АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 ФЕВРАЛЬ, 1967 ВЫПУСК 1

# ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ. III

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 28 октября 1966

Получены уравнения и формулы, определяющие среднее число рассеяний фотона в плоском слое конечной оптической толщины. Рассмотрены два случая источников излучения: 1) на плоский слой падает излучение извне, 2) источники излучения распределены в слое равномерно. Полученные формулы упрощены для слоя большой оптической толщины.

В первой статье этой серии [1] были даны общие формулы для среднего числа рассеяний фотона и сделано их применение сначала к одномерной, а потом к трехмерной полубесконечной среде. В настоящей статье среднее число рассеяний фотона определяется для плоского слоя конечной оптической толщины $\tau_0$.

Как и раньше, будем считать, что фотон, поглощенный в данном месте переизлучается затем (то есть рассеивается) с вероятностью $\lambda$ или испытывает истинное поглощение с вероятностью $1-\lambda$, причем величина $\lambda$ не меняется в среде. Будем также предполагать, что элементарный объем рассеивает излучение изотропно и без изменения частоты.

В этой статье сперва определяется среднее число рассеяний фотона, поглощенного на данной оптической глубине $\tau$ (и диффундирующего после этого в среде). Затем среднее число рассеяний фотона находится для некоторых частных типов источников излучения. В конце статьи полученные формулы применяются к случаю, когда оптическая толщина рассматриваемого плоского слоя очень велика ($\tau_0 \gg 1$).

*Среда конечной оптической толщины.* Пусть $Q(\tau, \tau_0)$ — среднее число рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине $\tau$ в плоском слое оптической толщины $\tau_0$. Как было показано ранее [1], эта величина определяется формулой

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{1 - P(\tau, \tau_0)}{1 - \lambda}, \tag{1}$$

где $P(\tau, \tau_0)$ — полная вероятность выхода из плоского слоя фотона, поглощенного на глубине $\tau$ (то есть вероятность выхода через обе границы слоя во всех направлениях).

Для получения уравнения, определяющего величину $P(\tau, \tau_0)$, воспользуемся уравнением для вероятности выхода фотона в заданном направлении

$$p(\tau, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1 |\tau - t| \, p(t, \eta, \tau_0) \, dt + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}. \tag{2}$$

Здесь $p(\tau, \eta, \tau_0)\,d\omega$ — вероятность того, что фотон, поглощенный на глубине $\tau$, выйдет из слоя через границу $\tau = 0$ под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ (см. [2], гл. 6).

Очевидно, что

$$P(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^1 [p(\tau, \eta, \tau_0) + p(\tau_0 - \tau, \eta, \tau_0)] \, d\eta. \tag{3}$$

Поэтому величина $P(\tau, \tau_0)$ будет определяться уравнением

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1 |\tau - t| \, P(t, \tau_0) \, d\tau + \frac{\lambda}{2} E_2 \tau + \frac{\lambda}{2} E_2 (\tau_0 - \tau). \tag{4}$$

Однако вместо рассмотрения уравнения (4) удобно получить уравнение, определяющее непосредственно искомую величину $Q(\tau, \tau_0)$. Для этого в уравнение (4) следует подставить выражение $P(\tau, \tau_0)$ через $Q(\tau, \tau_0)$, вытекающее из (1). Сделав это, находим

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1 |\tau - t| \, Q(t, \tau_0) \, dt + 1. \tag{5}$$

Ясно, что уравнение (5) может быть также получено из простых вероятностных соображений.

Пусть $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ — резольвента основного интегрального уравнения рассеяния света в плоском слое (и, в частности, уравнения (5)). Как известно, (см. [3]), резольвента $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0) = \Gamma(\tau, 0, \tau_0)$, которая должна играть очень важную роль в теории рассеяния света. Поэтому и величину $Q(\tau, \tau_0)$ мы выразим через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$.

На основании определения резольвенты имеем

$$Q(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Gamma(\tau, \tau', \tau_0)\, d\tau'. \tag{6}$$

Но резольвента $\Gamma(\tau, \tau', \tau_0)$ связана с функцией $\Phi(\tau, \tau_0)$ уравнением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau, \tau_0)\,\Phi(\tau', \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\,\Phi(\tau_0 - \tau', \tau_0). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) (точнее говоря, дифференцируя (6) по $\tau$, используя (7) и затем интегрируя), получаем

$$Q(\tau, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0)\,[\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)], \tag{8}$$

где

$$\Psi(\tau, \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \tau_0)\, d\tau'. \tag{9}$$

Формула (8) и дает искомое выражение $Q(\tau, \tau_0)$ через $\Phi(\tau, \tau_0)$. Напомним, что функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ определяется уравнением

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1 |\tau - t|\, \Phi(t, \tau_0)\, dt + \frac{\lambda}{2} E_1 \tau. \tag{10}$$

При небольших значениях $\tau_0$ функция $\Phi(\tau, \tau_0)$ была табулирована [4]. При $\tau_0 \gg 1$ существуют асимптотические формулы для этой функции, которыми мы воспользуемся ниже.

Если величина $Q(\tau, \tau_0)$ известна, то могут быть найдены и величины $Q_1(\tau, \tau_0)$ и $Q_2(\tau, \tau_0)$, представляющие собой средние числа рассеяний фотонов, выходящих из среды наружу и гибнущих в среде соответственно. Для этого служат формулы (10) и (11) первой из статей [1]. Однако так как в эти формулы входит производная $\frac{\partial \Psi(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda}$, то их использование встречает некоторые трудности.

Отметим один частный случай формулы (8), а именно допустим, что фотон поглощается на границе плоского слоя. Полагая в формуле (8) $\tau = 0$, находим

$$Q(0, \tau_0) = \Psi(\tau_0, \tau_0). \tag{11}$$

Можно также получить другую формулу для величины $Q(0, \tau)$, выражающую ее через нулевые моменты функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ Амбарцумяна. Полагая $\tau = 0$ в формуле (1), имеем

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1 - P(0, \tau_0)}{1 - \lambda}. \tag{12}$$

Но из (3), при $\tau = 0$ следует

$$P(0, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}[\alpha_0(\tau_0) + \beta_0(\tau_0)], \tag{13}$$

где принято во внимание, что

$$p(0, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\varphi(\eta, \tau_0) \quad \text{и} \quad p(\tau_0, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi}\psi(\eta, \tau_0) \tag{14}$$

и использованы обозначения

$$\alpha_n(\tau_0) = \int_0^1 \varphi(\eta, \tau_0)\eta^n d\eta, \qquad \beta_n(\tau_0) = \int_0^1 \psi(\eta, \tau_0)\eta^n d\eta. \tag{15}$$

Подставляя (13) в (12) и пользуясь соотношением (см. [2] стр. 106)

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 - \frac{\lambda}{2}\beta_0\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0\right) = 1 - \lambda, \tag{16}$$

находим

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0}. \tag{17}$$

В случае чистого рассеяния (то есть при $\lambda = 1$) имеем

$$\alpha_0(\tau_0) + \beta_0(\tau_0) = 2 \tag{18}$$

и формула (17) принимает вид

$$Q(0, \tau_0) = \frac{1}{\beta_0(\tau_0)}. \tag{19}$$

Как увидим дальше, среднее число рассеяний фотонов и во многих других случаях выражается через функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моменты. Эти функции были введены в теорию рассеяния света В. А. Амбарцумяном [5] и подробно изучены Чандрасекаром [6] (обозначившим их через $X(\mu, \tau_0)$ и $Y(\mu, \tau_0)$). Таблицы этих функций составили Собоути [7] и Карлстедт и Малликин [8]. При больших значениях $\tau_0$ имеются асимптотические формулы для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$, которые мы применим ниже.

*Внешние источники излучения.* Знание функции $Q(\tau, \tau_0)$ позволяет определить среднее число рассеяний фотона при любых источниках излучения. Это можно сделать по формуле

$$Q^* = \frac{\int\limits_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0) f(\tau)\, d\tau}{\int\limits_0^{\tau_0} f(\tau)\, d\tau}, \tag{20}$$

где $f(\tau)\, d\tau$ — число фотонов, приходящих непосредственно от источников излучения и поглощаемых между глубинами $\tau$ и $\tau + d\tau$.

Рассмотрим сначала случай, когда источники излучения находятся вне среды. Мы найдем среднее число рассеяний фотонов в зависимости от угла их падения, который обозначим через $\arccos \zeta$.

В данном случае $f(\tau) = e^{-\frac{\tau}{\zeta}}$ и из формулы (20) следует

$$Q^* = \frac{\int\limits_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0)\, e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\tau}{\zeta}}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}. \tag{21}$$

Подставляя в (21) выражение (8) и интегрируя по частям, находим

$$Q^* = \frac{\Psi(\tau_0, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}} \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} [\Phi(\tau, \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)]\, d\tau \right\}. \tag{22}$$

Но, как показано было ранее [3], функции $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ выражаются через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$ посредством соотношений

$$\varphi(\zeta, \tau_0) = 1 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \Phi(\tau, \tau_0)\, d\tau, \tag{23}$$

$$\psi(\zeta, \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + \int\limits_0^{\tau_0} \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0)\, d\tau. \tag{24}$$

Поэтому вместо (22) получаем

$$Q^* = \Psi(\tau_0, \tau_0) \frac{\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}. \tag{25}$$

Так как сопоставление формул (11) и (17) показывает, что

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0}, \tag{26}$$

то формулу (25) можно переписать также в виде

$$Q^* = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\beta_0} \frac{\varphi(\zeta, \tau_0) - \psi(\zeta, \tau_0)}{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}. \tag{27}$$

Вычисление среднего числа рассеяний фотонов по формуле (27) не представляет труда, так как функции $\varphi(\zeta, \tau_0)$ и $\psi(\zeta, \tau_0)$ и их моменты хорошо известны.

При $\zeta = 0$ формула (27), как и надо было ожидать, переходит в формулу (17).

*Равномерное распределение источников излучения.* Допустим теперь, что источники излучения находятся внутри среды. Если они излучают изотропно, то среднее число рассеяний фотонов опять можно найти по формуле (20), в которой под $f(\tau)\,d\tau$ надо понимать число фотонов, излучаемых между глубинами $\tau$ и $\tau + d\tau$.

Рассмотрим случай, когда источники излучения распределены в среде равномерно, то есть $f(\tau) = 1$. На основании формулы (20) имеем

$$Q^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q(\tau, \tau_0)\, d\tau. \tag{28}$$

Подставляя в (28) выражение (8) и интегрируя при учете (9), получаем

$$Q^* = \Psi(\tau_0, \tau_0) \left[ \Psi(\tau_0, \tau_0) - \frac{2}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0)\, \tau d\tau \right]. \tag{29}$$

Величина $\Psi(\tau_0, \tau_0)$ выражается через моменты функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ при помощи формулы (26). Мы можем также выразить через моменты этих функций и интеграл, входящий в (29).

Чтобы сделать это, воспользуемся следующим уравнением

$$\frac{\partial p(\tau, \eta, \tau_0)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta, \tau_0) + \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta, \tau_0) \Phi(\tau, \tau_0) - -\frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta, \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau, \tau_0), \tag{30}$$

вытекающим из (2) (см. [2], гл. 6), и примем во внимание, что

$$\Phi(\tau, \tau_0) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0) \frac{d\eta}{\eta}. \tag{31}$$

Умножая (30) на $2\pi\, d\tau\, \eta\, d\eta$ и интегрируя по $\tau$ в пределах от 0 до $\tau_0$ и по $\eta$ в пределах от 0 до 1, получаем

$$2\pi \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0)\, d\eta = \frac{\lambda}{2} (\alpha_1 - \beta_1) \Psi(\tau_0, \tau_0). \tag{32}$$

Здесь мы использовали формулы (9) и (14).

Умножая (30) на $2\pi\, \tau d\tau d\eta$ и интегрируя в тех же пределах, находим

$$2\pi \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^1 p(\tau, \eta, \tau_0)\, d\eta = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 - \frac{\lambda}{2}\beta_0\right) \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0)\, \tau\, d\tau + + \frac{\lambda}{2} \beta_0 \tau_0 \Psi(\tau_0, \tau_0). \tag{33}$$

Из сопоставления формул (32) и (33) получаем

$$\int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0)\, \tau\, d\tau = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \frac{\lambda}{2}\alpha_0 - \frac{\lambda}{2}\beta_0} \Psi(\tau_0, \tau_0), \tag{34}$$

или, при учете (16) и (26),

$$\int_0^{\tau_0} \Phi(\tau, \tau_0)\, \tau\, d\tau = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \lambda}. \tag{35}$$

Подстановка (26) и (35) в (29) дает

$$Q^* = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\beta_0}\left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2}\alpha_0+\frac{\lambda}{2}\beta_0}-\frac{\lambda(\alpha_1-\beta_1-\beta_0\tau_0)}{\tau_0(1-\lambda)}\right]. \quad (36)$$

Этой формулой и определяется среднее число рассеяний фотона при равномерном распределении источников излучения в плоском слое.

В случае чистого рассеяния вычисление интеграла по формуле (35) дает неопределенность, так как при $\lambda = 1$ имеем

$$\alpha_1 - \beta_1 = \beta_0\tau_0. \quad (37)$$

Чтобы раскрыть неопределенность, надо воспользоваться уравнением (30) и тем фактом, что в данном случае

$$2\pi\int_0^1 [p(\tau, \eta, \tau_0) + p(\tau_0-\tau, \eta, \tau_0)]\,d\eta = 1. \quad (38)$$

Это уже было сделано ранее (см. [2], стр. 214) и оказалось, что

$$\int_0^{\tau_0}\Phi(\tau, \tau_0)\,\tau d\tau = \frac{\frac{\tau_0^3}{3}\beta_0+\tau_0^2\beta_1+2\tau_0\beta_2-2(\alpha_3-\beta_3)}{\beta_0[\tau_0(\alpha_1+\beta_1)+2(\alpha_2+\beta_2)]}. \quad (39)$$

Подставляя (26) и (39) в формулу (29) и учитывая (18) и (37), получаем

$$Q^* = \frac{\frac{1}{6}\tau_0^3\beta_0+\tau_0(\alpha_2-\beta_2)+2(\alpha_3-\beta_3)}{\beta_0^2\tau_0\left[\frac{\tau_0}{2}(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2\right]}. \quad (40)$$

Формула (40) и дает среднее число рассеяний фотона при $\lambda = 1$.

*Плоский слой большой оптической толщины.* Полученные выше формулы сильно упрощаются в случае, когда оптическая толщина плоского слоя очень велика ($\tau_0 \gg 1$). Очевидно что этот случай наиболее интересен для практических применений.

Мы видели выше, что величина $Q(\tau, \tau_0)$, представляющая собой среднее число рассеяний фотона, поглощенного на любой оптической глубине $\tau$, при помощи формул (8) и (9) выражается через функцию $\Phi(\tau, \tau_0)$. Для этой же функции было получено [9] асимптотическое выражение через функцию $\Phi(\tau)$ для полубесконечной среды. Поэтому можно получить асимптотическое выражение и для величины $Q(\tau, \tau_0)$ через функцию $\Phi(\tau)$.

Оказывается, что вид асимптотической формулы для $\Phi(\tau, \tau_0)$ существенно зависит от того, какова роль истинного поглощения в данном слое. Поэтому мы будем различать следующие два случая: 1) роль истинного поглощения в слое велика ($k\tau_0 \gg 1$), 2) эта роль мала ($k\tau_0 \ll 1$). Здесь $k$ определяется уравнением

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \tag{41}$$

Ко второму случаю относится, в частности, среда, в которой происходит чистое рассеяние излучения ($k = 0$).

В первом из упомянутых случаев функция $\Psi(\tau, \tau_0)$, связанная с $\Phi(\tau, \tau_0)$ формулой (9), отличается от функции $\Psi(\tau)$ для полубесконечной среды на величину, содержащую малый множитель $e^{-k\tau_0}$. В первом приближении можно заменить $\Psi(\tau, \tau_0)$ на $\Psi(\tau)$. Это позволяет переписать формулу (8) для данного случая в виде

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left[ \Psi(\tau) + \Psi(\tau_0 - \tau) - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \right]. \tag{42}$$

Здесь принято во внимание, что

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{43}$$

Это следует из формулы (26), так как при $\tau_0 = \infty$ имеем

$$1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 = \sqrt{1-\lambda} \quad \text{и} \quad \beta_0 = 0.$$

Пользуясь формулами (20) и (42), мы можем получить асимптотическое выражение для величины $Q^*$, представляющей собой среднее число рассеяний фотонов при заданных источниках излучения.

Однако при рассмотренных выше типах источников излучения величину $Q^*$ можно найти непосредственно из формул (25) и (36). Для этого мы должны воспользоваться асимптотическими формулами для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$ и их моментов [10]. Применяя указанные асимптотические формулы и отбрасывая члены порядка $e^{-2k\tau_0}$ и $e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}$, вместо формулы (25) получаем

$$Q^* = \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{1-\lambda}} \left[ 1 - \frac{C_1}{k(1-k\zeta)} e^{-k\tau_0} \right], \tag{44}$$

где $\varphi(\zeta)$ представляет собой функцию $\varphi(\zeta, \tau_0)$ при $\tau = \infty$, а величина $C_1$ определяется из соотношения

$$C_1 \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{(1-k\eta)^2} \eta d\eta = 2k \int\limits_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k^2\eta^2} \eta d\eta. \tag{45}$$

Вместо формулы (36) аналогично находим

$$Q^* = \frac{1}{1-\lambda}\left[1 - \frac{\lambda \alpha_1(\infty)}{\tau_0 \sqrt{1-\lambda}}\right], \tag{46}$$

где откинуты члены порядка $e^{-k\tau_0}$.

Формула (44) дает среднее число рассеяний фотонов при освещении плоского слоя внешними источниками излучения (точнее говоря, при падении фотонов под углом $\arccos \zeta$ к нормали), а формула (46) — среднее число рассеяний фотонов при равномерном распределении источников излучения в слое.

Во втором из указанных выше случаев (то есть при $k\tau_0 \ll 1$) асимптотическая формула для функции $\Phi(\tau, \tau_0)$ имеет вид

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \Phi(\tau) - \frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)} \sqrt{3}, \tag{47}$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа. Поэтому для функции $\Psi(\tau, \tau_0)$ получаем следующее асимптотические выражение

$$\begin{gathered} \Psi(\tau, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{\tau_0 + 2q(\infty)} \Big\{ [\tau_0 + 2q(\infty)][\tau + q(\tau)] - \\ - \frac{\tau^2}{2} - q(\infty)\tau - \int\limits_0^\tau [q(\tau') - q(\tau_0 - \tau')]\, d\tau' \Big\}, \end{gathered} \tag{48}$$

где принято во внимание, что

$$\Psi(\tau) = [\tau + q(\tau)]\sqrt{3}. \tag{49}$$

Из формулы (46) следует

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}[\tau_0 + 2q(\infty)]. \tag{50}$$

Подстановка (48) и (50) в формулу (8) дает

$$Q(\tau, \tau_0) = \frac{3}{2}\Big\{[\tau_0 + 2q(\infty)][q(\tau) + q(\tau_0 - \tau) - q(\infty) + \\ + \tau(\tau_0 - \tau) - 2\int_0^{\tau}[q(\tau') - q(\tau_0 - \tau')]\,d\tau'\Big\}. \tag{51}$$

Этой формулой и определяется среднее число рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине $\tau$, в плоском слое большой оптической толщины $\tau_0$ при малой роли истинного поглощения.

В рассматриваемом случае автор [10] и недавно ван де Хюлст [11] получили следующие асимптотические выражения для функций $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\psi(\eta, \tau_0)$:

$$\varphi(\zeta, \tau_0) = \varphi(\zeta)\left[1 - \frac{\zeta}{\tau_0 + 2q(\infty)}\right], \tag{52}$$

$$\psi(\zeta, \tau_0) = \varphi(\zeta)\frac{\zeta}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \tag{53}$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция $\varphi(\zeta, \tau_0)$ при $\tau_0 = \infty$ и $\lambda = 1$.

Подставляя эти выражения в формулу (27), находим, что среднее число рассеяний фотона, входящего в плоский слой под углом $\arccos\zeta$ к нормали, равно

$$Q^* = \varphi(\zeta)\left[\frac{\tau_0}{2} + q(\infty) - \zeta\right]\sqrt{3}. \tag{54}$$

Для нахождения среднего числа рассеяний фотона в плоском слое при равномерном распределении источников мы должны подставить выражения (52) и (53) в формулу (40). Делая это и отбрасывая члены порядка $\frac{1}{\tau_0}$, имеем

$$Q^* = \frac{1}{4}\tau_0^2 + \frac{3}{2}q(\infty)\tau_0 + 3q^2(\infty). \tag{55}$$

Такой же результат получается и при подстановке (51) в (28).

Так как мы считаем, что оптическая толщина слоя велика, то вместо (53) можем пользоваться более простой формулой

$$Q^* = \frac{1}{4}\tau_0^2. \tag{56}$$

Заметим, что эта формула вытекает также из формулы (46) первой из статей [1], если ограничиться в ней членом, содержащим $\tau_0^{-2}$, и заменить $\tau_0$ на $\tau_0\sqrt{3}$ (как это обычно делается для приближенного перехода от одномерной среды к трехмерной).

Ленинградский
государственный университет

## NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. III

V. V. SOBOLEV

Equations and formulas for the mean number of scatterings of photons diffusing in plane layer of finite optical thickness are given. Two forms of sources of radiation are considered: 1) unidirectional external illumination; 2) uniform distribution of embedded sources. Simplifications arising in case of the layer of large optical thickness are also studied.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрофизика, 2, 135, 237, 1966.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
3. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 120, 69, 1958.
4. *В. В. Соболев, И. Н. Минин*, Астрон. ж., 38, 1025, 1961.
5. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.
6. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953.
7. *Y. Sobouti*, Ap. J., Suppl. ser., 7, № 72, 1963.
8. *J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin*, Ap. J., Suppl. ser., 12, № 113, 1966.
9. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 155, 316, 1964.
10. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 34, 336, 1957.
11. *H. C. van de Hulst*, Icarus, 3, 336, 1964.