АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2

СЕНТЯБРЬ, 1966

ВЫПУСК 3

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФфуЗИИ ФОТОНОВ. II

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 25 апреля 1966

Получены формулы, определяющие среднее число рассеяний фотона в трехмерной полубесконечной среде. Числа рассеяний фотонов, гибнущих в среде, и фотонов, выходящих из среды наружу, выражаются через производные функций $\Phi(\tau)$ и $\varphi(\eta)$ по параметру λ . Приведены формулы для определения этих производных.

В нашей предыдущей статье [1] были получены основные формулы для среднего числа рассеяний фотона и сделано их применение к одномерной среде. В настоящей статье эти формулы применяются к трехмерной полубесконечной среде. При этом, как и раньше, предполагается, что элементарный объем рассеивает излучение изотропно и частота излучения в ходе диффузии не меняется. Вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния λ считается постоянной во всей среде.

Сначала мы определяем средние числа рассеяний фотона, поглощенного в данном месте среды. Затем находятся средние числа рассеяний фотона при освещении среды внешними источниками излучения. В конце статьи обсуждается вопрос об определении производных некоторых функций по параметру λ . Эти производные нужны для нахождения средних чисел рассеяний фотонов, выходящих из среды наружу, и фотонов, испытывающих истинное поглощение в среде.

Необходимые для нас формулы, определяющие вероятность выхода фотона из среды, берутся из книги автора [2] без дальнейших ссылок на нее.

Полубесконечная среда. Напишем полученные ранее [1] основные формулы для случая трехмерной полубесконечной среды. Обозначим через $P(\tau)$ полную вероятность того, что фотон, поглощенный на оп-

тической глубине τ , после диффузии в среде выйдет из нее (во всех направлениях). Тогда среднее число рассеяний, испытываемых фотоном, будет равно

$$Q(\tau) = \frac{1 - P(\tau)}{1 - \lambda}. \quad (1)$$

Часть фотонов из числа поглощенных на оптической глубине τ выходит из среды наружу, а часть гибнет в среде вследствие истинного поглощения. Среднее число рассеяний, испытываемых теми и другими фотонами, соответственно равно

$$Q_1(\tau) = \lambda \frac{\partial \ln P(\tau)}{\partial \lambda}, \quad (2)$$

$$Q_2(\tau) = \frac{1}{1 - \lambda} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln [1 - P(\tau)]. \quad (3)$$

Для нахождения полной вероятности выхода фотона из среды обратимся к уравнению, определяющему выход фотона из среды в заданном направлении. Обозначим через $p(\tau, \eta) d\omega$ вероятность того, что фотон, поглощенный на оптической глубине τ , выйдет из среды под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Функция $p(\tau, \eta)$ определяется уравнением

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1 |\tau - t| p(t, \eta) dt + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}, \quad (4)$$

а так как полная вероятность выхода фотона из среды равна:

$$P(\tau) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) d\eta, \quad (5)$$

то для ее нахождения получаем уравнение

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1 |\tau - t| P(t) dt + \frac{\lambda}{2} E_2 \tau. \quad (6)$$

В уравнениях (4) и (6) использовано обозначение

$$E_k \tau = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \eta^{k-2} d\eta. \quad (7)$$

Пусть $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента уравнения (6). Тогда

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2} E_2 \tau + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') E_2 \tau' d\tau'. \quad (8)$$

Но резольвента уравнения (6) в действительности выражается через функцию $\Phi(\tau) = \Gamma(\tau, 0)$. Эта функция играет фундаментальную роль в теории рассеяния света, и поэтому мы сейчас выразим через нее и функцию $P(\tau)$.

Предварительно заметим, что функции $\Gamma(\tau, \tau')$ и $\Phi(\tau)$ связаны между собой соотношением

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau'), \quad (9)$$

а функция $\Phi(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1 |\tau - t| \Phi(t) dt + \frac{\lambda}{2} E_1 \tau. \quad (10)$$

Дифференцируя (8) по τ и пользуясь (9) и (10), получаем

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = -[1 - P(0)] \Phi(\tau). \quad (11)$$

Для нахождения $P(0)$ положим $\tau = 0$ в формуле (5). Так как

$$P(0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta), \quad (12)$$

где $\varphi(\eta)$ — функция Амбарцумяна, а

$$\int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}), \quad (13)$$

то мы имеем

$$P(0) = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (14)$$

Поэтому из (11) следует

$$P(\tau) = 1 - \Psi(\tau) \sqrt{1 - \lambda}, \quad (15)$$

где

$$\Psi(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Выражение (15) для величины $P(\tau)$ является искомым. Подставляя его в формулы (1), (2) и (3) получаем

$$Q(\tau) = \frac{\Psi(\tau)}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (17)$$

$$Q_1(\tau) = \frac{\lambda}{1 - \Psi(\tau)\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{\Psi(\tau)}{2\sqrt{1-\lambda}} - \sqrt{1-\lambda} \frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \lambda} \right], \quad (18)$$

$$Q_2(\tau) = \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)} + \lambda \frac{\partial \ln \Psi}{\partial \lambda}. \quad (19)$$

Формулы (17), (18) и (19) и определяют средние числа рассеяний фотонов, поглощенных на любой оптической глубине τ .

В виде примера применим полученные формулы к случаю, когда фотон поглощается на границе среды (то есть при $\tau=0$). Так как $\Psi(0) = 1$, то мы имеем

$$Q(0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (20)$$

$$Q_1(0) = \frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}} + \frac{1}{2}, \quad (21)$$

$$Q_2(0) = \frac{2-\lambda}{2(1-\lambda)}. \quad (22)$$

Следует отметить, что эти значения величин $Q(0)$, $Q_1(0)$ и $Q_2(0)$ совпадают с значениями тех же величин для одномерной полубесконечной среды.

Мы можем также легко определить среднее число рассеяний фотонов, поглощенных на большой оптической глубине. Пользуясь асимптотической формулой для функции $p(\tau, \eta)$, получаем следующую асимптотическую формулу для величины $P(\tau)$:

$$P(\tau) = \frac{\int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \eta d\eta}{1 - k\eta}}{\int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \eta d\eta}{(1 - k\eta)^2}} e^{-k\tau}, \quad (23)$$

где k определяется из уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (1) и (3), мы видим, что если $\lambda < 1$ и τ достаточно велико, то

$$Q(\tau) \approx Q_2(\tau) \approx \frac{1}{1-\lambda}, \quad (25)$$

то есть величина $Q(\tau)$ обусловлена в основном истинным поглощением фотонов в среде.

Подстановка (23) в (2) при достаточно больших τ дает

$$Q_1(\tau) \approx -\lambda\tau \frac{dk}{d\lambda}, \quad (26)$$

или, при использовании (24),

$$Q_1(\tau) \approx \tau \frac{k(1-k^2)}{k^2 + \lambda - 1}. \quad (27)$$

Следовательно, среднее число рассеяний фотонов, поглощенных на большой оптической глубине τ и выходящих из среды, пропорционально τ .

Если роль истинного поглощения в среде не велика, то есть $1 - \lambda \ll 1$, то $k^2 \approx 3(1 - \lambda)$ и вместо (27) имеем

$$Q_1(\tau) \approx \frac{\tau \sqrt{3}}{2\sqrt{1-\lambda}}. \quad (28)$$

Эта формула может быть получена из формулы (31) предыдущей статьи [1] заменой τ на $\tau\sqrt{3}$. Как известно, такую замену вообще следует делать для приближенного перехода от одномерной среды к трехмерной.

Внешние источники излучения. Пользуясь полученными выше результатами, можно легко найти среднее число рассеяний фотонов в полубесконечной среде при произвольных источниках излучения. Пусть $f(\tau)d\tau$ — число фотонов, приходящих непосредственно от источников излучения и поглощаемых между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$. Тогда доля фотонов, выходящих из среды, будет равна

$$P^* = \frac{\int_0^{\infty} P(\tau) f(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}. \quad (29)$$

В данном случае числа рассеяний фотонов (обозначаемые нами через Q^* , Q_1^* и Q_2^*) даются формулами (1), (2) и (3), в которых вместо $P(\tau)$ надо писать P^* .

Например, для определения величины Q^* мы имеем очевидную формулу

$$Q^* = \frac{\int_0^{\infty} Q(\tau) f(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau}. \quad (30)$$

Подставляя в нее выражение (1) для величины $Q(\tau)$ и пользуясь обозначением (29), получаем формулу

$$Q^* = \frac{1 - P^*}{1 - \lambda}, \quad (31)$$

аналогичную формуле (1).

Допустим, что источники излучения находятся вне среды и фотоны падают на границу среды под углом $\arcs \cos \zeta$ к нормали. Тогда доля фотонов, выходящих из среды, будет равна

$$P^* = \int_0^{\infty} P(\tau) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\tau}{\zeta}. \quad (32)$$

Производя здесь интегрирование по частям и пользуясь формулами (11) и (14), находим

$$P^* = 1 - \left(1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} d\tau \right) \sqrt{1 - \lambda}. \quad (33)$$

Но

$$1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} d\tau = \varphi(\zeta). \quad (34)$$

Поэтому

$$P^* = 1 - \varphi(\zeta) \sqrt{1 - \lambda}. \quad (35)$$

Подстановка (35) в (31) дает

$$Q^* = \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{1 - \lambda}}. \quad (36)$$

Этой формулой и определяется среднее число рассеяний фотона, входящего в полубесконечную среду под углом $\arcs \cos \zeta$ к нормали.

Аналогично можно отдельно найти средние числа рассеяний для тех из вошедших в среду фотонов, которые выходят из нее и которые гибнут в ней. Для этого надо, как уже сказано выше, воспользоваться формулами (2) и (3), заменив в них $Q_1(\tau)$ на Q_1^* , $Q_2(\tau)$ на Q_2^* и $P(\tau)$ на P^* . Делая это и применяя формулу (35), получаем

$$Q_1^* = \frac{\lambda}{1 - \varphi(\zeta) \sqrt{1 - \lambda}} \left[\frac{\varphi(\zeta)}{2 \sqrt{1 - \lambda}} - \sqrt{1 - \lambda} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \lambda} \right], \quad (37)$$

$$Q_2^* = \frac{2 - \lambda}{2(1 - \lambda)} + \lambda \frac{\partial \ln \varphi(\zeta)}{\partial \lambda}. \quad (38)$$

При $\zeta = 0$ три последние формулы, как и следовало ожидать, дают такие же средние числа рассеяний фотонов, как и формулы (20) (21) и (22).

Для фотонов, входящих в среду извне и выходящих из нее (то есть для диффузно-отраженных фотонов) можно найти также среднее число рассеяний в зависимости от углов падения и отражения. Для определения этого числа допустим, что среда освещена параллельными лучами, падающими под углом $\arcs \cos \zeta$ к нормали и создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную I_0 . Тогда, как известно (см. [3], стр. 206), интенсивность излучения, выходящего из среды под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали, дается формулой

$$I(\eta, \zeta) = \frac{\lambda I_0}{4\pi} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (39)$$

Среднее число рассеяний для диффузно-отраженных фотонов в зависимости от η и ζ может быть найдено по формуле, предложенной В. А. Амбарцумяном (см. [3], стр. 282):

$$Q_1^*(\eta, \zeta) = \lambda \frac{\partial \ln I(\eta, \zeta)}{\partial \lambda}. \quad (40)$$

Подставляя (39) в (40), получаем

$$Q_1^*(\eta, \zeta) = 1 + \lambda \frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial \ln \varphi(\zeta)}{\partial \lambda}. \quad (41)$$

Если роль истинного поглощения в среде мала (то есть $1 - \lambda \ll 1$), то из известного асимптотического выражения для $\varphi(\eta)$ (или непосредственно из приведенной ниже формулы (59)) можно найти

$$\frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} \approx \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \lambda}}. \quad (42)$$

Повтому в данном случае имеем

$$Q_1^*(\eta, \zeta) \approx 1 + \frac{\eta + \zeta}{2} \sqrt{\frac{3}{1 - \lambda}}. \quad (43)$$

Отметим, что из формулы (41), в частности, следует

$$Q_1^*(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} [Q_1^*(\eta, \eta) + Q_1^*(\zeta, \zeta)] \quad (44)$$

и

$$Q_1^*(\eta, \zeta) = Q_1^*(\eta, 0) + Q_1^*(\zeta, 0) - 1. \quad (45)$$

Очевидно, что величина

$$Q_1^*(\eta, 0) = 1 + \lambda \frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} \quad (46)$$

представляет собой среднее число рассеяний фотона, поглощенного в поверхностном слое (при $\tau = 0$) и выходящего из среды под углом $\arcs \cos \eta$ к нормали. Формулой (46) определяется физический смысл логарифмической производной функции $\varphi(\eta)$ по λ .

Определение $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \lambda}$. Для нахождения средних чисел

рассеяний фотонов по полученным выше формулам необходимо знать функции $\Psi(\tau)$ и $\varphi(\eta)$, а также их производные по λ . В некоторых случаях эти функции и их производные известны. В частности, мы знаем $\Psi(\tau)$ и $\frac{\partial \Psi(\tau)}{\partial \lambda}$ при $\tau = 0$ и при больших τ . Нам известны также $\varphi(\eta)$

и $\frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \lambda}$ при $\eta = 0$ и при значениях λ , близких к 1. Эти случаи уже

были отмечены выше. Функция $\varphi(\eta)$ вообще хорошо изучена и табулирована. Функция $\Psi(\tau)$ в настоящее время табулируется. Однако производные этих функций по λ до сих пор не рассматривались, и мы сейчас дадим некоторые формулы для их определения.

Так как функция $\Psi(\tau)$ при помощи формулы (16) выражается через $\Phi(\tau)$, то мы будем искать $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$.

В работе И. Н. Минина [4] было получено следующее выражение для $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = C e^{-k\tau} + \int_0^1 R(\zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)}, \quad (47)$$

где

$$C = \frac{1}{\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\tau) \tau d\tau}{(1 - k\tau)^2}}, \quad (48)$$

$$R(\zeta) = \frac{2\lambda}{(\lambda\pi\zeta)^2 + \left(2 + \lambda\zeta \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2} \quad (49)$$

и k определяется из уравнения (24). Однако дифференцирование выражения (47) по λ встречает трудности, так как для этого надо знать $\frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \lambda}$. Поэтому попытаемся найти $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$ другим путем.

Дифференцируя (10) по λ , получаем

$$\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty E_1|\tau - t| \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \lambda} dt + \frac{1}{\lambda} \Phi(\tau). \quad (50)$$

Решения этого уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \Phi(\tau) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (51)$$

где $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента. А так как $\Gamma(\tau, \tau')$ выражается через $\Phi(\tau)$ при помощи уравнения (9), то, пользуясь (51) и (9), можно найти и выражение $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$ через $\Phi(\tau)$.

Однако для $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$ можно получить более простую формулу,

если воспользоваться резольвентой интегрального уравнения, описывающего диффузию излучения в бесконечной среде. Эта резольвента, которую мы обозначим через $\Phi_\infty(\tau)$, определяется уравнением

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty [E_1|\tau - t| + E_1(\tau + t)] \Phi_\infty(t) dt + \frac{\lambda}{2} E_1\tau. \quad (52)$$

Решение уравнения (52) было найдено (см., напр., [5]) в виде

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{k(1 - k^2)}{\lambda + k^2 - 1} e^{-k\tau} + \int_0^1 R(\zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} d\zeta, \quad (53)$$

где $R(\zeta)$ дается формулой (49), а k — уравнением (24).

Кейз [6], а затем В. В. Иванов [7] нашли следующую зависимость между функциями $\Gamma(\tau, \tau')$ и $\Phi_{\infty}(\tau)$:

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi_{\infty}(|\tau - \tau'|) - \int_0^{\infty} \Phi(\tau + t) \Phi(\tau' + t) dt. \quad (54)$$

Подставляя (54) в (51), после небольших преобразований получаем

$$\lambda \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda} = \Phi_{\infty}(\tau) + \int_0^{\tau} \Phi_{\infty}(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau'. \quad (55)$$

Эта формула и может служить для определения искомой функции $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$.

Для нахождения же функции $\frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \lambda}$ могут быть применены следующие способы.

1) Возьмем уравнение, полученное В. А. Амбарцумяном для функции $\varphi(\eta)$:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} d\zeta. \quad (56)$$

Дифференцируя (56) по λ , находим

$$\lambda \frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} = \varphi(\eta) - 1 + \frac{\lambda^2}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \lambda} \frac{d\zeta}{\eta + \zeta}. \quad (57)$$

Уравнение (57) для $\frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \lambda}$ легко может быть решено численно, так решается и уравнение (56) для $\varphi(\eta)$.

2) В. А. Фок [8] получил для $\varphi(\eta)$ выражение в явном виде:

$$\ln \varphi(\eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left(1 - \lambda \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} u}{u} \right) \frac{\eta du}{1 + \eta^2 u^2}. \quad (58)$$

Дифференцирование (58) по λ дает

$$\frac{\partial \ln \varphi(\tau)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta du}{\left(\frac{u}{\operatorname{arctg} u} - \lambda\right) (1 + \eta^2 u^2)} \quad (59)$$

3) Умножим обе части соотношения (55) на $e^{-\frac{\tau}{\eta}}$ и проинтегрируем по τ от 0 до ∞ . Учитывая (34), получаем

$$\lambda \frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} = \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau) e^{-\frac{\tau}{\eta}} d\tau. \quad (60)$$

Подставляя в (60) выражение (53), имеем*

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \ln \varphi(\eta)}{\partial \lambda} &= \frac{k(1-k^2)}{\lambda+k^2-1} \frac{\eta}{1+k\eta} + \\ &+ 2\lambda \int_0^1 \frac{\eta \zeta}{(\lambda \pi \zeta)^2 + \left(2 + \lambda \zeta \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2} \frac{d\zeta}{\eta + \zeta}. \end{aligned} \quad (61)$$

Полученные формулы для функций $\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial \lambda}$ могут быть использованы не только для определения среднего числа рассеяний фотонов, но и для решения других задач. Одна из таких задач (совершенно не изученная) состоит в отыскании возможных связей между величинами, характеризующими поле излучения в средах с разными значениями λ .

Ленинградский государственный университет

NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. II

V. V. SOBOLEV

Formulae for the mean number of scatterings of a photon diffusing in three-dimensional semi-infinite medium are found. Numbers of scatterings of photons absorbed in the medium and escaping from it are expressed in terms of derivatives of $\Phi(\tau)$ and $\varphi(\eta)$ with respect of parameter λ . Formulae that can be used to find these derivatives are presented.

* Формула (61) была также получена В. В. Ивановым в неопубликованной работе другим способом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *В. В. Соболев*, *Астрофизика*, 2, 135, 1966.
2. *В. В. Соболев*, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, 1956.
3. *В. А. Амбарцумян*, *Научные труды*, т. 1, АН Арм ССР, Ереван, 1960.
4. *И. Н. Минин*, *ДАН СССР*, 120, 63, 1958.
5. *В. В. Соболев*, *ДАН СССР*, 129, 1265, 1959.
6. *К. М. Сазе*, *App. Phys. U. S. A.*, 2, 384, 1957.
7. *В. В. Иванов*, *Астрон. ж.*, 41, 44, 1964.
8. *В. А. Фок.*, *Матем. сб.*, 14 (56), № 1 — 2, 1944.