	8757	0	2553	0	1380	0	8522—1	4682—1	1976—1
3862—1	9194—1	1686	0	2759	0	5195	0	1866	1	5581	1	2894	1	1258	1	3624	0	1949	0	1200	0	6576—1	2771—1
2771—1	6576—1	1200	0	1949	0	3624	0	1258	1	2894	1	5581	1	1866	1	5195	0	2759	0	1686	0	9194—1	3862—1
1976—1	4682—1	8522—1	1380	0	2553	0	8757	0	1948	1	2925	1	3952	1	7608	0	3894	0	2335	0	1259	0	5253—1
1483—1	3512—1	6387—1	1033	0	1906	0	6508	0	1430	1	2081	1	2015	1	2209	1	5434	0	3082	0	1621	0	6682—1
1197—1	2834—1	5152—1	8324—1	1535	0	5228	0	1143	1	1642	1	1527	1	8318	0	1784	1	3938	0	1965	0	7944—1	
9818—2	2324—1	4222—1	6819—1	1257	0	4273	0	9308	0	1327	1	1212	1	6250	0	5311	0	1558	1	2466	0	9480—1	
8100—2	1917—1	3482—1	5621—1	1035	0	3517	0	7642	0	1084	1	9786	0	4935	0	3979	0	3764	0	1355	1	1203	0
6862—2	1624—1	2949—1	4760—1	8765—1	2975	0	6455	0	9126	0	8186	0	4083	0	3231	0	2901	0	2470	0	1179	1	

$$\tau_0 = 10$$

1196	1	2708	0	3176	0	3528	0	4444	0	8962	0	1002	1	7067	0	3222	0	9345—1	5042—1	3099—1	1689—1	7052—2	
1317	0	1393	1	4166	0	4395	0	5434	0	1084	1	1204	1	8464	0	3853	0	1117	0	6024—1	3702—1	2017—1	8422—2
1036	0	2726	0	1622	1	5923	0	6956	0	1357	1	1490	1	1042	1	4732	0	1370	0	7385—1	4537—1	2471—1	1032—1
8656—1	2167	0	4389	0	1879	1	9327	0	1725	1	1860	1	1291	1	5839	0	1688	0	9093—1	5584—1	3040—1	1269—1	
7251—1	1781	0	3422	0	6083	0	2360	1	2290	1	2375	1	1627	1	7320	0	2111	0	1136	0	6971—1	3793—1	1583—1
5669—1	1375	0	2579	0	4336	0	8530	0	4362	1	3349	1	2224	1	9890	0	2838	0	1524	0	9339—1	5077—1	2117—1
4149—1	9997—1	1853	0	3057	0	5794	0	2114	1	6256	1	3308	1	1423	1	4035	0	2155	0	1316	0	7140—1	2973—1
2973—1	7140—1	1317	0	2155	0	4035	0	1423	1	3308	1	6256	1	2114	1	5794	0	3057	0	1853	0	9997—1	4149—1
2117—1	5077—1	9339—1	1524	0	2838	0	9890	0	2224	1	3349	1	4362	1	8530	0	4336	0	2579	0	1375	0	5669—1
1583—1	3793—1	6971—1	1136	0	2111	0	7320	0	1627	1	2375	1	2290	1	2360	1	6083	0	3422	0	1781	0	7251—1
1269—1	3040—1	5584—1	9093—1	1688	0	5839	0	1291	1	1860	1	1725	1	9327	0	1879	1	4389	0	2167	0	8656—1	
1032—1	2471—1	4537—1	7385—1	1370	0	4732	0	1042	1	1490	1	1357	1	6956	0	5923	0	1622	1	2726	0	1036	0
8422—2	2017—1	3702—1	6024—1	1117	0	3853	0	8465	0	1204	1	1084	1	5434	0	4395	0	4166	0	1393	1	1317	0
7052—2	1689—1	3099—1	5042—1	9345—1	3222	0	7067	0	1002	1	8962	0	4444	0	3528	0	3176	0	2708	0	1196	1	

$$\tau_0 = 20$$

136	1	501	0	581	0	630	0	772	0	167	1	193	1	133	1	564	0	145	0	754—1	442—1	224—1	851—2		
240	0	178	1	830	0	859	0	103	1	221	1	253	1	175	1	739	0	189	0	986—1	579—1	293—1	111—1		
185	0	537	0	230	1	124	1	143	1	298	1	338	1	232	1	977	0	250	0	130	0	764—1	386—1	147—1	
151	0	416	0	910	0	289	1	201	1	400	1	445	1	303	1	127	1	325	0	169	0	991—1	501—1	190—1	
121	0	329	0	685	0	128	1	398	1	550	1	589	1	396	1	165	1	421	0	219	0	128	0	649—1	246—1
910—1	243	0	491	0	869	0	178	1	915	1	836	1	545	1	225	1	572	0	297	0	174	0	877—1	333—1	
650—1	172	0	343	0	594	0	117	1	483	1	143	2	806	1	322	1	808	0	417	0	243	0	123	0	465—1
465—1	123	0	243	0	417	0	808	0	322	1	806	1	143	2	483	1	117	1	594	0	343	0	172	0	650—1
333—1	877—1	174	0	297	0	572	0	225	1	545	1	836	1	915	1	178	1	869	0	492	0	243	0	910—1	
246—1	649—1	128	0	219	0	421	0	165	1	396	1	589	1	550	1	398	1	128	1	685	0	329	0	121	0
190—1	501—1	991—1	169	0	325	0	127	1	303	1	445	1	400	1	201	1	289	1	910	0	416	0	151	0	
147—1	386—1	764—1	130	0	250	0	977	0	232	1	338	1	298	1	143	1	124	1	230	1	537	0	185	0	
111—1	293—1	579—1	986—1	189	0	739	0	175	1	253	1	221	1	103	1	859	0	830	0	178	1	240	0		
851—2	224—1	442—1	754—1	145	0	564	0	133	1	193	1	167	1	772	0	630	0	581	0	501	0	136	1		

$$\tau_0 = 30$$

153	1	728	0	837	0	891	0	107	1	248	1	289	1	197	1	809	0	189	0	972—1	560—1	271—1	964—2			
344	0	219	1	127	1	130	1	154	1	350	1	405	1	276	1	113	1	263	0	135	0	779—1	378—1	134—1		
260	0	810	0	304	1	194	1	221	1	492	1	562	1	380	1	155	1	362	0	186	0	107	0	519—1	184—1	
206	0	614	0	141	1	402	1	319	1	677	1	758	1	509	1	207	1	481	0	248	0	142	0	690—1	245—1	
162	0	471	0	103	1	198	1	578	1	942	1	102	2	673	1	272	1	632	0	324	0	187	0	904—1	321—1	
118	0	338	0	715	0	129	1	270	1	150	2	143	2	920	1	368	1	852	0	437	0	251	0	121	0	430—1
836—1	237	0	493	0	869	0	173	1	786	1	241	2	135	2	523	1	120	1	610	0	349	0	168	0	597—1	
597—1	168	0	349	0	610	0	120	1	523	1	135	2	241	2	786	1	173	1	869	0	493	0	237	0	836—1	
430—1	121	0	251	0	437	0	852	0	368	1	920	1	143	2	150	2	270	1	129	1	715	0	338	0	118	0
321—1	904—1	187	0	324	0	632	0	272	1	673	1	102	2	942	1	578	1	198	1	103	1	471	0	162	0	
245—1	690—1	142	0	248	0	481	0	207	1	509	1	758	1	677	1	319	1	402	1	141	1	614	0	206	0	
184—1	519—1	107	0	186	0	362	0	155	1	380	1	562	1	492	1	221	1	194	1	304	1	810	0	260	0	
134—1	378—1	779—1	135	0	263	0	113	1	276	1	405	1	350	1	154	1	130	1	127	1	219	1	344	0		
964—2	271—1	560—1	972—1	189	0	809	0	197	1	289	1	248	1	107	1	891	0	837	0	728	0	153	1			

169	1	959	0	110	1	115	1	138	1	335	1	385	1	261	1	106	1	231	0	118	0	673—1	317—1	107—1		
445	0	262	1	174	1	176	1	207	1	496	1	565	1	381	1	155	1	337	0	172	0	981—1	462—1	156—1		
331	0	109	1	385	1	270	1	305	1	714	1	805	1	540	1	219	1	476	0	243	0	138	0	651—1	219—1	
258	0	811	0	193	1	524	1	447	1	994	1	110	2	730	1	295	1	640	0	327	0	186	0	875—1	295—1	
198	0	609	0	138	1	271	1	775	1	139	2	148	2	968	1	389	1	843	0	430	0	244	0	115	0	387—1
143	0	430	0	938	0	171	1	361	1	217	2	206	2	131	2	522	1	113	1	574	0	326	0	153	0	516—1
100	0	299	0	642	0	114	1	229	1	112	2	349	2	192	2	740	1	158	1	800	0	453	0	212	0	714—1
714—1	212	0	453	0	800	0	158	1	740	1	192	2	349	2	112	2	229	1	114	1	642	0	299	0	100	0
516—1	153	0	326	0	574	0	113	1	522	1	131	2	206	2	217	2	361	1	171	1	938	0	430	0	143	0
387—1	115	0	244	0	430	0	843	0	389	1	968	1	148	2	139	2	775	1	271	1	138	1	609	0	198	0
295—1	875—1	186	0	327	0	640	0	295	1	730	1	110	2	994	1	447	1	524	1	193	1	811	0	258	0	
219—1	651—1	138	0	243	0	476	0	219	1	540	1	805	1	714	1	305	1	270	1	385	1	109	1	331	0	
156—1	462—1	981—1	172	0	337	0	155	1	381	1	565	2	496	1	207	1	176	1	174	1	262	1	445	0		
107—1	317—1	673—1	118	0	231	0	106	1	261	1	385	1	335	1	138	1	115	1	110	1	959	0	169	1		

$$\tau_0 = 50$$

185	1	119	1	136	1	142	1	171	1	427	1	480	1	323	1	132	1	276	0	140	0	790—1	363—1	117—1		
545	0	307	1	224	1	224	1	265	1	654	1	730	1	489	1	200	1	417	0	211	0	119	0	549—1	176—1	
400	0	138	1	472	1	351	1	397	1	957	1	106	2	704	1	287	1	597	0	302	0	171	0	786—1	253—1	
306	0	101	0	248	1	654	1	585	1	134	2	145	2	957	1	389	1	808	0	409	0	231	0	106	0	342—1
232	0	747	0	173	1	345	1	991	1	187	2	195	2	127	2	514	1	106	1	538	0	304	0	140	0	449—1
166	0	522	0	116	1	214	1	457	1	290	2	270	2	171	2	687	1	142	1	715	0	404	0	185	0	596—1
116	0	362	0	794	0	142	1	288	1	147	2	462	2	251	2	971	1	198	1	995	0	560	0	257	0	824—1
824—1	257	0	560	0	995	0	198	1	971	1	251	2	462	2	147	2	288	1	142	1	794	0	362	0	116	0
596—1	185	0	404	0	715	0	142	1	687	1	171	2	270	2	290	2	457	1	214	1	116	1	522	0	166	0
449—1	140	0	304	0	538	0	106	1	514	1	127	2	195	2	187	2	991	1	345	1	173	1	747	0	232	0
342—1	106	0	231	0	409	0	808	0	389	1	957	1	145	2	134	2	585	1	654	1	248	1	101	1	306	0
253—1	786—1	171	0	302	0	598	0	287	1	704	1	106	2	957	1	597	1	351	1	472	1	138	1	400	0	
176—1	549—1	119	0	211	0	417	0	200	1	489	1	730	1	654	1	265	1	224	1	224	1	307	1	545	0	
117—1	363—1	790—1	140	0	276	0	132	1	323	1	480	1	427	1	171	1	142	1	136	1	119	1	185	1		

$$\tau_0 = 60$$

202	1	144	1	164	1	170	1	205	1	521	1	574	1	385	1	159	1	323	0	162	0	910—1	411—1	127—1		
645	0	355	1	276	1	276	1	327	1	820	1	898	1	599	1	248	1	502	0	252	0	142	0	638—1	198—1	
466	0	168	1	564	1	436	1	496	1	121	2	131	2	871	1	359	1	728	0	364	0	205	0	924—1	286—1	
352	0	121	1	304	1	794	1	733	1	170	2	180	2	119	2	488	1	988	0	494	0	278	0	125	0	388—1
265	0	886	0	210	1	422	1	122	2	237	2	242	2	157	2	643	1	130	1	649	0	364	0	164	0	509—1
188	0	615	0	140	1	259	1	558	1	367	2	334	2	212	2	857	1	172	1	860	0	483	0	218	0	674—1
131	0	425	0	951	0	172	1	350	1	184	2	577	2	311	2	121	2	241	1	120	1	670	0	301	0	931—1
931—1	301	0	670	0	120	1	241	1	121	2	311	2	577	2	184	2	350	1	172	1	951	0	425	0	131	0
674—1	218	0	483	0	860	0	172	1	857	1	712	2	334	2	367	2	558	1	259	1	140	1	615	0	188	0
509—1	164	0	364	0	649	0	130	1	643	1	157	2	242	2	237	2	122	2	422	1	210	1	886	0	265	0
388—1	125	0	278	0	494	0	988	0	488	1	119	2	180	2	170	2	733	1	794	1	304	1	121	1	352	0
286—1	924—1	205	0	364	0	728	0	359	1	871	1	131	2	121	2	496	1	436	1	564	1	168	1	466	0	
198—1	638—1	142	0	252	0	502	0	248	1	599	1	898	1	820	1	327	1	276	1	276	1	355	1	645	0	
127—1	411—1	910—1	162	0	323	0	159	1	385	1	574	1	521	1	205	1	170	1	164	1	144	1	202	1		

$$\tau_0 = 70$$

218	1	169	1	192	1	199	1	242	1	616	1	668	1	446	1	186	1	374	0	185	0	104	0	460—1	138—1	
743	0	404	1	332	1	331	1	395	1	992	1	107	2	711	1	297	1	595	0	295	0	165	0	731—1	219 1	
530	0	198	1	661	1	526	1	603	1	148	2	157	2	104	2	433	1	868	0	430	0	240	0	106	0	319—1
397	0	141	1	362	1	943	1	892	1	207	2	216	2	142	2	589	1	118	1	583	0	326	0	144	0	433—1
297	0	103	1	247	1	502	1	148	2	289	2	289	2	188	2	775	1	155	1	765	0	427	0	189	0	567—1
210	0	710	0	164	1	306	1	665	1	446	2	399	2	252	2	103	2	205	1	101	1	564	0	250	0	748—1
146	0	490	0	111	1	202	1	417	1	222	2	694	2	370	2	146	2	286	1	141	1	783	0	346	0	104 0
104	0	346	0	783	0	141	1	286	1	146	2	370	2	694	2	222	2	417	1	202	1	111	1	490	0	146 0
748—1	250	0	564	0	101	1	205	1	103	2	252	2	399	2	446	2	665	1	306	1	164	1	710	0	210 0	
567—1	189	0	427	0	765	0	155	1	775	1	188	2	289	2	289	2	148	2	502	1	247	1	103	1	297 0	
433—1	144	0	326	0	583	0	118	1	589	1	142	2	216	2	207	2	892	1	943	1	362	1	141	1	397 0	
319—1	106	0	240	0	430	0	868	0	433	1	104	2	157	2	148	2	603	1	526	1	661	1	198	1	530 0	
219—1	731—1	165	0	295	0	595	0	297	1	711	1	107	2	992	1	395	1	331	1	332	1	404	1	743	0	
138—1	460—1	104	0	185	0	374	0	186	1	446	1	668	1	616	1	242	1	199	1	192	1	169	1	218	1	

$$\tau_0 = 80$$

235	1	194	1	222	1	230	1	281	1	712	1	762	1	508	1	214	1	428	0	210	0	117	0	511—1	149—1		
840	0	456	1	389	1	388	1	467	1	117	2	124	2	825	1	347	1	694	0	340	0	189	0	827—1	240—1		
593	0	229	1	763	1	621	1	716	1	174	2	183	2	121	2	509	1	102	1	498	0	277	0	121	0	352—1	
441	0	162	1	421	1	110	2	106	2	245	2	252	2	165	2	692	1	138	1	676	0	376	0	164	0	478—1	
328	0	117	1	286	1	584	1	175	2	341	2	337	2	218	2	909	1	181	1	886	0	492	0	215	0	625—1	
231	0	806	0	189	1	354	1	778	1	527	2	464	2	293	2	121	2	240	1	117	1	649	0	284	0	824—1	
161	0	556	0	128	1	234	1	488	1	260	2	812	2	431	2	171	2	335	1	163	1	901	0	393	0	114	0
114	0	393	0	901	0	163	1	335	1	171	2	431	2	812	2	260	2	488	1	234	1	128	1	556	0	161	0
824—1	284	0	649	0	117	1	240	1	121	2	293	2	464	2	527	2	778	1	354	1	189	1	806	0	231	0	
625—1	215	0	492	0	886	0	181	1	909	1	218	2	337	2	341	2	175	2	584	1	286	1	117	1	328	0	
478—1	164	0	376	0	676	0	138	1	692	1	165	2	252	2	245	2	106	2	110	2	421	1	162	1	441	0	
352—1	121	0	277	0	498	0	102	1	509	1	121	2	183	2	174	2	716	1	621	1	763	1	229	1	593	0	
240—1	827—1	189	0	340	0	694	0	347	1	825	1	124	2	117	2	467	1	388	1	389	1	456	1	840	0		
149—1	511—1	117	0	210	0	428	0	214	1	508	1	762	1	712	1	281	1	230	1	222	1	194	1	235	1		

$$\tau_0 = 90$$

252	1	221	1	253	1	262	1	322	1	807	1	855	1	570	1	242	1	496	0	236	0	130	0	563—1	159—1		
938	0	510	1	450	1	449	1	512	1	134	2	141	2	939	1	397	1	798	0	387	0	214	0	924—1	262—1		
654	0	260	1	870	1	719	1	833	1	201	2	209	2	138	2	584	1	117	1	569	0	314	0	136	0	384—1	
483	0	182	1	482	1	126	2	123	2	232	2	288	2	189	2	794	1	159	1	772	0	426	0	184	0	520—1	
358	0	132	1	325	1	670	1	203	2	392	2	384	2	249	2	104	2	208	1	101	1	557	0	240	0	680—1	
252	0	904	0	215	1	404	1	898	1	608	2	530	2	334	2	138	2	276	1	133	1	735	0	317	0	896—1	
175	0	622	0	145	1	267	1	562	1	299	2	932	2	492	2	196	2	386	1	186	1	102	1	440	0	124	0
124	0	440	0	102	1	186	1	386	1	196	2	492	2	932	2	299	2	562	1	267	1	145	1	622	0	175	0
896—1	317	0	735	0	133	1	276	1	138	2	334	2	530	2	608	2	898	1	404	1	215	1	904	0	252	0	
680—1	240	0	557	0	101	1	208	1	104	2	249	2	384	2	392	2	203	2	670	1	325	1	132	1	358	0	
520—1	184	0	426	0	772	0	159	1	794	1	189	2	288	2	282	2	123	2	126	2	482	1	182	1	483	0	
384—1	136	0	314	0	569	0	117	1	584	1	138	2	209	2	201	2	833	1	719	1	870	1	260	1	654	0	
262—1	924—1	214	0	387	0	798	0	397	1	939	1	141	1	134	2	542	1	449	1	450	1	510	1	938	0		
159—1	563—1	130	0	236	0	486	0	242	1	570	1	855	1	807	1	322	1	262	1	253	1	221	1	252	1		

269	1	248	1	285	1	295	1	364	1	903	1	951	1	634	1	270	1	546	0	263	0	145	0	617—1	170—1		
103	1	566	1	513	1	512	1	621	1	152	2	159	2	106	2	449	1	908	0	438	0	241	0	103	0	283—1	
715	0	292	1	982	1	822	1	956	1	228	2	236	2	156	2	662	1	134	1	644	0	354	0	151	0	416—1	
526	0	204	1	545	1	144	2	141	2	320	2	324	2	212	2	898	1	181	1	873	0	480	0	205	0	564—1	
389	0	146	1	366	1	758	1	233	2	444	2	432	2	280	2	118	2	237	1	114	1	626	0	267	0	736—1	
273	0	100	1	241	1	457	1	102	2	691	2	597	2	375	2	156	2	313	1	150	1	826	0	352	0	969—1	
189	0	691	0	163	1	301	1	640	1	338	2	105	3	554	2	222	2	439	1	210	1	115	1	488	0	134	0
134	0	488	0	115	1	210	1	439	1	222	2	554	2	105	3	338	2	640	1	301	1	163	1	691	0	189	0
969—1	352	0	826	0	150	1	313	1	156	2	375	2	597	2	691	2	102	2	457	1	241	1	100	1	273	0	
736—1	267	0	626	0	114	1	237	1	118	2	280	2	432	2	444	2	233	2	758	1	366	1	146	1	389	0	
564—1	205	0	480	0	873	0	181	1	898	1	212	2	324	2	320	2	141	2	144	2	545	1	204	1	526	0	
416—1	151	0	354	0	644	0	134	1	662	1	156	2	236	2	228	2	956	1	822	1	982	1	292	1	715	0	
283—1	103	0	241	0	438	0	908	0	449	1	106	2	159	2	152	2	621	1	512	1	513	1	566	1	103	1	
170—1	617—1	145	0	263	0	546	0	270	1	634	1	951	1	903	1	364	1	295	1	285	1	248	1	269	1		