АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 3 ФЕВРАЛЬ, 1967 ВЫПУСК 1

О ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ НА ДИАГРАММЕ ЦВЕТ — СВЕТИМОСТЬ

А. М. ЭЙГЕНСОН

Поступила 8 октября 1966
Исправлена 10 декабря 1966

При обычных предположениях относительно структуры белых карликов получена формула для их фазовой плотности на диаграмме цвет—светимость. Сопоставление результатов с наблюдательными данными свидетельствует в пользу правильности используемой модели.

Согласно обычной модели [1, 2], белый карлик состоит из вырожденного ядра и относительно тонкой оболочки. В таком случае светимость связана с внутренней температурой соотношением

$$L = A\,\mathfrak{M}\,T_{tr}^{3.5}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{M}$ — масса,

T_{tr} — температура переходного слоя, равная температуре практически изотермического ядра,

A — величина, зависящая от химического состава и равная [2]

$$A = 5.7\cdot 10^{1}\,\frac{\mu}{\mu_e^2}\cdot\frac{t/g}{Z(1+X)}\cdot\frac{1}{\mathfrak{M}_\odot}.$$

Здесь

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z; \qquad \frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{2}(1+X),$$

g — множитель Гаунта,

t — гильотинный множитель, а остальные обозначения обычные.

С другой стороны, если единственным источником излучения является тепловая энергия атомных ядер, то светимость

$$L = -\frac{d}{d\tau}(BT_{tr} \cdot \mathfrak{M}). \tag{2}$$

τ — время, $\quad B = \frac{3}{2}\frac{k}{\mu_A \cdot H}; \quad \frac{1}{\mu_A} = X + \frac{1}{4}Y.$

Исключая L из (1) и (2) и интегрируя, получаем

$$T_{tr} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_{tr(0)}^{2.5}} + 2.5\frac{A}{B}\tau\right)^{0.4}}. \tag{3}$$

$T_{tr(0)} = T_{tr}$ при $\tau = 0$.

Подставим (3) в (1):

$$L = \frac{A\mathfrak{M}}{\left(\frac{1}{T_{tr(0)}^{2.5}} + 2.5\frac{A}{B}\tau\right)^{1.4}}. \tag{4}$$

Перейдем к звездным величинам. Поскольку

$$M_{bol} = M_{\odot bol} - 2.5\lg\frac{L}{L_\odot} = C_1 - 2.5\lg L, \tag{5}$$

то, подставляя (4) в (5), получаем

$$M = C_1 - 2.5\lg(A\mathfrak{M}) + 3.5\lg\left(\frac{1}{T_{tr(0)}^{2.5}} + 2.5\frac{A}{B}\tau\right). \tag{6}$$

(Здесь индекс при M_{bol} опускается).

Для дальнейшего полезно образовать из (6)

$$\frac{1}{T_{tr(0)}^{2.5}} + 2.5\frac{A}{B}\tau = 10^{0.2857 \cdot M} \cdot 10^{-0.2857 \cdot C_1} \cdot A^{3/7}\mathfrak{M}^{5/7}. \tag{7}$$

Известно, что светимость связана с эффективной температурой соотношением

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_e^4. \tag{8}$$

Исключив L из (8) и (1), получим следующее соотношение между T_{tr} и T_e:

$$T_e = \left(\frac{A\mathfrak{M}}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{0.25} \cdot T_{tr}^{0.875}. \tag{9}$$

Примем такую систему цветов [3], при которой

$$CI \equiv C = \frac{\alpha}{T_{\text{цв}}} - \beta, \tag{10}$$

где $T_{\text{цв}}$ — цветовая температура, $\alpha = 7200$, $\beta = 0.55$.

Полагая $T_{\text{цв}} = T_e$, из (9) и (10) получаем с помощью (3)

$$C = \alpha \left(\frac{4\pi R^2 \sigma}{A\, \mathfrak{M}} \right)^{0.25} \left(\frac{1}{T_{\text{tr}(0)}^{2.5}} + 2.5 \frac{A}{B} \tau \right)^{0.35} - \beta. \tag{11}$$

Образуем функцию

$$\rho(M,\ C) = \rho_1(\mathfrak{M},\ \tau) \cdot \frac{1}{\dfrac{D(M,\ C)}{D(\mathfrak{M},\ \tau)}}, \tag{12}$$

имеющую смысл фазовой плотности звезд на M, C-диаграмме, причем $\rho_1(\mathfrak{M},\ \tau)$ — плотность на диаграмме масса — возраст. Здесь

$$\frac{D(M,\ C)}{D(\mathfrak{M},\ \tau)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial M}{\partial \mathfrak{M}} & \dfrac{\partial M}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial C}{\partial \mathfrak{M}} & \dfrac{\partial C}{\partial \tau} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Дифференцируя (6) и (11) и используя (7), после некоторых преобразований получаем для $\rho(M,\ C)$

$$\rho(M,\ C) = 10^{0.0857 \cdot M} \cdot (C + \beta)\, \mathfrak{M}^{3/7} \left| \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial R} \right| \rho_1(\mathfrak{M})\, N, \tag{14}$$

где

$$N = A^{-3/7} B \frac{1}{P};$$

$$P = 3.5 \cdot 0.43429 \cdot 2.5 \cdot 0.5\, \alpha^2 (4\pi\sigma)^{0.5}\, 10^{0.0857 C_1},$$

причем нами использовано то обстоятельство, что вдоль линий постоянной массы фазовая плотность не меняется, то есть

$$\rho_1(\mathfrak{M},\ \tau) = \rho_1(\mathfrak{M}).$$

Это допущение основывается на стационарности состава звездного населения нашей звездной системы.

Перепишем (14) в виде

$$\rho(M,\ C) = \varphi(M,\ C)\, \psi\, \rho_1(\mathfrak{M})\, N, \tag{15}$$

где

$$\varphi(M,\ C) = 10^{0.0857\,M}(C+\beta)$$

$$\Psi = \mathfrak{M}^{2/3}\left|\frac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,R}\right|.$$

Поскольку $R = R(M,\ C)$, то функция ψ может быть затабулирована для различных значений M, C. Действительно, исключая R из (8) и используя (5) и (10), получаем

$$R = \frac{10^{0.2(C_1-M)}}{(4\pi\sigma)^{0.5}}\cdot\frac{(C+\beta)^2}{\alpha^2} \tag{16}$$

или, подставляя значения $L_\odot = 3.86\cdot10^{33}$ *эрг/сек*; $M_{bol\odot} = 4.74$, имеем для R

$$R = 3.98258\cdot10^{11}\cdot10^{-0.2\,M}\cdot(C+0.55)^2. \tag{17}$$

Согласно [4 — 6], белые карлики сосредоточены в основном в области диаграммы, ограниченной неравенствами: $8 \leqslant M \leqslant 15$; $-0.3 \leqslant C \leqslant 0.5$. При малых M и больших C (положительных) радиусы, в соответствии с (17), оказываются большими, чем для конфигураций, рассчитанных Чандрасекаром [1]. Поэтому было выполнено решение уравнения, описывающего структуру белого карлика, также для центральной плотности, соответствующей значению параметра $1/y_0^2 = 0.9$. Уравнение

$$\frac{1}{\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\eta^2\frac{d\Phi}{d\eta}\right) = -\left(\Phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \tag{18}$$

с граничным условием $\Phi(\eta_1) = 1/y_0$ решалось при этом обычным численным методом, причем интегрирование начиналось из центра при помощи предложенного в [1] разложения в ряд. Для интересующего нас значения параметра $1/y_0^2 = 0.9$ получены следующие величины массы и радиуса: $\mathfrak{M}/\odot = 0.5157$; $R = 3.4346\cdot10^9$ *см* (при $\mu_e = 1$, что соответствует водородному составу).

Значения $\mathfrak{M}$ и $\dfrac{\partial\,\mathfrak{M}}{\partial\,R}$ для получения таблицы функции ψ снимались с графика $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ при $\mu_e = 1$ и $\mu_e = 2$, причем последний случай соответствует гелиевому составу. Табулирование функции φ является тривиальным.

Таким образом, соотношение (14) должно давать для различных значений M и C числа, соответствующие вероятности „попадания“

звезд в определенные интервалы светимости и цвета, или, при соответствующей нормировке, просто числа звезд в интервалах

$$(M,\ M+dM),\quad (C,\ C+dC).$$

Величина $\rho_1(\mathfrak{M})$ имеет смысл функции распределения белых карликов по массам; величина N для данного химического состава является постоянной.

Для сравнения результатов с наблюдательными данными необходимо ввести поправочный множитель, учитывающий эффект селекции: во-первых, абсолютно яркие звезды мы видим в бóльшем объеме; во-вторых, мы обнаруживаем главным образом те белые карлики, которые обладают достаточно большими собственными движениями.

Будем считать, что мы вычерпываем белые карлики до видимой величины m_0. Тогда для предельного расстояния это даст

$$r_0 = 10^{0.2(m_0-M)+1}. \tag{19}$$

Если считать пространственную плотность белых карликов в окрестностях Солнца постоянной, то значения функции $\rho(M, C)$, относящиеся к различным M, должны умножаться на объемы, определяемые соотношением $r_0^3 \sim 10^{-0.6M}$. Оказалось, однако, что это дает заниженные оценки для числа звезд с большими M.

Просмотр списка белых карликов в [4 — 6] показывает, что, согласно [4], большинство их имеет собственные движения, бóльшие, чем 0".1. Будем считать, что мы обнаруживаем белые карлики с собственными движениями, бóльшими некоторого предельного значения μ_0. Тогда, если скорость есть v, то для расстояния получаем неравенство $r_0 \leqslant \frac{v}{\mu_0}$. Теперь для учета эффекта селекции имеются два неравенства

$$\begin{aligned} r_0 &\leqslant 10^{0.2(m_0-M)+1} \\ r_0 &\leqslant \frac{v}{\mu_0}. \end{aligned} \tag{20}$$

При этом, если v выражается в *км/сек*, а μ_0 в угловых секундах в год, то для расстояния в парсеках вместо второго неравенства имеем

$$r_0 \leqslant 0.211067\,\frac{v}{\mu_0}.$$

Таким образом, для каждого значения M функцию $\rho(M, C)$ надо теперь умножать на объем, удовлетворяющий обоим неравенствам.

При этом нас интересуют не сами объемы, а их отношения, соответствующие различным M.

Полагая $m_0 = 16$, для μ_0 и v мы принимали значения $\mu_0 = 0.1$; $v = 30$ *км/сек*. Тогда функция $V(M, \mu_0)$, где V — отношение объемов, будет равна

$$V(M, \mu_0) \approx 1 \quad \text{при} \quad 8 < M < 12$$
$$10^{-0.6} \quad „ \quad M = 13$$
$$10^{-1.2} \quad „ \quad M = 14$$
$$10^{-1.8} \quad „ \quad M = 15.$$

Ниже приводится таблица функции $\varphi(M, C) \cdot \psi \cdot V(M, \mu_0)$. Эта таблица представляет собой теоретическое распределение белых карликов для случая $\rho_1(\mathfrak{M}) = \text{const}$. Функция Ψ подсчитывалась для водородного состава, причем масса выражалась в единицах солнечной массы, а радиус в единицах 10^5 *см*.

Таблица

M \ C	−0.3	−0.2	−0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
8	0.78	1.14	0.61	0.14	<0.07				
9	0.45	1.54	1.74	1.11	0.38	<0.11			
10	0.43	1.38	2.39	2.70	2.16	1.07	0.44	<0.17	
11	0.37	0.84	2.16	2.99	4.17	4.05	2.72	1.51	0.76
12	0.37	0.77	1.31	3.24	4.42	5.74	6.39	6.18	4,27
13	0.08	0.15	0.30	0.49	0.64	1.52	1.74	2.21	2.46
14	0.02	0.04	0.07	0.11	0.15	0.20	0.34	0.59	0.66
15	0.005	0.01	0.02	0.02	0.03	0.04	0.07	0.08	0.13

В соответствии с таблицей построена искусственная диаграмма цвет — светимость для белых карликов (рис. 1).

Были получены также таблицы и диаграммы для функции ψ, соответствующей гелиевому составу. Сравнение показало, что химический состав мало влияет на характер диаграммы.

Добавим еще, что при других разумных значениях μ_0 и v, например при $v = 20$ *км/сек*, $\mu_0 = 0.05$ величина $V(M, \mu_0)$, а следовательно и диаграмма, меняются незначительно.

Введение функции распределения белых карликов по массам $\rho_1(\mathfrak{M})$ в виде, например, гауссовой кривой может изменить дисперсию звезд на диаграмме. В связи с этим отметим, что, согласно [4], имеет место разделение белых карликов на диаграмме на две различные группы,

соответствующие, как полагают авторы, различным средним массам. Нетрудно видеть, что введение, например, двухвершинной функции $\rho_1(\mathfrak{M})$ в $\rho(M, C)$ даст возможность учесть это обстоятельство.

Далее, привлечение большего наблюдательного материала и более точный учет эффекта селекции может позволить в принципе определить характер функции $\rho_1(\mathfrak{M})$, если считать левую часть (14) заданной.

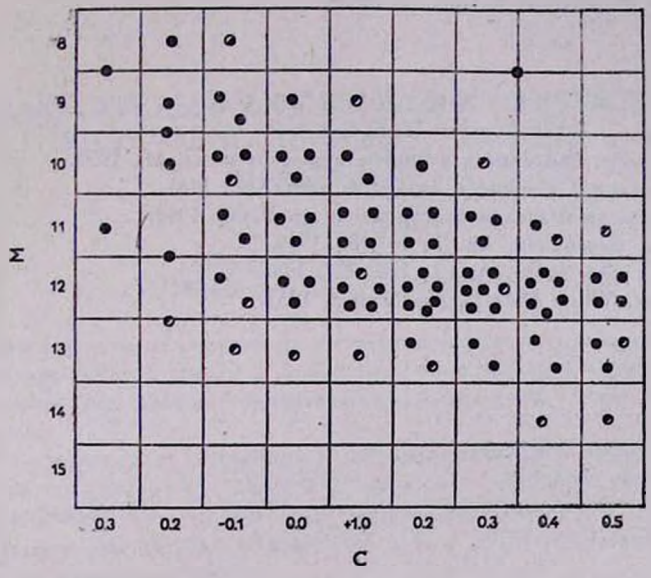

Рис. 1. Количество кружков в клеточках приблизительно соответствует числам таблицы, а полуоткрытые кружки относятся к числам порядка 0.5.

Кружок в правом верхнем углу диаграммы условно обозначает сумму чисел в этой области, два закрытых кружка в первом столбце—сумму чисел в (8 — 12) строках этого столбца.

Рассмотрение таблицы и диаграммы показывает удовлетворительное согласие с наблюдательными данными [4 — 6], на основании чего можно сделать следующий вывод.

Распределение на диаграмме цвет—светимость соответствует гипотезе о том, что свечение белых карликов происходит за счет внутренней энергии, то есть за счет остывания. Источники энергии не играют существенной роли, точнее, не влияют существенно на характер диаграммы.

В заключение приношу искреннюю благодарность В. А. Амбарцумяну за руководство работой.

Астрономическая обсерватория
Львовского университета

ON THE PHASE DENSITY OF WHITE DWARFS ON THE COLOR-LUMINOSITY DIAGRAM

A. M. EIGENSON

By considering the usual assumptions about the structure of the white dwarfs, a formula for their phase density on the color-luminosity diagram is obtained. Comparing the results with observational data we see that the employed model is valid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, М., 1950.
2. *М. Шварцшильд*, Строение и эволюция звезд, М., 1961.
3. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. II, М., 1962.
4. *O. Eggen, J. Greenstein*, Ap. J., 141, 83, 1965.
5. *O. Eggen, J. Greenstein*, Ap. J., 142, 925, 1965.
6. *E. Schatzman*, White Dwarfs, Amsterdam, 1957.