

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ. I

Н. А. ЯКОВКИН, Р. И. КОСТИК

Поступила 23 июля 1966

Дается матричное представление уравнений диффузии излучения в плоском слое конечной толщины. Приведены таблицы, позволяющие элементарным образом вычислять контур линии излучения по заданному распределению источников, минуя определение функции источника. Принят доплеровский коэффициент поглощения и полное перераспределение энергии по частотам в элементарном акте рассеяния.

Уравнения диффузии излучения в однородном плоском слое могут быть получены, исходя из различных характеристик процесса переноса излучения в среде. Так, например, при выводе „уравнения переноса“ рассматриваются поглощение и излучение энергии на элементарном отрезке пути. В методе разбиения на отдельные слои, предложенном Биберманом [1], исходят из взаимодействия удаленных друг от друга элементарных объемов. Методы „сложения слоев“ В. А. Амбарцумяна [2] носят феноменологический характер — при выводе формул используются коэффициенты отражения и пропускания света. Наконец, метод В. В. Соболева [3] базируется на вероятностной трактовке процессов поглощения и испускания квантов.

Уравнения, полученные этими методами, сводятся к интегральному уравнению для функции источника

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|t - \tau|) B(t) dt + g(\tau). \quad (1)$$

Оптическая толщина слоя τ_0 , вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния λ , ядро $K(y)$ и свободный член $g(\tau)$, определяющий мощность источников, считаются здесь известными. Контур линии излучения описывается формулой

$$I(\tau_0, \theta, x) = \int_0^{\tau} B(\tau) \alpha(x) e^{-\alpha(x)\tau \sec \theta} \sec \theta d\tau. \quad (2)$$

Интенсивность может быть найдена и непосредственно, без вычисления функции источника. Это можно сделать, пользуясь методами В. В. Соболева и В. А. Амбарцумяна, что является большим их достоинством. Соответствующие формулы для предельных значений оптических толщ при полном перераспределении энергии по частотам в элементарном акте рассеяния выведены В. В. Ивановым [4]. Следует заметить, что в этом случае точное решение задачи для слоя конечной толщины едва ли возможно, поскольку ядро имеет очень сложный вид

$$K(y) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)y] dx.$$

Решение уравнения (1) не исчерпывает задачи. Целью теории диффузии излучения является определение свойств излучения, анализ их изменения в процессе диффузии и выяснение характера взаимосвязи со средой. Эта проблема очень сложна в математическом отношении (см., например, [4, 5]). Представляет интерес исследовать ее матричным методом.

В данной статье ограничимся приближенным решением задачи для слоя конечной толщины в случае полного перераспределения энергии по частотам в элементарном акте рассеяния излучения. Результаты представим в виде матриц, удобных для вычисления на электронной машине.

Для представления уравнений (1) и (2) в матричной форме интегралы разобьем на суммы интегралов. Это эквивалентно разбиению всего слоя на ряд тонких слоев (исходная операция в [1]). Примем, что функция источника внутри каждого слоя постоянна, то есть может быть вынесена за знак интеграла. Слои следует взять различной толщины с тем, чтобы при небольшом их числе m можно было учесть характерные изменения функции $B(\tau)$. Аналогичным образом, эмиссионный контур разбивается в шкале частот на n неравных интервалов.

Введем следующие обозначения [6]

$$a_{ik} = \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} K \left(\left| t - \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} \right| \right) dt, \quad (3)$$

$$c_{jk} = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \alpha(x_j) e^{-\alpha(x_j)\tau \sec \theta} \sec \theta d\tau, \quad i, k = 1, 2, \dots, m, \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Численные значения этих коэффициентов известны. Подставляя (3) в преобразованные уравнения (1) и (2), получим

$$B_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} B_k + g_i, \quad (4)$$

$$I_j = \sum_{k=1}^m c_{jk} B_k. \quad (5)$$

Интенсивность здесь обозначена через I_j , поскольку при постоянных τ_0 и θ она является функцией безразмерной частоты x_j . Будем считать, что g_i и B_i равны значениям $g(r)$ и $B(r)$ в середине каждого слоя i .

Если g_j известны, то, в результате решения системы m линейных алгебраических уравнений (4), можно найти m значений функции источников B_i . Подставляя их в систему (5), получим n значений ординат I_j контура линии. Эта схема использовалась, например, при вычислении поля излучения в протуберанцах [7].

Представим (4) и (5) в виде матричных уравнений

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} B(\tau_1) \\ B(\tau_2) \\ \vdots \\ B(\tau_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(\tau_1) \\ g(\tau_2) \\ \vdots \\ g(\tau_m) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} I(x_1) \\ I(x_2) \\ \vdots \\ I(x_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\tau_1) \\ B(\tau_2) \\ \vdots \\ B(\tau_m) \end{bmatrix} = 0.$$

Пользуясь обозначениями [8]

$$A = \|\alpha_{ik} - \delta_{ik}\|^m, \quad B = \begin{bmatrix} B(\tau_1) \\ B(\tau_2) \\ \vdots \\ B(\tau_m) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g(\tau_1) \\ g(\tau_2) \\ \vdots \\ g(\tau_m) \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} I(x_1) \\ I(x_2) \\ \vdots \\ I(x_n) \end{bmatrix}, \\ C = \|c_{jk}\|,$$

запишем эти уравнения в сокращенной форме

$$\begin{aligned} AB + G &= 0, \\ I - CB &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь A — квадратная матрица порядка m , C — прямоугольная с размерами $n \times m$, B и G — столбцевые порядка m , I — столбцевая матрица порядка n , δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$. Элементы матриц A и C вычисляются по формулам (3).

Очевидно, что если известна матрица B , (6) может служить для вычисления I и G . Если же известна матрица G , то для определения B и I нужно найти матрицу, обратную A (см. ниже) и тогда

$$B = -A^{-1}G, \quad (7)$$

$$I = -CA^{-1}G. \quad (8)$$

Если матрица C квадратная и ее определитель не равен нулю, то возможно решение обратной задачи — по контуру наблюдаемой спектральной линии найти распределение источников энергии в среде. Примем указанные условия и, сохранив прежнее обозначение матрицы C , запишем (8) в окончательном виде

$$\begin{aligned} I &= TG, \\ G &= T^{-1}I, \end{aligned} \quad (9)$$

где $T = -CA^{-1}$. Пользуясь определением обратной матрицы $T^{-1}T = TT^{-1} = \|\delta_{ik}\|$, и учитывая некоммутативность остальных матриц, найдем (см. [8], стр. 23) $T^{-1} = (-CA^{-1})^{-1} = -AC^{-1}$.

Заметим, что уравнениям (6) — (9) можно сопоставить векторные уравнения. Например, если A является оператором

$$A = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \dots \left\{ K(|t - \tau|) - \frac{\lambda}{2} \delta(t - \tau) \right\} dt,$$

то уравнение (1) в векторной форме имеет следующий вид

$$AB + G = 0,$$

где B и G — векторы. Оператору A отвечает матрица A . Обратной матрице соответствует оператор резольвенты

$$A^{-1} = \int_0^{\tau_0} \dots \{ \Gamma(|\tau - t|) + \delta(\tau - t) \} dt.$$

Полученные выражения (9) являются точными решениями прямой и обратной задачи в том случае, если слой τ_0 разбит на бесконечное

число слоев, то есть, если $m = n = \infty$. На практике следует ограничиться небольшим числом слоев.

Приведем пример вычисления I и G по формулам (9). Рассмотрим случай, когда матрицы T и T^{-1} определены для слоя оптической толщины $\tau_0 = 1$, разбитого на пять равных частей при пяти значениях безразмерной частоты (0, 0.2, 0.4, 0.8, 1.2) и $\sec \theta = 1$.

Вычислим контур линии I , считая известным распределение источников энергии. Пусть, например, каждый элемент столбцевой матрицы G равен единице, тогда

$$\begin{array}{c}
 T \cdot 10^6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 311137 & 293971 & 263993 & 227339 & 184278 \\
 272527 & 263224 & 241016 & 211290 & 174193 \\
 179986 & 182122 & 174042 & 158841 & 136188 \\
 086055 & 090711 & 090062 & 085290 & 075893 \\
 029108 & 031365 & 031798 & 030740 & 027938
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{задано} \\
 G \\
 \left[\begin{array}{c}
 1.000 \\
 1.000 \\
 1.000 \\
 1.000 \\
 1.000
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{получено} \\
 I \\
 \left[\begin{array}{c}
 1.280718 \\
 1.162250 \\
 0.831179 \\
 0.428011 \\
 0.150949
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Найти правильное решение обратной задачи труднее, оно оказывается неустойчивым. В качестве элементов матрицы I возьмем, например, округленные до 0.01 элементы полученной матрицы. Казалось бы, что элементы искомой матрицы G будут также близки к единице, однако в действительности некоторые из них превышают тысячу:

$$\begin{array}{c}
 T^{-1} \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 -04350 & 10123 & -015587 & 027131 & -032141 \\
 15304 & -42239 & 086128 & -180272 & 232227 \\
 -20659 & 68513 & -172660 & 401142 & -538947 \\
 12422 & -50645 & 151526 & -378272 & 522763 \\
 -02805 & 14620 & -050663 & 133770 & -189110
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{задано} \\
 I^* \\
 \left[\begin{array}{c}
 1.28 \\
 1.16 \\
 0.83 \\
 0.43 \\
 0.15
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{получено} \\
 G^* \\
 \left[\begin{array}{c}
 0082 \\
 -0598 \\
 1373 \\
 -1324 \\
 0473
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Контрольные вычисления показали, что если I взять с 8 значащими цифрами и в T^{-1} удержать 3 цифры после запятой, то элементы G будут отличаться от единицы менее, чем на 1%.

Неопределенность в вычислении G не является особенностью данного метода. Физическая сущность задачи такова, что распределение источников энергии в слое можно варьировать в широком диапазоне, не изменяя (в пределах ошибок фотометрии) контура линии. Поскольку точное решение неустойчиво, придется ограничиться приближенным, вводя дополнительное условие, исключающее „отрицательные“ источники энергии. Это составит предмет отдельной статьи.

Остановимся теперь на методе вычисления матриц

$$T = -CA^{-1},$$

служащих для определения контура линии при заданных источниках энергии. Можно показать (см. например [9]), что

$$a_{ik} = \frac{1}{2} |N_{12}(|\tau_i - t_{k-1}|) - N_{12}(|\tau_i - t_k|)|, \quad i \neq k$$

$$a_{ii} = \left[1 - N_{12} \left(\left| \frac{t_i - t_{i-1}}{2} \right| \right) \right], \quad i, k = 1, 2, \dots, m,$$

где τ_i, t_{k-1}, t_k — оптические толщи в центре линии, отсчитываемые от граничной плоскости до центра слоя i и до ближней и дальней границ слоя k . Таблицы функции

$$N_{12} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} E_2(\tau e^{-x^2}) dx$$

опубликованы [10]. Однако при составлении матрицы A значения $N_{12}(\tau)$ мы вычисляли заново, поскольку это оказалось менее трудоемким, чем находить по таблицам коэффициенты a_{ik} для каждого τ_0 .

Обратная матрица A^{-1} определялась по методу Шрейдера [11], а именно использовалась формула

$$A^{-1} = \tilde{A}_{m-1} \lambda^{-1} \Lambda_{m-1},$$

где \tilde{A}_{m-1} — матрица, транспонированная к матрице A_{m-1} . Матрицы

$$A_{m-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(m-1)} & a_{m2}^{(m-1)} & \dots & a_{mm}^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad \Lambda_{m-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(m-1)} & a_{m2}^{(m-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

имеют взаимно ортогональные строки согласно условиям

$$a_{ik}^{(l)} = a_{ik}^{(l-1)} - p_i^{(l)} a_{ik}^{(l-1)}, \quad p_i^{(l)} = \frac{\sum_{k=1}^m [a_{ik}^{(l-1)}]^2}{\sum_{k=1}^m a_{ik}^{(l-1)} a_{ik}^{(l-1)}}, \quad \begin{matrix} l = 1, 2, \dots, m-1 \\ k = 1, 2, \dots, m, \\ i = l+1, l+2, \dots, m. \end{matrix}$$

Элементы диагональной матрицы

$$\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{-1} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_{22}^{-1} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_{mm}^{-1} \end{bmatrix}$$

удовлетворяют соотношению

$$\lambda_{ii} = \sum_{k=1}^m a_{ik}^2.$$

Умножая A^{-1} на матрицу C , элементы которой определяются формулой (3), получим матрицу T .

Оценим точность вычислений. Вследствие приближенной замены интегральных уравнений (1—2) матричными (9) и в результате ошибок округлений при вычислении матрицы A^{-1} , элементы t_{ik} матрицы T определены с некоторой погрешностью ε , то есть

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Очевидно, что

$$\varepsilon_2 < \|M\|_1 = \|E - A^{-1} A\|_1 = \max_i \sum_k |p_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \dots, m,$$

где E — единичная матрица, $\|M\|_1$ — первая норма матрицы M .

Величина погрешности ε_1 зависит от $g(\tau)$. Найдем ее для случая равномерного распределения источников возбуждения в среде. Составим матрицы

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_1(x_1) \\ I_1(x_2) \\ \vdots \\ I_1(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_2(y_1) \\ I_2(y_2) \\ \vdots \\ I_2(y_{2m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,2m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{2m,1} & t_{2m,2} & \cdots & t_{2m,2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

причем

$$y_{2p-1} = x_p, \quad x_{p+1} > y_{2p} > x_p, \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда

$$\varepsilon_1 = \|L\|_1 = \max_k |L_k|, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(x_1) \\ I_1(x_2) \\ \vdots \\ I_1(x_m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2(y_1) \\ I_2(y_2) \\ \vdots \\ I_2(y_{2m-1}) \end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$\varepsilon \leq \max_i |l_k| + \max_i \sum_k |p^{ik}|, \quad i, k = 1, 2, \dots, m.$$

В конце статьи приведены матрицы T для $\tau_0 = 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 100$ ($i = 1, \sec \theta = 1, \alpha(x) = e^{-x^2}$). Область интегрирования разбивалась на 14 интервалов (см. рис. 1). Для безразмерной частоты x выбраны следующие значения: 0, 0.2, 0.4, \dots , 2.6 ($\tau_0 = 1 - 10$); 0, 0.25, 0.50 \dots , 2.5, 3.0, 3.5, 4.0 ($\tau_0 = 20 - 100$). Эти матрицы позволяют рассчитывать не только профиль линии при $\theta = 0$, но и при

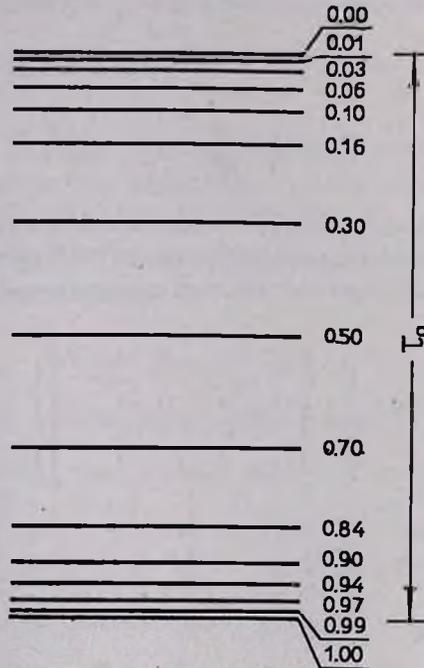


Рис. 1.

любом другом значении θ . При этом, как видно из (2), частоты x , к которым будут относиться получаемые значения интенсивности, связаны

с указанными только что значениями соотношением $e^{-x^2} = e^{-x^2} \cos \theta$.

Погрешность при определении контура линии $I(\tau_0, \theta, x)$ в случае равномерного распределения источников возбуждения в среде и $\theta = 0$ не превышает 5—20 единиц четвертой значащей цифры для $\tau_0 = 1-10$ и 5—10 единиц третьей значащей цифры для $\tau_0 = 20-100$. Численные значения элементов t_{ik} представлены в форме $s \cdot 10^n$, где $0.1 \leq s < 1$.

τ	0.05	0.20	0.45	0.80	1.30	2.30
$g(\tau)$	335-1	253-1	180-1	134-1	96-2	62-2
x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.00
$I(\tau_0, x)$	847-1	848-1	853-1	861-1	868-1	863-1

Таблица 1

4.00	6.00	7.70	8.70	9.20	9.55	9.80	9.95
46—2	46—2	62—2	96—2	134—1	180—1	253—1	335—1
1.2	1.4	1.6	1.8	2.00	2.2	2.4	2.6
811—1	680—1	486—1	293—1	151—1	687—2	280—2	104—2

Например, число 1516 — 1 следует читать $0.1516 \cdot 10^{-1} = 0.01516$. Вычисления выполнены на ЭВМ М-20 Института кибернетики АН УССР.

Для того, чтобы показать, как пользоваться данными таблицами, рассчитаем для протуберанца, имеющего вид тонкого листа расположенного перпендикулярно к поверхности Солнца, контур линии H_{α} ($\tau_0 = 10$, $w = 0.3$). В этом случае источники возбуждения в протуберанце распределены, как показано в [9], по закону

$$g(\tau) = g'(\tau) + g'(\tau_0 - \tau), \quad (10)$$

где

$$g'(\tau) = \frac{w}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x) e^{-x^2} E_2(e^{-x^2} \tau) dx,$$

$i(x)$ — контур фраунгоферовой линии H_{α} в спектре фотосферы. Из рис. 1 видно, что значения $g(\tau)$ нужно задать для оптических глубин, приведенных в первой строке табл. 1. Выбирая соответствующую матрицу $T(\tau_0 = 10)$, и умножая ее на столбцевую матрицу G (ее элементы, вычисленные согласно (10), даны во второй строке табл. 1). получим искомый контур линии (четвертая строка табл. 1). Он показан на рис. 2.

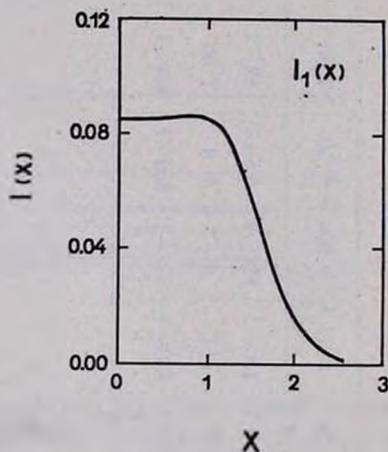


Рис. 2.

В заключение заметим, что использование элементарных приемов матричного метода позволило нам записать решение очень сложной задачи в простейшем виде. Вероятно матричное представление является естественным описанием процесса диффузии излучения. Наша

задача заключалась в составлении матриц T , которые служат для определения контура линии по известному распределению источников возбуждения в среде. Вычисление контура сводится к операции умножения квадратной матрицы на столбцевую.

Астрономическая обсерватория
Киевского университета
ГАО АН УССР

THE MATRIX EQUATIONS OF THE DIFFUSION OF RADIATION. I

N. A. YAKOVKIN, R. I. KOSTIK

A matrix notion of the equations of a diffusion of radiation in a plane layer of finite depth is given.

The tables are presented, permitting by an elementary way to calculate a profile of emission line from a given distribution of sources without a function of source determination.

A Doppler coefficient of absorption and a complete energy redistribution on frequencies in an elementary scattering act are accepted.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. М. Биберман, ЖЭТФ, 17, 416, 1947; 19, 584, 1949.
2. В. А. Амбарцумян, Изв. АН Арм. ССР, № 1—2, 1944.
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956. (см. также S. Ueno, Ap. J., 126, 413, 1957).
4. В. В. Иванов, Астроф. ж., 39, 1020, 1962.
5. Д. И. Нагирнер, Вестн. ЛГУ, № 1, 1964.
6. Г. И. Мирчук, Методы расчета ядерных реакторов, ГИЛАтомНТ, М., 1961, 109.
7. Н. А. Яковкин, М. Ю. Зельдина, Астроф. ж., 41, 914, 1964.
8. Ф. Р. Гинтмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1953.
9. Н. А. Яковкин, М. Ю. Зельдина, Вопросы астрофизики, 5, Наукова думка, Киев, 1966.
10. В. В. Иванов, В. Т. Щербаков, Астрофизика, 1, 31, 1965.
11. Ю. А. Шрейдер, ДАН СССР, 76, 5, 1951.

МАТРИЦЫ CA^{-1}

$$\tau_0 = 1$$

1516-1	3064-1	4630-1	6187-1	9227-1	2111	0	2808	0	2471	0	1489	0	5688-1	3556-1	2531-1	1614-1	7809-2
1463-1	2958-1	4474-1	5985-1	8940-1	2051	0	2741	0	2424	0	1467	0	5614-1	3513-1	2502-1	1597-1	7729-2
1314-1	2659-1	4032-1	5410-1	8116-1	1877	0	2540	0	2277	0	1393	0	5366-1	3369-1	2405-1	1537-1	7447-2
1095-1	2222-1	3379-1	4554-1	6874-1	1608	0	2215	0	2025	0	1259	0	4893-1	3087-1	2210-1	1416-1	6872-2
8460-2	1719-1	2625-1	3554-1	5399-1	1278	0	1796	0	1678	0	1062	0	4173-1	2646-1	1903-1	1222-1	5941-2
6031-2	1228-1	1881-1	2558-1	3909-1	9364-1	1340	0	1278	0	8225-1	3265-1	2082-1	1502-1	9675-2	4711-2		
3958-2	8074-2	1240-1	1692-1	2598-1	6281-1	9122-1	8847-1	5777-1	2313-1	148	1	1072-1	6923-2	3375-2			
2388-2	4876-2	7500-2	1026-1	1581-1	3849-1	5651-1	5549-1	3662-1	1476-1	9482-2	6880-2	4450-2	2172-2				
1323-2	2705-2	4165-2	5709-2	8818-2	2156-1	3188-1	3156-1	2098-1	8490-2	5466-2	3973-2	2572-2	1256-2				
6746-3	1379-2	2125-2	2916-2	4510-2	1106-1	1642-1	1634-1	1090-1	4425-2	2853-2	2075-2	1345-2	6570-3				
3166-3	6474-3	9980-3	1370-2	2121-2	5205-2	7748-2	7730-2	5171-2	2102-2	1356-2	9869-3	6397-3	3127-3				
1369-3	2800-3	4317-3	5927-3	9179-3	2255-2	3360-2	3357-2	2248-2	9143-3	5901-3	4296-3	2785-3	1362-3				
5460-4	1117-3	1722-3	2365-3	3662-3	8999-3	1342-2	1341-2	8989-3	3657-3	2360-3	1719-3	1114-3	5448-4				
2009-4	4110-4	6337-4	8703-4	1348-3	3313-3	4941-3	4940-3	3311-3	1347-3	8697-4	6333-4	4106-4	2008-4				

3378-1	6878-1	1044 0	1394 0	2061 0	4633 0	5855 0	4746 0	2605 0	9223-1	5525-1	3790-1	2338-1	1102-1
3272-1	6668-1	1014 0	1356 0	2012 0	4546 0	5790 0	4728 0	2608 0	9262-1	5555-1	3814-1	2354-1	1110-1
2970-1	6070-1	9273-1	1248 0	1867 0	4279 0	5567 0	4643 0	2601 0	9311-1	5607-1	3860-1	2387-1	1127-1
2521-1	5173-1	7954-1	1080 0	1633 0	3823 0	5128 0	4411 0	2529 0	9174-1	5559-1	3844-1	2385-1	1128-1
1992-1	4106-1	6357-1	8709-1	1334 0	3192 0	4433 0	3951 0	2329 0	8583-1	5243-1	3646-1	2272-1	1077-1
1456-1	3014-1	4696-1	6488-1	1005 0	2457 0	3521 0	3247 0	1968 0	7372-1	4541-1	3177-1	1988-1	9454-2
9791-2	2033-1	3183-1	4427-1	6922-1	1721 0	2531 0	2402 0	1490 0	5663-1	3514-1	2472-1	1553-1	7403-2
6023-2	1253-1	1969-1	2752-1	4331-1	1090 0	1634 0	1583 0	1000 6	3843-1	2398-1	1694-1	1067-1	5099-2
3386-2	7055-2	1111-1	1558-1	2462-1	6243-1	9475-1	9314-1	5956-1	2305-1	1444-1	1023-1	6460-2	3090-2
1741-2	3631-2	5727-2	8042-2	1274-1	3246-1	4964-1	4921-1	3170-1	1232-1	7740-2	5491-2	3472-2	1662-2
8210-3	1713-2	2704-2	3801-2	6030-2	1540-1	2365-1	2355-1	1523-1	5937-2	3733-2	2651-2	1678-2	8034-3
3559-3	7428-3	1173-2	1649-2	2619-2	6697-2	1030-1	1028-1	6665-2	2601-2	1637-2	1163-2	7361-3	3526-3
1421-3	2966-3	4684-3	6589-3	1046-2	2678-2	4123-2	4120-2	2673-2	1044-2	6569-3	4669-3	2956-3	1416-3
5233-4	1092-3	1725-3	2427-3	3854-3	9865-3	1520-2	1519-2	9858-3	3850-3	2424-3	1723-3	1091-3	5225-4

$$\tau_0 = 3$$

5327-1	1091	0	1658	0	2203	0	3222	0	7105	0	8595	0	6559	0	3374	0	1133	0	6585-1	4397-1	2643-1	1219-1
5171-1	1061	0	1616	0	2154	0	3164	0	7027	0	8583	0	6604	0	3414	0	1149	0	6687-1	4468-1	2687-1	1240-1
4728-1	9740-1	1495	0	2010	0	2987	0	6768	0	8495	0	6695	0	3515	0	1192	0	6961-1	4661-1	2807-1	1297-1	
4064-1	8423-1	1305	0	1778	0	2685	0	6263	0	8183	0	6695	0	3607	0	1239	0	7283-1	4898-1	2959-1	1369-1	
3269-1	6822-1	1068	0	1475	0	2269	0	5461	0	7471	0	6394	0	3561	0	1246	0	7389-1	5000-1	3035-1	1408-1	
2443-1	5128-1	8105-1	1133	0	1772	0	4394	0	6280	0	5623	0	3244	0	1158	0	6938-1	4729-1	2886-1	1344-1		
1679-1	3541-1	5639-1	7962-1	1262	0	3204	0	4748	0	4419	0	2630	0	9569-1	5787-1	3973-1	2437-1	1138-1				
1053-1	2229-1	3568-1	5072-1	8113-1	2096	0	3189	0	3055	0	1863	0	6878-1	4192-1	2894-1	1783-1	8349-2					
6006-2	1274-1	2046-1	2921-1	4701-1	1228	0	1901	0	1857	0	1151	0	4293-1	2631-1	1823-1	1126-1	5286-2					
3117-2	6619-2	1065-1	1525-1	2463-1	6476-1	1012	0	1001	0	6267-1	2352-1	1446-1	1005-1	6220-2	2922-2							
1478-2	3140-2	5059-2	7254-2	1174-1	3097-1	4870-1	4843-1	3050-1	1149-1	7076-2	4923-2	3050-2	1434-2									
6424-3	1365-2	2201-2	3158-2	5115-2	1352-1	2132-1	2128-1	1343-1	5068-2	3124-2	2175-2	1348-2	6341-3									
2568-3	5460-3	8803-3	1263-2	2047-2	5416-2	8552-2	8543-2	5401-2	2040-2	1258-2	8762-3	5433-3	2555-3									
9461-4	2011-3	3243-3	4656-3	7545-3	1997-2	3154-2	3153-2	1995-2	7535-3	4648-3	3238-3	2008-3	9443-4									

$$\tau_0 = 4$$

7306-1	1502	0	2282	0	3011	0	4345	0	9404	0	1097	1	8008	0	3940	0	1273	0	7248-1	4743-1	2792-1	1264-1
7103-1	1463	0	2230	0	2955	0	4288	0	9360	0	1103	1	8118	0	4010	0	1298	0	7392-1	4839-1	2849-1	1290-1
6525-1	1352	0	2080	0	2788	0	4105	0	9182	0	1116	1	8410	0	4209	0	1370	0	7819-1	5125-1	3021-1	1369-1
5657-1	1182	0	1841	0	2510	0	3775	0	8747	0	1114	1	8736	0	4480	0	1474	0	8460-1	5554-1	3287-1	1491-1
4612-1	9724-1	1536	0	2131	0	3282	0	7913	0	1065	1	8791	0	4669	5	1565	0	9057-1	5992-1	3555-1	1617-1	
3507-1	7455-1	1193	0	1682	0	2646	0	6626	0	9414	0	8201	0	4535	0	1554	0	9097-1	6066-1	3620-1	1653-1	
2458-1	5259-1	8497-1	1214	0	1943	0	5017	0	7460	0	6815	0	3913	0	1371	0	8118-1	5458-1	3277-1	1502-1		
1570-1	3374-1	5489-1	7916-1	1282	0	3385	0	5204	0	4930	0	2917	0	1041	0	6220-1	4211-1	2542-1	1169-1			
9081-2	1957-1	3198-1	4639-1	7574-1	2028	0	3187	0	3093	0	1868	0	6752-1	4062-1	2764-1	1674-1	7719-2					
4758-2	1027-1	1683-1	2449-1	4017-1	1084	0	1727	0	1701	0	1040	0	3789-1	2290-1	1563-1	9490-2	4381-2					
2268-2	4900-2	8039-2	1172-1	1927-1	5226-1	8381-1	8322-1	5125-1	1875-1	1137-1	7765-2	4722-2	2182-2									
9886-3	2137-2	3508-2	5120-2	8428-2	2291-1	3686-1	3675-1	2271-1	8330-2	5051-2	3456-2	2103-2	9723-3									
3957-3	8556-3	1405-2	2051-2	3379-2	9192-2	1482-1	1480-1	9162-2	3363-2	2040-2	1397-2	8502-3	3931-3									
1459-3	3154-3	5180-3	7564-3	1246-2	3392-2	5471-2	5468-2	3387-2	1244-2	7549-3	5169-3	3146-3	1455-3									

$$\tau_0 = 5$$

9299-1	1917	0	2906	0	3804	0	5411	0	1151	1	1303	1	9229	0	4406	0	1383	0	7756-1	4996-1	2891-1	1288-1	
9048-1	1871	0	2847	0	3745	0	5361	0	1151	1	1318	1	9392	0	4495	0	1412	0	7920-1	5102-1	2952-1	1315-1	
8338-1	1737	0	2672	0	3565	0	5194	0	1146	1	1354	1	9862	0	4764	0	1502	0	8430-1	5434-1	3145-1	1401-1	
7273-1	1530	0	2392	0	3256	0	4966	0	1119	1	1390	1	1052	1	5189	0	1650	0	9291-1	6002-1	3479-1	1551-1	
5988-1	1274	0	2027	0	2820	0	4335	0	1044	1	1381	1	1104	1	5631	0	1820	0	1033	0	6704-1	3900-1	1743-1
4618-1	9930-1	1604	0	2278	0	3595	0	9061	0	1277	1	1084	1	5773	0	1910	0	1096	0	7172-1	4196-1	1882-1	
3292-1	7137-1	1167	0	1685	0	2715	0	7103	0	1057	1	9482	0	5273	0	1788	0	1039	0	6862-1	4042-1	1821-1	
2138-1	4661-1	7692-1	1122	0	1837	0	4935	0	7644	0	7162	0	4125	0	1429	0	8395-1	5587-1	3311-1	1497-1			
1254-1	2743-1	4551-1	6689-1	1105	0	3020	0	4805	0	4635	0	2736	0	9620-1	5699-1	3815-1	2271-1	1030-1					
6629-2	1453-1	2419-1	3570-1	5931-1	1638	0	2647	0	2599	0	1558	0	5528-1	3292-1	2212-1	1321-1	6001-2						
3177-2	6973-2	1163-1	1720-1	2865-1	7955-1	1297	0	1286	0	7771-1	2773-1	1656-1	1115-1	6667-2	3032-2								
1389-2	3050-2	5089-2	7536-2	1258-1	3501-1	5731-1	5710-1	3466-1	1240-1	7414-2	4998-2	2991-2	1361-2										
5567-3	1223-2	2041-2	3024-2	5050-2	1408-1	2309-1	2305-1	1401-1	5021-2	3004-2	2027-2	1213-2	5523-3										
2053-3	4510-3	7530-3	1116-2	1864-2	5197-2	8531-2	8527-2	5189-2	1860-2	1113-2	7510-3	4497-3	2047-3										

$$\tau_0 = 6$$

2-390

1130	0	2335	0	3527	0	4575	0	6414	0	1343	1	1487	1	1032	1	4825	0	1481	0	8208	-1	5220	-1	2975	-1	1306	-1
1100	0	2281	0	3461	0	4516	0	6377	0	1349	1	1509	1	1052	1	4926	0	1513	0	8360	-1	5329	-1	3037	-1	1333	-1
1016	0	2125	0	3267	0	4332	0	6241	0	1360	1	1569	1	1113	1	5242	0	1611	0	8930	-1	5678	-1	3236	-1	1420	-1
8901	-1	1884	0	2952	0	4007	0	5941	0	1354	1	1645	1	1209	1	5783	0	1787	0	9923	-1	6316	-1	3602	-1	1581	-1
7382	-1	1584	0	2533	0	3528	0	5405	0	1299	1	1688	1	1310	1	6459	0	2024	0	1130	0	7221	-1	4129	-1	1815	-1
5758	-1	1251	0	2038	0	2908	0	4594	0	1163	1	1623	1	1344	1	6926	0	2220	0	1253	0	8067	-1	4637	-1	2046	-1
4166	-1	9138	-1	1511	0	2198	0	3560	0	9410	0	1398	1	1233	1	6659	0	2192	0	1254	0	8149	-1	4718	-1	2091	-1
2747	-1	6068	-1	1014	0	1495	0	2465	0	6723	0	1047	1	9701	0	5454	0	1838	0	1065	0	6982	-1	4070	-1	1811	-1
1632	-1	3620	-1	6089	-1	9050	-1	1510	0	4202	0	6750	0	6472	0	3743	0	1284	0	7505	-1	4954	-1	2903	-1	1296	-1
8707	-2	1936	-1	3269	-1	4884	-1	8199	-1	2310	0	3780	0	3700	0	2178	0	7552	-1	4441	-1	2944	-1	1731	-1	7747	-2
4195	-2	9342	-2	1581	-1	2367	-1	3988	-1	1131	0	1869	0	1850	0	1100	0	3838	-1	2264	-1	1505	-1	8865	-2	3972	-2
1839	-2	4098	-2	6940	-2	1041	-1	1757	-1	4995	-1	8299	-1	8263	-1	4937	-1	1728	-1	1021	-1	6795	-2	4006	-2	1796	-2
7382	-3	1645	-2	2788	-2	4183	-2	7065	-2	2012	-1	3350	-1	3345	-1	2003	-1	7018	-2	4151	-2	2764	-2	1630	-2	7313	-3
2724	-3	6071	-3	1029	-2	1544	-2	2609	-2	7435	-2	1239	-1	1238	-1	7422	-2	2603	-2	1540	-2	1026	-2	6051	-3	2714	-3

$$\tau_0 = 7$$

1331	0	2753	0	4142	0	5301	0	7354	0	1520	1	1655	1	1135	1	5226	0	1575	0	8641	-1	5436	-1	3057	-1	1923	-1
1296	0	2692	0	4072	0	5266	0	7333	0	1532	1	1683	1	1158	1	5334	0	1607	0	8816	-1	5545	-1	3118	-1	1350	-1
1199	0	2516	0	3862	0	5086	0	7239	0	1559	1	1764	1	1229	1	5678	0	1710	0	9381	-1	5898	-1	3316	-1	1435	-1
1054	0	2242	0	3517	0	4755	0	6989	0	1579	1	1881	1	1350	1	6303	0	1903	0	1045	0	6570	-1	3694	-1	1598	-1
8789	-1	1900	0	3050	0	4247	0	6476	0	1550	1	1981	1	1498	1	7177	0	2190	0	1207	0	7610	-1	4286	-1	1856	-1
6917	-1	1517	0	2489	0	3562	0	5626	0	1427	1	1971	1	1595	1	7979	0	2487	0	1384	0	8784	-1	4971	-1	2160	-1
5067	-1	1124	0	1877	0	2746	0	4464	0	1190	1	1762	1	1527	1	8034	0	2574	0	1452	0	9306	-1	5304	-1	2315	-1
3389	-1	7577	-1	1281	0	1903	0	3158	0	8727	0	1364	1	1250	1	6873	0	2260	0	1292	0	8363	-1	4802	-1	2106	-1
2038	-1	4579	-1	7798	-1	1171	0	1968	0	5566	0	9014	0	8590	0	4877	0	1635	0	9448	-1	6160	-1	3557	-1	1566	-1
1097	-1	2472	-1	4229	-1	6383	-1	1081	0	3101	0	5129	0	5005	0	2899	0	9842	-1	5725	-1	3751	-1	2175	-1	9596	-2
5314	-2	1199	-1	2056	-1	3114	-1	5295	-1	1530	0	2560	0	2531	0	1482	0	5067	-1	2959	-1	1944	-1	1130	-1	4991	-2
2336	-2	5277	-2	9058	-2	1373	-1	2340	-1	6785	-1	1142	0	1136	0	6694	-1	2296	-1	1344	-1	8841	-2	5142	-2	2274	-2
9388	-3	2121	-2	3643	-2	5528	-2	9429	-2	2738	-1	4620	-1	4611	-1	2723	-1	9358	-2	5480	-2	3608	-2	2100	-2	9288	-3
3466	-3	7833	-3	1346	-2	2042	-2	3485	-2	1013	-1	1711	-1	1709	-1	1011	-1	3475	-2	2036	-2	1341	-2	7804	-3	3452	-3

$$\tau_0 = 8$$

1532	0	3172	0	4750	0	6043	0	8234	0	1684	1	1812	1	1234	1	5518	0	1665	0	9065	-1	5648	-1	3139	-1	1341	-1
1493	0	3105	0	4677	0	5992	0	8232	0	1701	1	1846	1	1259	1	5731	0	1698	0	9241	-1	5757	-1	3199	-1	1367	-1
1383	0	2909	0	4455	0	5823	0	8189	0	1746	1	1945	1	1339	1	6095	0	1804	0	9813	-1	6111	-1	3394	-1	1450	-1
1218	0	2604	0	4084	0	5497	0	8003	0	1793	1	2099	1	1480	1	6777	0	2007	0	1092	0	6795	-1	3773	-1	1611	-1
1020	0	2220	0	3576	0	4972	0	7538	0	1797	1	2259	1	1670	1	7810	0	2329	0	1270	0	7919	-1	4401	-1	1880	-1
8088	-1	1789	0	2953	0	4235	0	6678	0	1696	1	2316	1	1834	1	8935	0	2716	0	1493	0	9361	-1	5223	-1	2237	-1
5988	-1	1342	0	2260	0	3323	0	5412	0	1453	1	2143	1	1826	1	9372	0	2929	0	1633	0	1033	0	5805	-1	2497	-1
4056	-1	9174	-1	1566	0	2344	0	3908	0	1092	1	1711	1	1552	2	8356	0	2685	0	1518	0	9709	-1	5498	-1	2377	-1
2467	-1	5613	-1	9667	-1	1463	0	2476	0	7106	0	1159	1	1097	1	6124	0	2010	0	1150	0	7415	-1	4225	-1	1835	-1
1340	-1	3058	-1	5293	-1	8064	-1	1376	0	4011	0	6698	0	6516	0	3719	0	1238	0	7134	-1	4625	-1	2647	-1	1152	-1
6525	-2	1492	-1	2589	-1	3958	-1	6785	-1	1994	0	3374	0	3330	0	1925	0	6457	-1	3737	-1	2431	-1	1394	-1	6081	-2
2877	-2	6583	-2	1144	-1	1751	-1	3010	-1	8880	-1	1512	0	1504	0	8745	-1	2946	-1	1709	-1	1113	-1	6393	-2	2790	-2
1158	-2	2650	-2	4607	-2	7060	-2	1214	-1	3590	-1	6131	-1	6117	-1	3568	-1	1204	-1	6991	-2	4558	-2	2619	-2	1144	-2
4276	-3	9791	-3	1703	-2	2610	-2	4491	-2	1329	-1	2272	-1	2270	-1	1326	-1	4477	-2	2600	-2	1696	-2	9749	-3	4257	-3

1734	0	3592	0	5350	0	6738	0	9057	0	1836	1	1963	1	1332	1	6007	0	1753	0	9480-1	5858-1	3219-1	1359-1	
1691	0	3518	0	5275	0	6695	0	9075	0	1859	1	2001	1	1359	1	6123	0	1786	0	9658-1	5967-1	3279-1	1384-1	
1568	0	3303	0	5045	0	6543	0	9090	0	1921	1	2116	1	1445	1	6502	0	1894	0	1023	0	6320-1	3472-1	1465-1
1384	0	2968	0	4654	0	6230	0	8983	0	1997	1	2304	1	1601	1	7225	0	2103	0	1136	0	7008-1	3848-1	1623-1
1163	0	2544	0	4108	0	5699	0	8585	0	2037	1	2522	1	1829	1	8382	0	2451	0	1325	0	8179-1	4492-1	1895-1
9269-1	2066	0	3429	0	4922	0	7740	0	1967	1	2655	1	2060	1	9801	0	2912	0	1585	0	9830-1	5415-1	2288-1	
6925-1	1567	0	2658	0	3924	0	6396	0	1727	1	2534	1	2125	1	1066	1	3255	0	1795	0	1123	0	6230-1	2644-1
4744-1	1085	0	1869	0	2814	0	4709	0	1330	1	2085	1	1870	1	9878	0	3106	0	1739	0	1100	0	6152-1	2625-1
2918-1	6716-1	1169	0	1782	0	3031	0	8815	0	1445	1	1361	1	7471	0	2405	0	1363	0	8703-1	4899-1	2100-1		
1598-1	3691-1	6458-1	9919-1	1704	0	5040	0	8488	0	8231	0	4633	0	1514	0	8656-1	5560-1	3144	-1	1351	-1			
7823-2	1811-1	3177-1	4898-1	8456-1	2525	0	4314	0	4252	0	2427	0	8002-1	4596-1	2962-1	1679-1	7233	-2						
3458-2	8012-2	1408-1	2175-1	3764-1	1129	0	1943	0	1931	0	1110	0	3675-1	2116-1	1366-1	7756-2	3343	-2						
1394-2	3230-2	5680-2	8780-2	1521-1	4572-1	7894-1	7874-1	4541-1	1507-1	8684-2	5611-2	3188-2	1375-2											
5151-3	1194-2	2100-2	3248-2	5629-2	1693-1	2928-1	2925-1	1689-1	5610-2	3234-2	2091-2	1188-2	5125-3											

$$\tau_0 = 10$$

1937	0	4011	0	5942	0	7408	0	9827	0	1979	1	2110	1	1429	1	6392	0	1839	0	9886	-1	6063	-1	3258	-1	1376	-1
1889	0	3931	0	5866	0	7373	0	9868	0	2007	1	2151	1	1458	1	6513	0	1873	0	1007	0	6173	-1	3357	-1	1400	-1
1753	0	3700	0	5631	0	7243	0	9945	0	2086	1	2280	1	1548	1	6904	0	1983	0	1065	0	6527	-1	3549	-1	1480	-1
1549	0	3336	0	5224	0	6952	0	9926	0	2191	1	2498	1	1718	1	7659	0	2196	0	1178	0	7216	-1	3921	-1	1635	-1
1305	0	2873	0	4645	0	6426	0	9612	0	2270	1	2773	1	1977	1	8911	0	2560	0	1374	0	8413	-1	4571	-1	1905	-1
1046	0	2348	0	3913	0	5619	0	8805	0	2237	1	2986	1	2273	1	1059	1	3082	0	1663	0	1022	0	5563	-1	2322	-1
7873	-1	1798	0	3070	0	4545	0	7408	0	2009	1	2932	1	2420	1	1188	1	3551	0	1940	0	1202	0	6587	-1	2760	-1
5450	-1	1259	0	2187	0	3310	0	5552	0	1582	1	2482	1	2203	1	1142	1	3519	0	1953	0	1224	0	6760	-1	2848	-1
3388	-1	7882	-1	1384	0	2124	0	3630	0	1068	1	1761	1	1647	1	8906	0	2814	0	1583	0	1001	0	5572	-1	2359	-1
1870	-1	4369	-1	7721	-1	1194	0	2062	0	6187	0	1050	1	1015	1	5639	0	1812	0	1028	0	6546	-1	3662	-1	1555	-1
9202	-2	2155	-1	3820	-1	5934	-1	1030	0	3123	0	5384	0	5299	0	2990	0	9697	-1	5531	-1	3536	-1	1984	-1	8441	-2
4080	-2	9562	-2	1698	-1	2643	-1	4602	-1	1402	0	2436	0	2419	0	1376	0	4483	-1	2564	-1	1642	-1	9226	-2	3930	-2
1646	-2	3860	-2	6859	-2	1069	-1	1863	-1	5688	-1	9919	-1	9892	-1	5645	-1	1844	-1	1056	-1	6768	-2	3805	-2	1622	-2
6087	-3	1428	-2	2538	-2	3955	-2	6900	-2	2108	-1	3682	-1	3679	-1	2102	-1	6873	-2	3938	-2	2525	-2	1420	-2	6054	-3

$$\tau_0 = 20$$

398	0	814	0	113	1	129	1	155	1	318	1	352	1	239	1	100	1	257	0	134	0	784	-1	396	-1	151	-1
384	0	797	0	113	1	130	1	159	1	328	1	362	1	246	1	103	1	263	0	137	0	804	-1	407	-1	154	-1
346	0	743	0	110	1	134	1	170	1	359	1	396	1	267	1	112	1	285	0	148	0	870	-1	440	-1	167	-1
290	0	654	0	104	1	135	1	183	1	413	1	464	1	311	1	130	1	330	0	171	0	100	0	507	-1	193	-1
227	0	537	0	910	0	128	1	189	1	476	1	578	1	394	1	163	1	414	0	215	0	126	0	635	-1	241	-1
165	0	406	0	726	0	109	1	175	1	499	1	697	1	518	1	222	1	569	0	296	0	174	0	878	-1	333	-1
108	0	273	0	505	0	792	0	135	1	424	1	680	1	572	1	266	1	709	0	376	0	223	0	114	0	435	-1
597	-1	152	0	288	0	462	0	814	0	270	1	473	1	437	1	218	1	605	0	328	0	197	0	102	0	392	-1
266	-1	684	-1	130	0	212	0	379	0	129	1	236	1	229	1	119	1	337	0	185	0	112	0	584	-1	226	-1
979	-2	252	-1	482	-1	786	-1	142	0	488	0	907	0	897	0	474	0	136	0	750	-1	458	-1	238	-1	924	-2
306	-2	788	-2	151	-1	246	-1	444	-1	154	0	288	0	287	0	152	0	439	-1	243	-1	148	-1	774	-2	300	-2
197	-3	509	-3	974	-3	159	-2	288	-2	998	-2	187	-1	187	-1	997	-2	287	-2	159	-2	973	-3	508	-3	197	-3
766	-5	197	-4	378	-4	618	-4	112	-3	387	-3	726	-3	726	-3	387	-3	112	-3	618	-4	378	-4	197	-4	766	-5
180	-6	464	-6	889	-6	145	-5	262	-5	911	-5	171	-4	171	-4	911	-5	262	-5	145	-5	889	-6	464	-6	180	-6

605 0	121 1	159 1	169 1	196 1	430 1	487 1	329 1	134 1	313 0	161 0	927-1	449-1	160-1
586 0	119 1	160 1	173 1	201 1	442 1	500 1	338 1	138 1	321 0	165 0	949-1	460-1	163-1
531 0	114 1	161 1	183 1	219 1	483 1	542 1	365 1	149 1	346 0	178 0	102 0	496-1	176-1
450 0	103 1	159 1	195 1	248 1	565 1	630 1	421 1	171 1	397 0	204 0	117 0	569-1	202-1
356 0	870 0	147 1	198 1	277 1	693 1	794 1	525 1	212 1	491 0	252 0	145 0	701-1	249-1
264 0	679 0	123 1	181 1	282 1	811 1	105 1	718 1	290 1	669 0	343 0	197 0	952-1	337-1
179 0	478 0	912 0	143 1	241 1	791 1	121 1	942 1	405 1	959 0	496 0	287 0	139 0	495-1
105 0	285 0	559 0	908 0	160 1	573 1	994 1	881 1	414 1	103 1	544 0	320 0	157 0	563-1
492-1	135 0	268 0	443 0	800 0	298 1	552 1	526 1	262 1	670 0	361 0	215 0	106 0	384-1
186-1	512-1	102 0	170 0	310 0	117 1	223 1	219 1	112 1	292 0	158 0	947-1	472-1	171-1
587-2	162-1	324-1	540-1	988-1	376 0	722 0	718 0	371 0	969-1	528-1	316-1	158-1	572-2
381-3	105-2	210-2	351-2	643-2	245-1	473-1	473-1	245-1	642-2	351-2	210-2	105-2	380-3
148-4	408-4	817-4	136-3	250-3	952-3	184-2	184-2	952-3	250-3	136-3	817-4	408-4	148-4
348-6	960-6	192-5	320-5	587-5	224-4	432-4	432-4	224-4	587-5	320-5	192-5	960-6	348-6

$$\tau_0 = 40$$

814	0	158	1	198	1	202	1	232	1	542	1	613	1	411	1	167	1	363	0	185	0	106	0	497	-1	167	-1
789	0	157	1	201	1	208	1	239	1	557	1	628	1	421	1	171	1	372	0	190	0	108	0	508	-1	171	-1
719	0	152	1	207	1	224	1	261	1	604	1	677	1	453	1	184	1	400	0	204	0	116	0	546	-1	184	-1
615	0	141	1	212	1	247	1	301	1	704	1	779	1	519	1	210	1	456	0	233	0	133	0	623	-1	210	-1
492	0	123	1	204	1	265	1	354	1	881	1	974	1	641	1	258	1	560	0	285	0	162	0	763	-1	257	-1
368	0	982	0	179	1	257	1	385	1	110	2	132	2	871	1	347	1	750	0	381	0	217	0	102	0	343	-1
254	0	709	0	138	1	214	1	355	1	119	2	170	2	124	2	512	1	112	1	569	0	324	0	152	0	512	-1
154	0	441	0	888	0	145	1	255	1	955	1	160	2	136	2	619	1	141	1	736	0	425	0	202	0	684	-1
757	-1	219	0	448	0	746	0	136	1	536	1	979	1	917	1	449	1	107	1	567	0	332	0	160	0	544	-1
294	-1	853	-1	176	0	295	0	542	0	219	1	416	1	407	1	206	1	499	0	268	0	158	0	764	-1	262	-1
938	-2	273	-1	563	-1	949	-1	175	0	714	0	137	1	136	1	700	0	171	0	922	-1	546	-1	264	-1	906	-2
611	-3	178	-2	368	-2	621	-2	115	-1	469	-1	906	-1	906	-1	458	-1	114	-1	619	-2	367	-2	178	-2	610	-3
237	-4	691	-4	143	-3	241	-3	446	-3	182	-2	352	-2	352	-2	182	-2	446	-3	241	-3	143	-3	691	-4	237	-4
558	-6	163	-5	336	-5	567	-5	105	-4	428	-4	828	-4	828	-4	428	-4	105	-4	567	-5	336	-5	163	-5	558	-6

$\tau_0 = 50$

102	1	194	1	233	1	233	1	269	1	655	1	728	1	486	1	199	1	414	0	210	0	118	0	545	-1	175	-1
993	0	193	1	237	1	240	1	276	1	671	1	745	1	498	1	203	1	423	0	214	0	121	0	557	-1	179	-1
911	0	190	1	249	1	260	1	301	1	725	1	800	1	534	1	218	1	454	0	230	0	130	0	597	-1	192	-1
785	0	180	1	262	1	293	1	350	1	837	1	915	1	608	1	248	1	515	0	261	0	147	0	678	-1	218	-1
634	0	161	1	263	1	328	1	423	1	105	2	113	2	745	1	303	1	628	0	318	0	180	0	826	-1	266	-1
478	0	131	1	238	1	334	1	487	1	137	2	154	2	100	2	403	1	833	0	421	0	238	0	109	0	351	-1
334	0	966	0	189	1	291	1	476	1	159	2	211	2	147	2	598	1	124	1	624	0	352	0	161	0	518	-1
208	0	620	0	127	1	207	1	364	1	139	2	222	2	182	2	814	1	175	1	898	0	512	0	237	0	765	-1
106	0	319	0	667	0	112	1	204	1	836	1	149	2	137	2	670	1	151	1	792	0	459	0	215	0	699	-1
419	-1	128	0	269	0	455	0	843	0	356	1	664	1	646	1	329	1	759	0	404	0	236	0	111	0	363	-1
135	-1	413	-1	872	-1	148	0	276	0	118	1	223	1	222	1	115	1	267	0	143	0	838	-1	396	-1	130	-1
887	-3	271	-2	572	-2	974	-2	182	-1	777	-1	149	0	149	0	776	-1	181	-1	971	-2	571	-2	270	-2	884	-4
344	-4	105	-3	222	-3	378	-3	706	-3	302	-2	578	-2	578	-2	302	-2	706	-3	378	-2	222	-3	105	-3	344	-4
810	-6	247	-5	523	-5	890	-5	166	-4	710	-4	136	-3	136	-3	710	-4	166	-4	890	-5	523	-5	247	-5	810	-6

$$\tau_0 = \ddot{60}$$

123	1	227	1	266	1	264	1	308	1	765	1	835	1	557	1	230	1	467	0	234	0	131	0	593	-1	184	-1
120	1	228	1	272	1	271	1	316	1	783	1	854	1	569	1	235	1	477	0	239	0	134	0	606	-1	188	-1
110	1	227	1	288	1	294	1	342	1	842	1	915	1	609	1	252	1	510	0	255	0	144	0	648	-1	201	-1
960	0	219	1	310	1	336	1	396	1	965	1	104	2	690	1	285	1	577	0	289	0	162	0	732	-1	227	-1
782	0	200	1	321	1	387	1	488	1	120	2	128	2	841	1	346	1	700	0	350	0	197	0	888	-1	275	-1
594	0	166	1	301	1	412	1	586	1	160	2	172	2	112	2	455	1	921	0	461	0	259	0	117	0	361	-1
418	0	125	1	246	1	374	1	603	1	198	2	245	2	165	2	672	1	135	1	673	0	377	0	170	0	526	-1
265	0	817	0	170	1	276	1	486	1	186	2	283	2	224	2	987	1	204	1	103	1	583	0	264	0	819	-1
138	0	434	0	924	0	155	1	286	1	119	2	206	2	187	2	910	1	198	1	103	1	590	0	270	0	845	-1
563	-1	178	0	382	0	650	0	122	1	525	1	964	1	931	1	478	1	107	1	562	0	326	0	151	0	474	-1
184	-1	582	-1	125	0	214	0	404	0	176	1	330	1	327	1	171	1	388	0	205	0	119	0	553	-1	174	-1
121	-2	383	-2	826	-2	142	-1	267	-1	117	0	222	0	222	0	117	0	267	-1	141	-1	824	-2	382	-2	120	-2
470	-4	149	-3	321	-3	550	-3	104	-2	456	-2	862	-2	862	-2	456	-2	104	-2	550	-3	321	-3	149	-2	470	-4
110	-5	350	-5	755	-5	129	-4	244	-4	107	-3	203	-3	203	-3	107	-3	244	-4	129	-4	755	-5	350	-5	110	-5

144	1	260	1	297	1	294	1	348	1	872	1	937	1	624	1	260	1	522	0	259	0	144	0	642-1	192-1	
140	1	261	1	304	1	302	1	357	1	891	1	957	1	637	1	266	1	533	0	264	0	147	0	655-1	196-1	
130	1	263	1	325	1	328	1	384	1	955	1	102	2	680	1	284	1	568	0	282	0	157	0	699-1	209-1	
114	1	259	1	356	1	376	1	443	1	109	2	116	2	767	1	320	1	640	0	317	0	177	0	787-1	236-1	
934	0	240	1	378	1	443	1	549	1	134	2	141	2	929	1	386	1	773	0	383	0	214	0	949-1	284-1	
715	0	204	1	365	1	490	1	682	1	181	2	189	2	123	2	507	1	101	1	501	0	280	0	124	0	372-1
506	0	155	1	306	1	461	1	736	1	234	2	274	2	180	2	738	1	146	1	723	0	403	0	178	0	534-1
324	0	103	1	217	1	352	1	620	1	235	2	340	2	260	2	114	2	230	1	115	1	641	0	285	0	854-1
174	0	564	0	122	1	205	1	381	1	159	2	268	2	239	2	116	2	248	1	127	1	720	0	324	0	979-1
722-1	236	0	515	0	882	0	167	1	724	1	131	2	126	2	649	1	144	1	744	0	428	0	194	0	590-1	
238-1	780-1	171	0	294	0	560	0	247	1	457	1	451	1	239	1	535	0	279	0	162	0	735-1	224-1			
157-2	516-2	113-1	195-1	373-1	165	0	309	0	309	0	165	0	372-1	195-1	113-1	514-2	157-2									
612-4	201-3	440-3	759-3	145-2	643-2	120-1	120-1	643-2	145-2	759-3	440-3	201-3	611-4													
144-5	472-5	104-4	179-4	341-4	151-3	283-3	283-3	151-3	341-4	179-4	104-4	472-5	144-5													

$\tau_0 = 80$

165	1	291	1	328	1	326	1	390	1	975	1	104	2	690	1	290	1	580	0	284	0	158	0	691	-1	201	-1
161	1	293	1	336	1	334	1	399	1	995	1	106	2	703	1	296	1	592	0	290	0	161	0	705	-1	205	-1
150	1	298	1	361	1	361	1	429	1	106	2	113	2	749	1	315	1	630	0	309	0	172	0	751	-1	218	-1
132	1	298	1	400	1	415	1	491	1	120	2	127	2	842	1	354	1	708	0	347	0	193	0	843	-1	245	-1
109	1	281	1	435	1	497	1	609	1	148	2	154	2	102	2	426	1	850	0	417	0	231	0	101	0	294	-1
840	0	243	1	432	1	567	1	775	1	199	2	204	2	133	2	556	1	111	1	543	0	301	0	132	0	383	-1
598	0	187	1	371	1	552	1	871	1	267	2	299	2	194	2	801	1	159	1	775	0	430	0	188	0	546	-1
387	0	127	1	268	1	435	1	765	1	283	2	394	2	292	2	126	2	254	1	124	1	692	0	303	0	880	-1
212	0	708	0	155	1	262	1	488	1	202	2	333	2	291	2	141	2	300	1	151	1	850	0	376	0	110	-0
897	-1	302	0	669	0	115	1	220	1	953	1	170	2	162	2	840	1	185	1	947	0	542	0	242	0	712	-1
299	-1	101	0	224	0	388	0	748	0	330	1	604	1	596	1	317	1	710	0	366	0	210	0	943	-1	278	-1
198	-2	671	-2	150	-1	259	-1	501	-1	222	0	412	0	412	0	222	0	499	-1	258	-1	149	-1	668	-2	198	-2
771	-4	261	-3	581	-3	101	-2	195	-2	865	-2	160	-1	160	-1	865	-2	195	-2	101	-2	581	-3	261	-3	771	-4
181	-5	614	-5	137	-4	237	-4	458	-4	204	-3	378	-3	378	-3	204	-3	458	-4	237	-4	137	-4	614	-5	181	-5

$$\tau_0 = 90$$

186	1	321	1	360	1	358	1	433	1	107	2	113	2	753	1	318	1	640	0	311	0	172	0	741	-1	210	-1
182	1	325	1	368	1	367	1	442	1	110	2	115	2	767	1	325	1	652	0	317	0	175	0	756	-1	214	-1
170	1	333	1	396	1	395	1	474	1	117	2	123	2	816	1	345	1	693	0	336	0	186	0	803	-1	227	-1
150	1	337	1	442	1	453	1	539	1	132	2	138	2	914	1	386	1	776	0	376	0	208	0	898	-1	254	-1
125	1	323	1	490	1	548	1	666	1	160	2	166	2	110	2	462	1	928	0	450	0	249	0	107	0	304	-1
969	0	284	1	500	1	642	1	863	1	215	2	219	2	143	2	601	1	120	1	584	0	322	0	139	0	394	-1
694	0	221	1	439	1	647	1	101	2	297	2	320	2	207	2	859	1	171	1	828	0	457	0	197	0	557	-1
452	0	152	1	324	1	523	1	918	1	330	2	442	2	320	2	137	2	275	1	133	1	736	0	317	0	897	-1
252	0	864	0	191	1	324	1	607	1	248	2	399	2	344	2	166	2	351	1	174	1	976	0	425	0	121	0
109	0	376	0	843	0	146	1	281	1	121	2	213	2	202	2	105	2	231	1	117	1	664	0	292	0	837	-1
365	-1	127	0	286	0	497	0	967	0	424	1	770	1	758	1	406	1	911	0	465	0	266	0	118	0	337	-1
244	-2	848	-1	191	-1	334	-1	651	-1	288	0	530	0	529	0	287	0	649	-1	332	-1	190	-1	844	-2	242	-2
948	-4	330	-3	744	-3	130	-2	253	-2	112	-1	206	-1	206	-1	112	-1	253	-2	130	-2	744	-3	330	-3	947	-4
223	-5	776	-5	175	-4	306	-4	596	-4	263	-3	485	-3	485	-3	263	-3	596	-4	306	-4	175	-4	776	-5	223	-5

$$\tau_0 = 100$$

207	1	351	1	391	1	392	1	477	1	117	2	123	2	816	1	347	1	702	0	338	0	186	0	793	-1	219	-1
202	1	356	1	400	1	400	1	486	1	119	2	125	2	831	1	353	1	715	0	344	0	189	0	808	-1	223	-1
190	1	367	1	431	1	430	1	519	1	127	2	133	2	882	1	375	1	758	0	365	0	201	0	857	-1	236	-1
169	1	375	1	484	1	492	1	588	1	142	2	148	2	985	1	418	1	846	0	408	0	224	0	956	-1	263	-1
141	1	366	1	545	1	598	1	723	1	172	2	178	2	118	2	498	1	101	1	485	0	267	0	114	0	314	-1
110	1	326	1	569	1	717	1	947	1	230	2	233	2	152	2	645	1	130	1	626	0	344	0	147	0	404	-1
794	0	258	1	511	1	743	1	114	2	324	2	340	2	219	2	916	1	184	1	884	0	485	0	207	0	570	-1
520	0	178	1	383	1	617	1	108	2	377	2	487	2	344	2	147	2	295	1	142	1	778	0	331	0	911	-1
294	0	103	1	231	1	392	1	737	1	296	2	467	2	396	2	189	2	402	1	197	1	110	1	472	0	131	0
129	0	458	0	104	1	180	1	350	1	149	2	259	2	244	2	127	2	281	1	141	1	797	0	346	0	965	-1
438	-1	156	0	356	0	622	0	122	1	530	1	956	1	939	1	504	1	114	1	577	0	328	0	143	0	400	-1
293	-2	105	-1	239	-1	420	-1	825	-1	362	0	663	0	662	0	361	0	822	-1	418	-1	238	-1	104	-1	292	-2
114	-3	408	-3	931	-3	163	-2	321	-2	141	-1	258	-1	258	-1	141	-1	321	-2	163	-2	931	-3	408	-3	114	-3
268	-5	959	-5	219	-4	384	-4	756	-4	331	-3	608	-3	608	-3	331	-3	756	-4	384	-4	219	-4	959	-5	268	-5