

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2

СЕНТЯБРЬ, 1966

ВЫПУСК 3

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
СВЕРХСКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

И. Д. КАРАЧЕНЦЕВ
Поступила 20 июня 1966

Рассмотрена задача определения средних размеров и населенностей сверхскоплений галактик по наблюдаемым корреляциям между подсчетами скоплений в близких друг к другу направлениях и по флуктуациям в числах скоплений, приходящихся на площадки фиксированного размера.

Применение развитых соображений к распределению скоплений в области $b > +45^\circ$ по данным I и II томов каталога Цвикки [4, 5] дало следующие результаты: средний размер сверхскопления $D = 42$ мпс, среднее число скоплений в сверхскоплении $\nu = 4 \div 12$ и среднее расстояние между центрами сверхскоплений $\lambda^{-1/2} = 64$ мпс.

В работах Эйбелла [1, 2] на основе каталога богатых скоплений галактик [1] рассмотрен характер распределения скоплений галактик по небу. Сопоставляя наблюдаемое распределение со случайным пуассоновским по критерию согласия χ^2 , Эйбелл показал, что скопления галактик проявляют тенденцию к скучиванию в системы более высокого порядка — сверхскопления. Однако использованный Эйбеллом метод не позволяет определить ряд интересных статистических параметров сверхскоплений, в частности, среднее число скоплений в сверхскоплении и среднее число сверхскоплений в единице объема. Возможность для нахождения этих характеристик дает анализ флуктуаций в числе скоплений галактик, приходящихся на единичную площадку неба, и корреляций между подсчетами скоплений в близких друг к другу направлениях. Рассмотрением такой задачи мы и займемся.

Допустим, что скопления галактик образуют системы (сверхскопления), центры которых распределены в пространстве по случайному пуассоновскому закону с математическим ожиданием в единице объема

λ . Через $u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2)$ обозначим вероятность того, что в двух малых телесных углах одинакового размера ω в интервале расстояний от r_0 до r будет наблюдаться соответственно N_1 и N_2 скопления галактик. Пусть $\theta_{\alpha, r, \omega}$ определяет вероятность того, что один из телесных углов ω на расстоянии r встретит сверхскопление, пересекаемое другим телесным углом, ось которого образует с осью первого направления малый угол α . Пусть далее $P_{\omega, \alpha, r}(n)$ есть функция распределения числа скоплений галактик n в области пересечения сверхскопления первым телесным углом, если известно, что другой телесный угол не пересекает это сверхскопление. Наконец, $P_{\omega, \alpha, r}(n_1, n_2)$ — функция распределения чисел скоплений в областях соответствующих пересечений первого и второго телесных углов со сверхскоплением при условии, что оба они на расстоянии r пересекают одно и то же сверхскопление. Перечисленные вероятности зависят как от расстояния r между сверхскоплением и наблюдателем, так и от размера телесных углов ω и от углового расстояния между их направлениями α .

Следуя ходу рассуждений [3], составим функциональное уравнение для вероятности $u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2)$. Прибавим в каждом телесном угле ω к интервалу расстояний $r - r_0$ малый слой dr . Тогда на основании теорем о сложении и умножении вероятностей можно записать

$$\begin{aligned} u_{\omega, r, \Gamma+dr}(N_1, N_2) &= (1 - 2\lambda\omega r^2 dr + \theta_{\alpha, r, \omega} \lambda\omega r^2 dr) u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2) + \\ &+ \lambda\omega r^2 dr (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{n=0}^{N_1} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1 - n, N_2) P_{\omega, \alpha, r}(n) + \\ &+ \lambda\omega r^2 dr (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{n=0}^{N_2} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2 - n) P_{\omega, \alpha, r}(n) + \\ &+ \lambda\omega r^2 dr \theta_{\alpha, r, \omega} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1 - n_1, N_2 - n_2) P_{\omega, \alpha, r}(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{du_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2)}{\lambda\omega r^2 dr} &= - (2 - \theta_{\alpha, r, \omega}) u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2) + \\ &+ (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{n=0}^{N_1} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1 - n, N_2) P_{\omega, \alpha, r}(n) + \\ &+ (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{n=0}^{N_2} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1, N_2 - n) P_{\omega, \alpha, r}(n) + \\ &+ \theta_{\alpha, r, \omega} \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} u_{\omega, r, \Gamma}(N_1 - n_1, N_2 - n_2) P_{\omega, \alpha, r}(n_1, n_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем от (2) к уравнению для средних значений наблюдаемых величин. По определению математических ожиданий

$$\overline{N_1^{k_1} \cdot N_2^{k_2}} = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} N_1^{k_1} \cdot N_2^{k_2} u_{\omega, r_0, r} (N_1, N_2) = \mu_{k_1, k_2}(\omega, r_0, r). \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k P_{\omega, \alpha, r}(n) = \overline{n^k}_{\omega, \alpha, r}; \quad (4)$$

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_1^{k_1} n_2^{k_2} P_{\omega, \alpha, r}(n_1, n_2) = \overline{(n_1^{k_1} \cdot n_2^{k_2})}_{\omega, \alpha, r}. \quad (5)$$

Умножим (2) на $N_1^{k_1} \cdot N_2^{k_2}$ и просуммируем по всем значениям N_1 и N_2 . Тогда, пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} N_1^{k_1} \cdot N_2^{k_2} \sum_{n=0}^{N_1} u_{\omega, r_0, r}(N_1 - n, N_2) P_{\omega, \alpha, r}(n) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\omega, \alpha, r}(n) \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} N_2^{k_2} (N_1 + n)^{k_1} u_{\omega, r_0, r}(N_1, N_2) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\omega, \alpha, r}(n) \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k_1} N_2 C_m^{k_1} N_1^{k_1-m} n^m u_{\omega, r_0, r}(N_1, N_2) = \\ & = \sum_{m=0}^{k_1} C_m^{k_1} \mu_{k_1-m, k_2} \overline{n^m}_{\omega, \alpha, r}, \end{aligned} \quad (6)$$

уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{d \mu_{k_1, k_2}(\omega, r_0, r)}{\lambda \omega r^2 dr} + (2 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \mu_{k_1, k_2}(\omega, r_0, r) - \\ & - (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{m=0}^{k_1} C_m^{k_1} \mu_{k_1-m, k_2}(\omega, r_0, r) \overline{n^m}_{\omega, \alpha, r} - \\ & - (1 - \theta_{\alpha, r, \omega}) \sum_{m=0}^{k_2} C_m^{k_2} \mu_{k_1, k_2-m}(\omega, r_0, r) \overline{n^m}_{\omega, \alpha, r} - \\ & - \theta_{\alpha, r, \omega} \sum_{m_1=0}^{k_1} \sum_{m_2=0}^{k_2} C_{m_1}^{k_1} C_{m_2}^{k_2} \mu_{k_1-m_1, k_2-m_2}(\omega, r_0, r) \overline{(n_1^{m_1} \cdot n_2^{m_2})}_{\omega, \alpha, r} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из множества моментов μ_{k_1, k_2} практический интерес представляют только $\mu_{k, 0}$ и $\mu_{1, 1}$. Полагая $k_1 = k$, а $k_2 = 0$, из (7) после сокращений получим

$$\frac{d \mu_{k, 0}(\omega, r_0, r)}{\lambda \omega r^2 dr} - \sum_{m=1}^k C_m^k \mu_{k-m, 0}(\omega, r_0, r) \overline{n^m}_{\omega, r} = 0. \quad (8)$$

Проинтегрируем (8) по r от r_0 до r_1 и учтем, что $\mu_{k,0}(\omega, r_0, r_0) = 0$, тогда

$$\mu_{k,0}(\omega, r_0, r_1) = \lambda\omega \sum_{m=1}^k C_m^k \int_{r_0}^{r_1} \mu_{k-m,0}(\omega, r_0, r) \overline{n_{\omega,r}^m} r^2 dr. \quad (9)$$

Аналогичным образом при $k_1 = k_2 = 1$ получим

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}(\omega, r_0, r) = & 2\lambda\omega \int_{r_0}^r \mu_{1,0}(\omega, r_0, r) \overline{n_{\omega,r}} r^2 dr + \\ & + \lambda\omega \int_{r_0}^r \theta_{\alpha,r,\omega} (\overline{n_1 \cdot n_2})_{\omega,\alpha,r} r^3 dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видим, для вычисления моментов $\mu_{k,0}$ и $\mu_{1,1}$ требуется знать зависимости $\overline{n^m}$, $(\overline{n_1 \cdot n_2})$ и θ от r , то есть необходимо сделать какие-то предположения о форме, размерах и распределении населенности в сверхскоплениях галактик.

Ограничимся случаем достаточно узкого интервала расстояний $r_1 - r_0$. Если выбрать размер телесного угла подсчетов ω таким образом, чтобы $\sqrt{\omega}$ был близок к среднему угловому размеру сверхскопления в данном интервале расстояний, то можно убедиться, что зависимость $\overline{n^m}$, $(\overline{n_1 \cdot n_2})$ и θ от r будет слабая. Вынося эти множители из-под знака интегрирования при $\overline{r} = \frac{r_0 + r_1}{2}$, из (9), (10) приближенно имеем рекуррентные соотношения

$$\mu_{k,0}(\omega, r_0, r_1) = \lambda\omega \sum_{m=1}^k C_m^k \overline{n_{\omega,\overline{r}}^m} \int_{r_0}^{r_1} \mu_{k-m,0}(\omega, r_0, r) r^2 dr, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1,1}(\omega, r_0, r_1) = & 2\lambda\omega \overline{n_{\omega,\overline{r}}} \int_{r_0}^{r_1} \mu_{1,0}(\omega, r_0, r) r^2 dr + \\ & + \frac{\lambda\omega}{3} (\overline{n_1 \cdot n_2})_{\omega,\alpha,\overline{r}} \theta_{\alpha,\overline{r},\omega} (r_1^3 - r_0^3). \end{aligned} \quad (12)$$

Используем условие $\mu_{0,0} \equiv 1$ и введем объем $V = \frac{1}{3} \omega (r_1^3 - r_0^3)$,

тогда для наблюдаемых моментов путем последовательного интегрирования получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_{1,1}(\omega, r_0, r_1) &= \lambda^2 V^2 \overline{n^2}_{\omega, \bar{r}} + \lambda V (\overline{n_1 \cdot n_2})_{\omega, \bar{r}} \theta_{\omega, \bar{r}, \omega}, \\
 \mu_{1,0}(\omega, r_0, r_1) &= \lambda V \overline{n}_{\omega, \bar{r}}, \\
 \mu_{2,0}(\omega, r_0, r_1) &= \lambda^2 V^2 \overline{n^2}_{\omega, \bar{r}} + \lambda V \overline{n^3}_{\omega, \bar{r}}, \\
 \mu_{3,0}(\omega, r_0, r_1) &= \lambda^3 V^3 \overline{n^3}_{\omega, \bar{r}} + 3 \lambda^2 V^2 \overline{n^2}_{\omega, \bar{r}} \overline{n}_{\omega, \bar{r}} + \lambda V \overline{n^3}_{\omega, \bar{r}}, \\
 \dots & \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} (13)$$

Для сопоставления с данными наблюдений уравнения (13) преобразуем к несколько иному виду. Введем понятия коэффициента корреляции R_α и дисперсии k -того порядка σ_k . По определению

$$R_\alpha = \frac{(\overline{N_1 - \bar{N}})(\overline{N_2 - \bar{N}})}{(\overline{N_1 - \bar{N}})^2}, \quad \text{а} \quad \sigma_k = (\overline{N_1 - \bar{N}})^k. \quad (14)$$

Произведем в (14) операции усреднения, выразим R_α и σ_k через комбинации $\mu_{1,1}$ и $\mu_{1,0}$ и подставим их значения из (13). Тогда после сокращений получим систему уравнений, в левую часть которой входят наблюдаемые величины, а в правую — статистические характеристики сверхскоплений галактик:

$$R_\alpha = \theta_{\omega, \bar{r}, \omega} \frac{(\overline{n_1 \cdot n_2})_{\omega, \bar{r}}}{\overline{n^2}_{\omega, \bar{r}}}, \quad (15')$$

$$\mu_{1,0} = \lambda V \overline{n}_{\omega, \bar{r}}, \quad (15'')$$

$$\frac{\sigma_2}{\mu_{1,0}^2} = \frac{\overline{n^2}_{\omega, \bar{r}}}{\overline{n}_{\omega, \bar{r}}^2}, \quad (15''')$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\overline{n^3}_{\omega, \bar{r}}}{\overline{n^2}_{\omega, \bar{r}}}. \quad (15''')$$

Здесь мы ограничились записью всего четырех уравнений по следующей причине. При $k > 3$ $\frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}}$ уже не выражается простым отношением $\frac{\overline{n^k}}{\overline{n^{k-1}}}$, появляются члены с множителем λV и уловить рекуррентный характер записи довольно сложно.

Нетрудно убедиться, что при отсутствии сверхскоплений (когда сверхскопление состоит из одного скопления), уравнения (15) дают тривиальный результат. Тогда $\overline{n} = \overline{n^2} = \overline{n^3} \equiv 1$. Поскольку распреде-

ление скоплений определяется процессом Пуассона с $\mu_{1,0} = \lambda V$, то $\frac{\sigma_2}{\mu_{1,0}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \equiv 1$ и (15'') — (15''') превращаются в тождества. А из (15') получим, что для неперекрывающихся телесных углов подсчета коэффициент корреляции равен нулю.

Как отмечалось выше, значения искоемых величин, в частности, $\overline{n^k_{\alpha, \gamma}}$ зависят от распределения числа скоплений в сверхскоплении, от размеров и форм сверхскоплений и телесных углов подсчетов. Не прибегая к обширным численным выкладкам, рассмотрим в качестве иллюстрации один частный случай. Пусть мы располагаем подсчетами чисел скоплений в неперекрывающихся телесных углах, сечения которых картинной плоскостью представляют собою квадраты со стороной γ_0 в угловой мере. Предположим, что сверхскопления также имеют вид квадратов с однородной плотностью числа скоплений в проекции на картинную плоскость, причем стороны их параллельны сторонам квадратов подсчетов. Наконец, допустим, что у всех сверхскоплений в интервале расстояний $r_1 - r_0$ угловые размеры одинаковы и равны γ_0 и что в состав сверхскоплений входит одно и то же число скоплений ν . При этих предположениях $\overline{n^k} = (k+1)^{-2} \nu^k$ и уравнения (15) приобретают вид

$$R_\alpha = 1 - \frac{3}{4} \alpha^2 (2 - \alpha) \quad \text{при } \alpha \leq 1, \quad (16')$$

$$R_\alpha = \frac{(2 - \alpha)^3}{4} \quad \text{при } 1 \leq \alpha \leq 2,$$

$$\mu_{1,0} = \frac{1}{4} \lambda V \nu, \quad (16'')$$

$$\frac{\sigma_2}{\mu_{1,0}} = \frac{4}{9} \nu, \quad (16''')$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{9}{16} \nu, \quad (16''')$$

где расстояние α между центрами квадратов подсчетов выражено в единицах γ_0 .

Применим развитые соображения к подсчетам чисел скоплений галактик. С данной целью в I и II томах каталога скоплений галактик Цвикки [4, 5] была выделена область с галактической широтой $b \geq +45^\circ$ и в ней изучались подсчеты чисел скоплений класса *VD* и *ED*. Эти скопления по Цвикки располагаются в интервале расстояний от 600 *млс* до 1000 *млс* (при постоянной Хаббла $h = 75 \text{ км сек}^{-1} \text{ млс}^{-1}$). Анализ проводился в отдельности для I и II томов каталога, так как между ними заметны систематические различия. Последовательность

операций обработки была такая. При разных γ_0 вычислялся коэффициент корреляции R_α для α кратных γ_0 . Подбиралось такое γ_0 , чтобы согласие вычисленных R_α с зависимостью (16') было наилучшим. Этим фиксировался угловой размер среднего сверхскопления. Для найденного таким образом γ_0 вычислялись $\mu_{1,0}$ и дисперсии σ_2 и σ_3 .

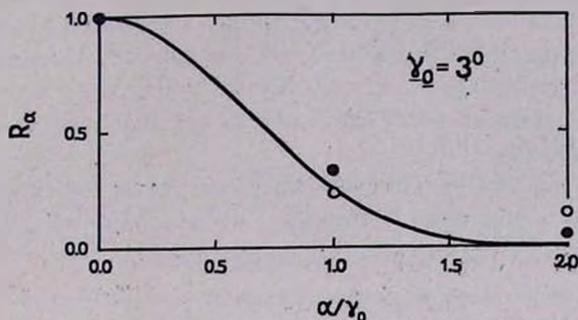


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции R_α от углового расстояния между площадками α , выраженного в единицах γ_0 . Размер площадки подсчетов $\gamma_0 = 3^\circ$. Пустые кружки отмечают значения R_α , вычисленные по данным I тома, а сплошные — по данным II тома каталога Цвикки. Кривая линия соответствует зависимости (16').

Наилучшее согласие вычисленных значений R_α с (16') получилось при $\gamma_0 = 3^\circ$ (рис. 1). На расстоянии $\bar{r} = 800$ мпс это соответствует линейному размеру сверхскопления $D = 42$ мпс.

Другие результаты подсчетов на площадках $3^\circ \times 3^\circ$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

	I том	II том
Число скоплений с $b > +45^\circ$	462	1377
$\mu_{1,0}$	2.75	7.16
σ_2	4.84	15.9
σ_3	16.6	108
$\nu = \frac{9\sigma_2}{4\mu_{1,0}}$	4.0	5.0
$\nu = \frac{16\sigma_3}{9\sigma_2}$	6.1	12
$\lambda = \frac{4\mu_{1,0}}{\nu}$	$(2.4-3.7) \cdot 10^{-8}$ мпс ⁻³	$(3.2-7.6) \cdot 10^{-8}$ мпс ⁻³

Из таблицы видно, что по данным I тома каталога Цвикки среднее сверхскопление объединяет в себе 4—6 скоплений, а по данным II тома — 5—12 скоплений галактик. Большие значения \bar{v} определяемые через σ_v , сравнительно с \bar{v} , вычисленными по σ_v , объясняются тем, что в реальном случае имеется значительная дисперсия населенностей сверхскоплений. Если предположить, что \bar{v} распределено по закону Пуассона, то различие между значениями \bar{v} в каждом столбце сократилось бы на единицу. Следовательно, дисперсия населенностей \bar{v} заметно превосходит пуассоновскую. Кроме того, заметим, что определенная нами населенность \bar{v} будет давать среднее число лишь богатых, заметных скоплений.

Интересно сравнить полученные результаты со средними характеристиками 17 выбранных Эйбеллом сверхскоплений галактик. Для этих систем Эйбелл [2] получил средний размер $\bar{D} = (52 \pm 16)$ мпс и среднее число скоплений в сверхскоплении $\bar{v} = 10.6 \pm 6.0$. Если учесть, что на данных Эйбелла сказался эффект селекции, то согласие результатов следует считать весьма хорошим.

Из табл. 1 среднее число центров сверхскоплений в единице объема получается порядка $4 \cdot 10^{-6}$ мпс⁻³. Откуда средний размер ячейки пространства, занимаемого сверхскоплением, оказывается равным 64 мпс. А это всего в полтора раза больше диаметра среднего сверхскопления. При наличии дисперсии в диаметрах сверхскопления будут перекрываться, и развитая модель должна быть в некоторой степени видоизменена.

В заключение отметим, что характер корреляций между подсчетами скоплений галактик в площадках разного размера заставляет усомниться в правильности исходной предпосылки о случайном распределении центров сверхскоплений. Для анализа этого эффекта имеющийся статистический материал явно недостаточен. Но обзор площадок с числом скоплений в 2—3 раза выше среднего показывает, что в их распределении заметна ассоциативность.

Бюряканская астрофизическая
обсерватория

SOME STATISTICAL CHARACTERISTICS OF SUPERCLUSTERS OF GALAXIES

I. D. KARACHENTSEV

The problem of the determination of average dimension and population of superclusters of galaxies from the observed correlations between counts of clusters in close directions and from fluctuations in numbers of clusters observed in the fixed size areas are examined.

The application of the developed considerations to the distribution of clusters in $b \geq +45^\circ$ of I and II volumes of Zwicky's catalogue [4, 5] leads to the results: the average size of supercluster is $D = 42$ mps, the average number of clusters in supercluster is between four and twelve and the average distance between superclusters' centers is $\lambda^{-1/2} = 64$ mps.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. G. O. Abell, Ap. J., Suppl. ser., 3, 211, 1958.
2. G. O. Abell, A. J., 66, 607, 1961.
3. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, АН Арм ССР, Ереван, 1960, 363.
4. F. Zwicky, E. Herzog, P. Wild, Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, v. I, California institute of technology, 1961.
5. F. Zwicky, E. Herzog, Catalogue of galaxies and of clusters of galaxies, v. II, California institute of technology, 1963.