АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 СЕНТЯБРЬ, 1966 ВЫПУСК 3

О ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ОКРУЖАЮЩЕЙ ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК

Т. А. ГЕРМОГЕНОВА

Поступила 1 июня 1966

Исследуется решение уравнения переноса в однородной поглощающей и изотропно рассеивающей сферической оболочке, в центре которой находится точечный изотропный источник. Устанавливается характер асимптотического поведения решения на больших расстояниях от внутренней поверхности оболочки, как при конечном внешнем радиусе оболочки, так и при бесконечном и выясняется связь этих двух задач. Изучается зависимость решения от внутреннего радиуса оболочки. Особое внимание обращено на описание внутреннего альбедо оболочки.

Задача о распространении излучения в сферической оболочке представляет интерес в связи с исследованием диффузии излучения в газовых и пылевых туманностях.

В работах [1] и [2] исследуются асимптотические свойства решения задачи об оболочке большой оптической толщины. Авторы предполагают, что внутренний радиус оболочки велик по сравнению с ее геометрической толщиной. Это предположение, по существу, сводит задачу к плоской.

В ряде задач представляет интерес более точное исследование, связанное с учетом сферичности оболочки [3].

В настоящей работе проводится исследование решения уравнения переноса в однородной поглощающей и изотропно рассеивающей сферической оболочке с точечным изотропным источником в центре ее. Установление существования ограниченного решения (раздел 1) позволяет дать анализ асимптотического поведения решения на больших расстояниях от внутренней поверхности оболочки как при конечном внешнем радиусе оболочки, так и при бесконечном, и выяснить связь этих двух задач (раздел 2). Изучению зависимости решения от внутреннего радиуса оболочки посвящен раздел 3 работы.

1. Интенсивность излучения в точке с радиусом $\bar{r}$ в направлении, составляющем угол $\Theta = \arccos \mu$ с радиусом-вектором, $\Psi(\bar{r}, \mu)$ есть решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} + \frac{1-\mu^2}{\bar{r}} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \sigma \Psi(\bar{r}, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} \Psi(\bar{r}, \mu)\, d\mu$$

$$\bar{R}_0 < \bar{r} < \bar{R}, \qquad -1 \leqslant \mu \leqslant 1 \tag{1.1}$$

$$\Psi(\bar{R}_0, \mu) = \gamma \Psi(\bar{R}_0, -\mu) + \frac{S\delta(\mu-1)}{4\pi \bar{R}_0^2}, \qquad \mu > 0,$$

$$\Psi(\bar{R}, \mu) = 0, \qquad \mu < 0.$$

Здесь S — число частиц, излучаемых источником в точке $\bar{r} = 0$ в единицу времени, σ — полное сечение взаимодействия излучения с веществом, σ_s — сечение рассеяния, $\bar{R}_0$ и $\bar{R}$ — внутренний и внешний радиусы сферической оболочки. Краевое условие (1.1) отвечает возможности „прострела" через полость $0 \leqslant \bar{r} \leqslant \bar{R}_0$ при $\gamma = 1$ или при $\gamma = 0$ — абсолютно черной сфере радиуса $\bar{R}_0$, полностью поглощающей отраженное сферической оболочкой излучение и излучающей по закону $\frac{S\delta(\mu-1)}{4\pi \bar{R}_0^2}$.

В такой постановке задача аналогична проблеме Милна с инсоляцией в плоском случае с условием зеркального внутреннего отражения на облучаемой поверхности с коэффициентом отражения γ.

При $\gamma = 0$ приходим к классической проблеме Милна с инсоляцией [4]. Существование, единственность и общие свойства решения этой неоднородной при $S \neq 0$ задачи для сферической оболочки конечной оптической толщины следует из общих исследований теории переноса [5]. При $\bar{R} = \infty$ и $\sigma = \sigma_s$ однородная задача с $S = 0$, очевидно, обладает решением $\Psi = \text{const}$. Существует ли решение неоднородной задачи при $\bar{R} = \infty$, какова его связь с решением для конечного $\bar{R}$, характер зависимости от σ, σ_s, $\bar{R}_0$. Для исследования этих вопросов перейдем к интегральному уравнению для функции источника $B(r)$ так же, как это делается в [6] при исследовании задачи с $\gamma = 0$. Для задач с $\bar{R} = \infty$ второе краевое условие мы заменим естественным требованием ограниченности $\Psi(\bar{r}, \mu)$ при $\mu < 0$, $\bar{r} \to \infty$.

Пусть $r = \bar{r}\sigma$, $R_0 = \bar{R}_0\sigma$, $R = \bar{R}\sigma$, $\omega_0 = \frac{\sigma_s}{\sigma}$. Введем функцию $\Phi(r, \mu)$ — интенсивность рассеянного излучения — соотношением

$$\Psi(\overline{r}, \mu) = \Phi(r, \mu) + \frac{S\delta(\mu-1)}{4\pi\overline{R}_0^2} e^{-\sigma(\overline{r}-\overline{R}_0)}.$$

Тогда для $\Phi(r, \mu)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\mu\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} + \Phi(r, \mu) = \frac{\omega_0}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi(r, \mu')\,d\mu' + F\frac{e^{-r}}{r^2} \equiv B(r), \tag{1.2}$$

где

$$F = F(R_0) = \frac{S\sigma\sigma_s e^{R_0}}{8\pi}$$

$$\Phi(R_0, \mu) = \gamma\Phi(R_0 - \mu), \qquad \mu > 0$$

$$\Phi(R, \mu) = 0, \qquad \mu < 0, \quad \text{при} \quad R < \infty$$

$$\Phi(r, \mu) \text{ ограничена при } r \to \infty, \text{ при } R = \infty.$$

Интегрируя (1.2), будем иметь для μ отрицательных

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_1(r, \mu) \equiv \int_r^R \frac{\rho B(\rho)\, e^{-\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)} + r|\mu|}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}\,d\rho. \tag{1.3}$$

Для μ положительных:

при

$$0 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}}$$

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_2(r, \mu) \equiv \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^{r} \frac{\rho B(\rho)\, e^{-r\mu + \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}\,d\rho + \int_{r\sqrt{1-\mu^2}}^{R} \frac{\rho B(\rho)\, e^{-r\mu - \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}\,d\rho, \tag{1.4}$$

при

$$\sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}} \leqslant \mu \leqslant 1$$

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_3(r, \mu) \equiv \gamma\Phi_1(R_0 - \mu)\, e^{-r\mu + \sqrt{R_0^2 - r^2(1-\mu^2)}} + \int_{R_0}^{r} \frac{\rho B(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}\, e^{-r\mu + \sqrt{\rho^2 - r^2(1-\mu^2)}}. \tag{1.5}$$

Используя теперь для $B(r)$ выражение

$$B(r)=\frac{\omega_0}{2}\left\{\int\limits_{-1}^{0}\Phi_1(r,\ \mu)\,d\mu+\int\limits_{0}^{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}\Phi_2(r,\ \mu)\,d\mu+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^{1}\Phi_3(r,\ \mu)\,d\mu\right\}+F\,\frac{e^{-r}}{r^2},$$

придем к интегральному уравнению

$$rB(r)=\Lambda\,[\rho B(\rho)]_r+F\frac{e^{-r}}{r}, \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda\,[\rho B(\rho)]_r=\frac{\omega_0}{2}\int\limits_{R_0}^{R}\{E(|r-\rho|)-E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2})+\\+\gamma K(r,\ \rho)\}\,\rho B(\rho)\,d\rho\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$K(r,\rho)=r\int\limits_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^{1}\frac{d\mu}{\sqrt{\rho^2-R_0^2(1-\mu^2)}}\,e^{-\sqrt{\rho^2-R_0^2(1-\mu^2)}+\sqrt{R_0^2-r^2(1-\mu^2)}-\mu(r-R_0)}$$

$$E(x)=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-sx}\,ds}{s}.$$

Преобразования, приводящие к (1.6), связанные с заменами переменных интегрирования и порядка интегрирования, законны вследствие положительности и интегрируемости подынтегральных выражений как при R ограниченном, так и $R=\infty$.

Лемма 1. Справедливы оценки*

$$0<\Lambda[1]_r<\omega_0\left[1-\frac{1}{2}E_2(r+R_0)\right] \tag{1.8}$$

для всех $r\geqslant R_0\geqslant 0$, $0\leqslant\gamma\leqslant 1$.

---

* Через $E_n(x)$ здесь и далее обозначаются интегральные показательные функции

$$E_n(x)=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-sx}}{s^n}ds,\qquad E_1(x)\equiv E(x).$$

Действительно, запишем $\int\limits_{R_0}^{\infty} K(r, \rho)\, d\rho$ в виде

$$r\int\limits_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^{1} e^{-\mu r+\sqrt{R_0^2-r^2(1-\mu^2)}}\left\{\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{e^{\mu R_0-\sqrt{\rho^2-R_0^2(1-\mu^2)}}}{\sqrt{\rho^2-R_0^2(1-\mu^2)}}\,d\rho\right\}d\mu.$$

Для внутреннего интеграла, пользуясь заменой

$$z=\sqrt{\rho^2-R_0^2(1-\mu^2)},\qquad z\,dz=\rho\,d\rho,\quad \rho=\sqrt{z^2+R_0^2(1-\mu^2)},$$

получим оценку

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,R_0}<\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{e^{\mu R_0-z}\,dz}{\sqrt{z^2+R_0^2(1-\mu^2)}}=\frac{1}{R_0}-\frac{\mu}{R_0^2}+O\left(\frac{1}{R_0^3}\right)<\frac{1}{R_0}. \tag{1.9}$$

И так как

$$\int\limits_{\sqrt{1-\frac{R_0^2}{r^2}}}^{1} e^{-\mu r+\sqrt{R_0^2-r^2(1-\mu^2)}}\,d\mu \quad \text{заменой}\quad \mu r-\sqrt{R_0^2-r^2(1-\mu^2)}=z$$

сводится к интегралу

$$\frac{1}{2r}\int\limits_{r-R_0}^{\sqrt{r^2-R_0^2}} e^{-z}\left[\frac{r^2-R_0^2}{z^2}-1\right]dz,$$

то

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} K(r,\rho)\,d\rho=E_2(r-R_0)-\frac{1}{R_0}[2E_3(r-R_0)-E_3(\sqrt{r^2-R_0^2})]+$$
$$+O\left(\frac{1}{R_0^2}\right)<E_2(r-R_0). \tag{1.10}$$

Учитывая теперь, что

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} E(|r-\rho|)\,d\rho=2-E_2(r-R_0),\quad \text{а}$$

$$\int\limits_{R_0}^{\infty} E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2})\,d\rho>\int\limits_{R_0}^{\infty} E(r+\rho)\,d\rho=E_2(r+R_0),$$

придем к оценке (1.8).

291—26

Теорема 1. Ряд Неймана для уравнения (1.6) при $R=\infty$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Lambda^{\nu}\left[F\frac{e^{-\rho}}{\rho}\right]_r \tag{1.11}$$

сходится на $[R_0, \infty)$ *к функции, ограниченной величиной*

$$4Fe^{R_0}\frac{R_0+1}{R_0}. \tag{1.12}$$

Функция $B(r)=\frac{1}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Lambda^{\nu}\left[\frac{Fe^{-\rho}}{\rho}\right]_r$ *является единственным решением (1.6) из* $L_2[R_0, \infty)$, *если* $\omega_0<1$. *При* $\omega_0=1$ *любое другое решение из* $L_2[R_0, \infty)$ *отличается от этой функции, обращающейся в* 0 *при* $r\to\infty$, *на постоянную при* $\gamma=1$ *или на функцию, стремящуюся к постоянной при* $r\to\infty$ *при* $\gamma<1$.

При $\omega_0<1$, согласно оценкам (3.8), ряд Неймана (1.11) сходится, по крайней мере, как геометрическая прогрессия с показателем ω_0. Для доказательства сходимости ряда (1.11) при $\omega_0=1$ воспользуемся методом, развитым в [7] при исследовании классической проблемы Милна и заключающемся в анализе сходимости ряда Неймана для некоторой функции, мажорирующей свободный член (1.6). В качестве этой мажорирующей функции может быть взята, например, $E_2(r+R_0)$. Действительно, используя (3.8), легко получить неравенства

$$0<\Lambda^n[1]_r<1-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\Lambda^{\nu}[E_2(\rho+R_0)]_r$$

при $n=2, 3, \cdots$

Отсюда следует, что ряд Неймана $\sum_{\nu=0}^{\infty}\Lambda^{\nu}[E_2(\rho+R_0)]_r$ сходится при всех $r\geqslant R_0$ и его сумма не больше 2. Но

$$F\frac{e^{-r}}{r}<\frac{2(R_0+1)}{R_0}E_2(r+R_0)Fe^{R_0},$$

так как

$$E_2(r+R_0)>\frac{e^{-(r+R_0)}}{r+R_0+1}, \qquad \frac{2(R_0+1)}{R_0(R_0+r+1)}>\frac{1}{r}.$$

Поэтому ряд Неймана (1.11) также сходится и его сумма не превышает величины $\frac{4(R_0+1)}{R_0}Fe^{R_0}$. Функция $B(r)=\frac{F}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Lambda^{\nu}\left[\frac{e^{-\rho}}{\rho}\right]_r$ очевидно, убывает при $r\to\infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{r}$.

Функции $K(r, \rho)e^{\lambda(r+\rho)}$ и $E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2})e^{\lambda(r+\rho)}$ при любом $\lambda<1$, как нетрудно показать, интегрируемы с квадратом в двумерной области $(R_0, \infty)\times(R_0, \infty)$. Следовательно, характер решений, как однородного уравнения $y=\Lambda[y]_r$, так и неоднородного $y=\Lambda[y]_r+f(r)$ определяется свойством сингулярной части ядра — $E(|r-\rho|)$ [8]. Это означает, что в классе функций, интегрируемых с весом e^{-r} на (R_0, ∞), существует единственное (с точностью до постоянного множителя) решение однородной задачи. Оно возрастает как $e^{\nu r}$ (при $\omega_0<1$) или как r (при $\omega_0=1$) при $r\to\infty$. Здесь ν — неотрицательный корень характеристического уравнения

$$\frac{\omega_0}{2\nu}\ln\frac{1+\nu}{1-\nu}=1 \qquad \begin{array}{l}\nu=0 \quad \text{при} \quad \omega_0=1\\ 0<\nu<1 \quad \text{при} \quad \omega_0<1.\end{array}$$

Асимптотика ограниченного решения неоднородного уравнения

$$y(r)=\Lambda[y]_r+f(r) \tag{1.13}$$

— единственного решения из $L_2(R_0, \infty)$ определяется функцией

$$y_{as}(r)=Ce^{-\nu(r-R_0)}+O(e^{-(r-R_0)}), \tag{1.14}$$

где множитель C зависит от ω_0, R_0, γ, но не зависит от r. Основываясь на этих результатах и учитывая, что $y=\text{const}\cdot r$ $(B=\text{const})$ является решением однородного уравнения $y=\Lambda[y]_r$, при $\omega_0=1$, $\gamma=1$, легко видеть, что справедлива и вторая часть теоремы 1.

Отметим, что при $R_0\to\infty$ в случае, когда $\omega_0=1$, $\gamma=1$, наши оценки перестают быть справедливыми. Ограниченного решения предельной задачи — о распространении излучения от плоского источника в бесконечной чисто рассеивающей среде — не существует. Действительно, в этом случае плотность излучения должна быть решением неоднородной задачи с предельным ядром

$$\tilde{y}(r)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\{E(|r-\rho|)+E(r+\rho)\}\tilde{y}(\rho)\,d\rho+Ae^{-r}.$$

Так как решением соответствующей однородной задачи является постоянная, то, как легко видеть, для всякого конечного r справедливо неравенство

$$\tilde{y}(r)\geqslant\tilde{y}(\infty)>0, \tag{1.15}$$

где $\tilde{y}(\infty)$ — предельное значение $\tilde{y}(r)$ при $r\to\infty$, согласно [8] может быть найдено по формуле

$$\tilde{y}(\infty) = \alpha \left\{ A \int_0^\infty [r + q(r)] e^{-r} dr + \int_0^\infty dr \int_0^\infty d\rho\, E(r+\rho) \tilde{y}(\rho) [r + q(r)] \right\} > 0,$$

где $\alpha > 0$, $0 < q(r) < 1$.

Уравнение для производной решения $\tilde{y}'$ имеет вид

$$\tilde{y}'(r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{E(|r-\rho|) - E(r+\rho)\} \tilde{y}'(\rho)\, d\rho - Ae^{-r}.$$

Следовательно, $\tilde{y}'(r) < 0$, и при $r \to \infty$ стремится к конечному пределу [8]

$$\tilde{y}'(\infty) = -A\alpha \int_0^\infty re^{-r} dr = -A\alpha < 0,$$

что противоречит (1.15).

2. Обратимся теперь к исследованию характера зависимости решения от r и параметров задачи R и R_0. Согласно (1.14), при $r - R_0 \to \infty$, $R = \infty$

$$B_\infty(r) = \frac{C e^{-\nu(r-R_0)}}{r} + O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{r}\right). \tag{2.1}$$

Пользуясь формулами (1.3 — 1.5), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_\infty(r, \mu) &= \frac{C}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad \omega_0 = 1, \\ \Phi_\infty(r, \mu) &= \frac{e^{-\nu r}}{(1-\mu\nu) r} + O\left(\frac{e^{-\nu r}}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad \omega_0 < 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

то есть асимптотика Φ_∞ по r такая же как в задаче о точечном источнике в бесконечной среде [9, 10].

Для того, чтобы исследовать зависимость решения Φ_R от r и R в задаче о сферической оболочке конечной толщины $R - R_0$ при R достаточно большом, как в [11], введем функцию $\overline{\Phi}_R(r, \mu)$.

$$\overline{\Phi}_R(r, \mu) = \Phi_\infty(r, \mu) - \Phi_R(r, \mu),$$

$\overline{\Phi}_R$ есть, очевидно, решение краевой задачи

$$\mu \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \mu} + \overline{\Phi}(r, \mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^{+1} \overline{\Phi}(r, \mu)\, d\mu$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(R_0, \mu) &= \gamma \overline{\Phi}(R_0 - \mu), \qquad \mu > 0 \\ \overline{\Phi}(R, \mu) &= \Phi_\infty(R, \mu), \qquad \mu < 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя (2.2), придем к следующим выражениям для $\overline{\Phi}_R$:

$$\overline{\Phi}_R(r, \mu) = \frac{C}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \qquad \text{при } \omega_0 = 1,$$

$$\overline{\Phi}_R(r, \mu) = \frac{e^{-\nu R}}{R} \varphi(r, \mu) \qquad \text{при } \omega_0 < 1,$$

где $\varphi(r, \mu)$ ограничено сверху решением $f(r)$ неоднородного уравнения

$$f(r) = \Lambda[f]_r + O(e^{-(R-r)}).$$

Функция $f(r)$ ведет себя, по крайней мере как $e^{-\nu(R-r)}$ при $R - r$ достаточно большом. Этот результат можно получить, пользуясь асимптотическими формулами типа (1.14) для $f(r)$ при $-r + R \to \infty$.

Таким образом, при достаточно больших R с точностью до величин $\sim \frac{1}{R^2}$

$$\begin{aligned} \Phi_R(r, \mu) &= \Phi_\infty(r, \mu) - \frac{C(R_0)}{R} \qquad \text{при } \omega_0 = 1, \\ \Phi_R(r, \mu) &= \Phi_\infty(r, \mu) + O\left(\frac{e^{-\nu R}}{R}\right) \qquad \text{при } \omega_0 < 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В частности, обозначив через $A_R(R_0, \mu)$ функцию $\Phi_R(R_0, \mu)$, будем иметь

$$\begin{aligned} A_R(R_0, \mu) &= A_\infty(R_0, \mu) - \frac{C(R_0)}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \omega_0 = 1, \\ A_R(R_0, \mu) &= A_\infty(R_0, \mu) + O\left(\frac{e^{-\nu R}}{R}\right), \quad \omega_0 < 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Рассмотрим теперь зависимость решения задачи (1.6) при $R = \infty$ от параметра R_0.

При $R_0 \ll 1$ из оценки (1.12) следует, что $B < \frac{\text{const}}{r R_0}$.

Записывая (1.6) в виде

$$r B(r) = \Lambda_0[\rho B(\rho)]_r + F \frac{e^{-r}}{r} + \Lambda_1[\rho B(\rho)]_r + \Lambda_2[\rho B(\rho)]_r,$$

где

$$\Lambda_0[f]_r = \frac{\omega_0}{2}\int\limits_0^{\infty}\{E(|r-\rho|) - E(r+\rho)\}f(\rho)\,d\rho,$$

$$\Lambda_1[f]_r = -\frac{\omega_0}{2}\int\limits_0^{R_0}\{E(|r-\rho|) - E(r+\rho)\}f(\rho)\,d\rho,$$

$$\Lambda_2[f]_r = \frac{\omega_0}{2}\int\limits_2^{\infty}\{\gamma K(r,\ \rho) - E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2}) +$$

$$+ E(r+\rho)\}f(\rho)\,d\rho,$$

и учитывая, что $\Lambda_{1,2}[1] \sim R_0 \ln R_0$, получим, что с точностью до величин порядка $\ln R_0\ r B(r)$, а следовательно, $\Phi(r,\ \mu)$ совпадает с решением задачи о точечном источнике в бесконечной среде.

Отсюда

$$B(R_0) = \frac{F}{R_0^2} + O\left(\frac{\ln R_0}{R_0}\right),$$

$$A(R_0,\ \mu) = \frac{F}{R_0}\,\frac{\vartheta}{\sin\vartheta} + O(\ln R_0),\quad \vartheta = \pi - \arccos\mu. \tag{3.1}$$

В задачах с $R_0 \gg 1$ оценки (1.12) оказываются слишком грубыми. В тех случаях, когда $\omega_0 < 1$, пользуясь (1.10) и учитывая, что

$$\frac{1}{R_0}\,E_3(a) - \frac{3}{R_0^3}\,E_5(a) < \int\limits_{R_0}^{\infty} E(a+\sqrt{\rho^2-R_0^2})\,d\rho < \frac{1}{R_0}\,E_3(a), \tag{3.2}$$

будем иметь

$$\int\limits_{R_0}^{\infty}\{\gamma K(r,\ \rho) - \gamma E(r+\rho-2R_0) - E(\sqrt{\rho^2-R_0^2}+\sqrt{r^2-R_0^2})\}\,d\rho =$$

$$= O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Так как ряд Неймана (1.11) при $\omega_0 < 1$ сходится, как геометрическая прогрессия с показателем ω_0, то главная часть решения при $R_0 \to \infty$ $y_0(x)$ $(x = r - R_0)$ может быть найдена из уравнения с предельным ядром:

$$y_0(x)=\frac{\omega_0}{2}\int_0^\infty\{E(|x-x'|)+\gamma E(x+x')\}y(x')\,dx'+$$

$$+\frac{\widetilde{F}e^{-x}}{R_0+x},\quad \widetilde{F}=Fe^{R_0}.$$

Очевидно, $y_0(x)=O\left(\frac{\widetilde{F}}{R_0}\right)$ и, следовательно, при $\omega_0<1$ и $r\approx R_0$

$$B(r)\sim\frac{\widetilde{F}}{R_0 r},\quad A\sim\frac{\widetilde{F}}{R_0^2}.$$

Для того, чтобы оценить поведение решения при $R_0\to\infty$ в случае $\omega_0=1$, запишем (1.6) в виде

$$y(r)=L_0[y]+L_1[y]+\frac{Fe^{-r}}{r},$$

где при $\gamma=1$

$$L_0[y]=\frac{1}{2}\int_{R_0}^\infty\{E(|r-\rho|)+E(r+\rho-2R_0)-$$

$$-2E(r-R_0+\sqrt{\rho^2-R_0^2})\}y(\rho)\,d\rho$$

$$L_1[y]=\frac{1}{2}\int_{R_0}^\infty\{K(r,\rho)-E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2})-E(r+\rho-2R_0)+$$

$$+2E(r-R_0+\sqrt{\rho^2-R_0^2}\}y(\rho)\,d\rho,$$

а при $\gamma<1$

$$L_0[y]=\frac{1}{2}\int_{R_0}^\infty\{E(|r-\rho|)+\gamma E(r+\rho-2R_0)\}y(\rho)\,d\rho$$

$$L_1[y]=\frac{1}{2}\int_{R_0}^\infty\{\gamma K(r,\rho)-E(\sqrt{r^2-R_0^2}+\sqrt{\rho^2-R_0^2})-$$

$$-\gamma E(r+\rho-2R_0)\}y(\rho)\,d\rho.$$

Согласно (1.10) и (3.2) будем иметь

$$\text{при } \gamma=1:\quad L_0[1]=1-\frac{1}{R_0}E_3(r-R_0)+O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{R_0^3}\right),$$

$$L_1[1]=O\left(\frac{e^{-(r-R_0)}}{R_0^3}\right), \tag{3.3}$$

$$\text{при } \gamma<1:\quad L_0[1]=1-\frac{1-\gamma}{2}E_2(r-R_0),$$

$$L_1[1]=O\left(\frac{E_3(r-R_0)}{R_0}\right).$$

Так же как при доказательстве теоремы 1, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_0^{\nu}\left[\frac{1}{R_0}E_3(\rho-R_0)\right]_r<1+O\left(\frac{1}{R_0^3}\right) \quad \text{при } \gamma=1,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_0^{\nu}\left[\frac{1-\gamma}{2}E_2(r-R_0)\right]<1+O\left(\frac{1}{R_0}\right) \quad \text{при } \gamma<1.$$

Отсюда следует, что, пренебрегая величинами порядка $1/R_0^3$, мы можем определить решение $y(r)$ из приближенного уравнения

$$y(r)=L_0[y]+F\frac{e^{-r}}{r}, \tag{3.4}$$

$$\text{и при } \gamma<1\quad y(r)\sim\frac{1}{R_0},\quad \text{при } \gamma=1\quad y(r)<R_0.$$

Таким образом, при $\gamma<1$, $\omega_0=1$ $B(r)\sim\dfrac{\widetilde{F}}{rR_0}$, $A\sim\dfrac{\widetilde{F}}{R_0^2}$ так же, как в задачах с $\omega_0<1$.

В задачах с $\gamma=1$ производная $y'(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$y'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\{E(|x-x'|)E(x+x')\}y'(x')\,dx'+F(x),$$

где

$$F(x)=-\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}E(x+\sqrt{x'^2+2R_0x'})\,y(x')\,dx'-\frac{\widetilde{F}e^{-x}(R_0+x+1)}{(R_0+x)^2}.$$

Так как при $x\to\infty$ $y'(x)$ обращается в 0, а с другой стороны, согласно [12]

$$y'(\infty) = 3\int_0^\infty x F(x)\,dx,$$

то должно выполняться равенство

$$\int_0^\infty E_2(\sqrt{x'^2 + 2R_0 x'})\,y(x')\,dx' = FE(R_0) = \frac{\widetilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right). \qquad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$|F| < \frac{\max y}{R_0} e^{-x} + O\left(\frac{\widetilde{F} e^{-x}}{R_0}\right).$$

Так как $\max y < R_0$, то $|y'| < \overline{q} + O\left(\frac{1}{R_0}\right)$, где $\overline{q}$ — максимум решения уравнения

$$q(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty E(|x-x'|)\,q(x')\,dx' + e^{-x},$$

не превышающий, как известно [4], значения $q_\infty \approx 5$. Подставляя в (3.5) вместо $y(x)$ выражение

$$y(x) = y(0) + y'(\xi)\,x, \quad R_0 < \xi < \infty, \qquad (3.6)$$

получим

$$y(0) = \frac{\widetilde{F}}{R_0}\,\frac{1}{\int\limits_0^\infty E_2(\sqrt{x^2 + 2R_0 x})\,dx} + O\left(\frac{1}{R_0}\right) = 3\widetilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right). \qquad (3.7)$$

Записывая (3.4) в виде

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \{E(|x-x'|) - E(x+x')\}\,y(x')\,dx' + f(x),$$

где

$$f(x) = \int_0^\infty \{E(x+x') - E(x+\sqrt{x'^2 + 2R_0 x'})\}\,y(x')\,dx' + \frac{\widetilde{F} e^{-x}}{R_0 + x},$$

и для значения $y(\infty)$, пользуясь выражением [12]

$$y(\infty) = 3\int\limits_0^\infty xf(x)\,dx,$$

получим

$$y(\infty) = 3\int\limits_0^\infty y(x')\,E_3(x')\,dx' - 3\int\limits_0^\infty y(x')\,E_3(\sqrt{x'^2 + 2R_0x'})\,dx' +$$

$$+ 3FE_2(R_0).$$

Мы воспользуемся тем обстоятельством, что в этом случае с точностью до величин $\sim\dfrac{1}{R_0^3}$ функция $z = 1$, согласно (3.3) есть решение уравнения

$$z(r) = L_0(z) + \frac{1}{R_0}E_3(r - R_0).$$

Так как $y(x') = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} L_0^\nu\left[F\dfrac{e^{-r}}{r}\right]_r$, то меняя порядок интегрирования, как в [4], найдем

$$\int\limits_0^\infty y(x')\,E_3(x')\,dx' = \widetilde{F}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{R_0 + x}\sum_0^\infty L_0^\nu[E_3(x)]\,dx = \widetilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Но

$$\int\limits_0^\infty y(x')E_3(\sqrt{x'^2 + 2R_0x'})\,dx' < \int\limits_0^\infty y(x)\,E_2(\sqrt{x^2 + 2R_0x})\,dx = FE(R_0),$$

$$\text{а } E_n(R_0) = \frac{e^{-R_0}}{R_0} + O\left(\frac{e^{-R_0}}{R_0^2}\right).$$

Таким образом,

$$y(\infty) = 3\widetilde{F} + O\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

Оценивая с помощью (3.6) $f(x)$, легко получить, что

$$f(x) = \frac{\overline{F}}{R_0}\left[\frac{3}{2}E_2(x) - e^{-x}\right] + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Следовательно, $y'(x) = O\left(\frac{1}{R_0}\right)$, в частности, полагая $x = 0$ в (3.4), получаем

$$y'(0) = f(0) = \frac{\widetilde{F}}{2R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Поскольку при $x \gtrsim 1$ $f(x) < 0$, следует ожидать, что при $x \to \infty$ $y'(x) \to 0$, оставаясь отрицательной и, таким образом, $y(x)$ при изменении x от 0 до ∞ сначала возрастает от значения $y(0) = 3\widetilde{F}$, проходит через максимум и затем убывает от $y(\infty) = 3\widetilde{F}$ — своего минимального значения. Следовательно, в этом случае

$$B(r) = \frac{3\widetilde{F}}{r} \text{ при } r \to \infty, \; B(R_0) = \frac{3\widetilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Чтобы найти $A(R_0, \mu)$, подставим (3.6) в (1.3) и выделяя главный член разложения по степеням $1/R_0$, получим

$$A(R_0, \mu) = \frac{3\widetilde{F}}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_0^2}\right).$$

Проведенный анализ показывает, что когда $\omega_0 = 1$, решение задачи о точечном источнике в сферической полости оказывается весьма близким к решению задачи о точечном источнике в бесконечном пространстве, по крайней мере, в двух предельных случаях — при очень малом радиусе R_0 полости и при очень большом. В том случае, когда $\omega_0 < 1$, наличие полости мало сказывается на результате лишь при $R_0 \ll 1$. Задача же с $R_0 \gg 1$ существенно отличается от задачи с $R_0 = 0$, как и следует ожидать.

Автор пользуется случаем высказать благодарность В. Г. Курту, по предложению которого была предпринята настоящая работа.

Математический институт АН СССР
им. В. А. Стеклова

ON THE DIFFUSION OF RADIATION IN A SPHERICAL LAYER AROUND A POINT SOURCE

T. A. GERMOGENOVA

The solution of the equation of radiative transfer for a homogeneous absorbing and isotropically scattering spherical layer is investigated, an isotropical point source being at the centre. An asymptotic of intensity of radiation at great distances from the inner surface of the layer is obtained. Two cases of this problem are considered: that with infinite optical thickness of the layer and the other with a finite one.

The connection between these cases is discussed. The dependence of the solution on inner radius of the layer is studied.

Specific attention is paid to the evaluation of the inner surface albedo.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, сб. „Кинематика и динамика звездных систем и физика межзвездной среды", „Наука", Алма-Ата, 1965, 285.
2. *Д. И. Нагирнер*, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., № 32, 1965, 66.
3. *В. Г. Курт, Т. А. Гермогенова*, Астрон. ж., (в печати), 1966.
4. *E. Hopf*, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tracts, № 31 1934.
5. *В. С. Владимиров*, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 3, 1957.
6. *Е. С. Кузнецов*, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1951.
7. *М. В. Масленников*, Труды МИАН СССР, вып., 97, (в печати).
8. *Т. А. Гермогенова*, ДАН СССР, 115, 23, 1957.
9. *K. M. Case, F. de Hoffmann, G. Praszek*, Introduction to the theory of neutron diffusion, v. I, Los Alamos, June, 1953.
10. *В. А. Амбарцумян*, Бюлл. Ереванск. астрон. обс. № 6 3, 1945.
11. *Т. А. Гермогенова*, Журн. ВМ и МФ, 1, 1002, 1961,
12. *Т. А. Гермогенова*, сб. „Некоторые математические задачи нейтронной физики", М., 1960, 80.