АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 ИЮНЬ, 1966 ВЫПУСК 2

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФФУЗИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 22 марта 1966

Рассматривается нестационарная задача диффузного отражения света от неоднородного плоско-параллельного слоя. В общем случае решение задачи сводится к решению нелинейного интегрального уравнения (20) и обращению двух преобразований Лапласа.

Нестационарная задача диффузного отражения излучения от плоско-параллельного слоя в некоторых частных случаях рассмотрена И. Н. Мининым [4—5]. В настоящей статье эта задача рассматривается в случае слоя конечной оптической толщины, когда 1) кванты затрачивают время как на прохождение пути, так и на пребывание в поглощенном состоянии, 2) вероятность выживания может меняться с глубиной. Оказывается, что и в данном случае решение задачи сводится к решению некоторой стационарной задачи и обращению преобразования Лапласа. Одномерный аналог этой задачи, при более общих предположениях неоднородности, был рассмотрен автором в [6].

1. *Распределение во времени диффузного отражения кванта.* Пусть на плоско-параллельный слой оптической толщины τ_0 в момент $t=0$ падает один квант. Обозначим через ζ косинус угла падения, через $\rho_1(\tau_0, t, \eta, \zeta)$ — плотность вероятности диффузного отражения кванта в момент t под углом $\arccos\eta$. Делаются следующие предположения:

а) поглощенный квант спонтанно излучается по экспоненциальному закону $\alpha(\tau)e^{-\beta t}$, где $\dfrac{\alpha(\tau)}{\beta}=\lambda(\tau)\leqslant 1$; $\lambda(\tau)$ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния на оптической глубине τ (рассчитанной от правой границы среды);

б) атомы равномерно распределены в среде: $dt = \frac{ds}{v}$, v — скорость кванта в единицах оптической длины;

в) индикатриса рассеяния сферическая.

Для функции

$$\rho(\tau_0, t, \eta, \zeta) = \frac{\pi}{\zeta}\rho_1(\tau_0, t, \eta, \zeta),$$

на основе принципа инвариантности получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\right) = \frac{\alpha(\tau_0)}{4\eta\zeta}e^{-\beta t} + \\ + \frac{\alpha(\tau_0)}{2\zeta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t \rho(\tau_0, x, \eta, \eta')\, e^{-\beta(t-x)}dx + \\ + \frac{\alpha(\tau_0)}{2\eta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t \rho(\tau_0, x, \eta', \zeta)\, e^{-\beta(t-x)}dx + \\ + \alpha(\tau_0)\int_0^1 d\eta'' \int_0^t \rho(\tau_0, x, \eta, \eta'')\,dx \int_0^1 d\eta' \int_0^{t-x} \rho(\tau_0, y, \eta', \zeta)\, e^{-\beta(t-x-y)}dy;\end{aligned} \quad (1)$$

Легко убедиться, что

$$\rho(0, t, \eta, \zeta) = 0 \quad \text{и} \quad \rho(\tau_0, 0, \eta, \zeta) = 0; \quad (2)$$

Умножим обе части уравнения (1) на $e^{\beta t}$, обозначим

$$Q(\tau_0, t, \eta, \zeta) = \rho(\tau_0, t, \eta, \zeta)\, e^{\beta t}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial\tau_0} + \left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{1}{v}\frac{\partial Q}{\partial t}+\left(1-\frac{\beta}{v}\right)Q\right] = \\ = \frac{\alpha}{4\eta\zeta} + \frac{\alpha}{2\zeta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t Q(\tau_0, x, \eta, \eta')\,dx + \frac{\alpha}{2\eta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t Q(\tau_0, x, \eta', \zeta)\,dx + \\ + \alpha\int_0^1 d\eta'' \int_0^t Q(\tau_0, x, \eta, \eta'')\,dx \int_0^1 d\eta' \int_0^{t-x} Q(\tau_0, y, \eta', \zeta)\,dy.\end{aligned} \quad (4)$$

Обозначив далее

$$R(\tau_0, t, \eta, \zeta) = \int_0^t Q(\tau_0, x, \eta, \zeta)\, dx, \tag{5}$$

получим для этой функции уравнение:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\tau_0 \partial t} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{1}{v}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{\beta}{v}\right)\frac{\partial R}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{4\eta\zeta} + \frac{\alpha}{2\zeta}\int_0^1 R(\tau_0, t, \eta, \eta')\, d\eta' + \frac{\alpha}{2\eta}\int_0^1 R(\tau_0, t, \eta', \zeta)\, d\eta' + \tag{6}$$

$$+ \alpha\int_0^t \left[\int_0^1 R'_t(\tau_0, x, \eta, \eta'')\, d\eta''\right]\left[\int_0^1 R(\tau_0, t - x, \eta', \zeta)\, d\eta'\right] dx;$$

К уравнению (6) применим преобразование Лапласа, введем функцию

$$\Omega(\tau_0, s, \eta, \zeta) = \int_0^\infty R(\tau_0, t, \eta, \zeta)\, e^{-st}\, dt. \tag{7}$$

Легко убедиться, что

$$L_t[\rho] = (s + \beta)\, \Omega(\tau_0, s + \beta, \eta, \zeta); \tag{8}$$

где L_t — оператор преобразования Лапласа по t.

Заметив, что $R(\tau_0, 0, \eta, \zeta) = 0$ из (5) и $R'_t(\tau_0, 0, \eta, \zeta) = \rho(\tau_0, 0, \eta, \zeta) = 0$, получим:

$$s\frac{\partial\Omega}{\partial\tau_0} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)\left[\frac{s^2}{v}\Omega + s\left(1 - \frac{\beta}{v}\right)\Omega\right] = \frac{\alpha}{s\cdot 4\eta\zeta} +$$

$$+ \frac{\alpha}{2\zeta}\int_0^1 \Omega(\tau_0, s, \eta, \eta')\, d\eta' + \frac{\alpha}{2\eta}\int_0^1 \Omega(\tau_0, s, \eta', \zeta)\, d\eta' + \tag{9}$$

$$+ \alpha s\int_0^1 \Omega(\tau_0, s, \eta, \eta'')\, d\eta'' \int_0^1 \Omega(\tau_0, s, \eta', \zeta)\, d\eta';$$

или

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau_0}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{s}\right) A(s)\, \Omega=$$

$$=\alpha\left[\frac{1}{2 \eta s}+\int_0^1 \Omega\left(\tau_0, s, \eta, \eta'\right) d \eta'\right]\left[\frac{1}{2 \zeta s}+\int_0^1 \Omega\left(\tau_0, s, \eta', \zeta\right) d \eta'\right], \tag{10}$$

где

$$A(s)=\frac{s}{v}+\left(1-\frac{\beta}{v}\right). \tag{11}$$

Умножим обе части уравнения (10) на

$$\exp \left\{\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right) A(s)\, \tau_0\right\},$$

введем функцию

$$U\left(\tau_0, s, \eta, \zeta\right)=\Omega\left(\tau_0, s, \eta, \zeta\right) \exp \left\{\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right) A(s)\, \tau_0\right\}. \tag{12}$$

Уравнение (10) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau_0}=\alpha\left[\frac{1}{2 \eta s} e^{\frac{A(s) \tau_0}{\eta}}+\int_0^1 U\left(\tau_0, s, \eta, \eta'\right) e^{-\frac{A(s) \tau_0}{\eta'}} d \eta'\right] \times$$
$$\times\left[\frac{1}{2 \zeta s} e^{\frac{A(s) \tau_0}{\zeta}}+\int_0^1 U\left(\tau_0, s, \eta', \zeta\right) e^{-\frac{A(s) \tau_0}{\eta'}} d \eta'\right]. \tag{13}$$

В силу единственности решения уравнения (13) имеем

$$U\left(\tau_0, s, \eta, \zeta\right)=U\left(\tau_0, s, \zeta, \eta\right). \tag{14}$$

Обозначим

$$\varphi\left(\tau_0, s, \eta\right)=\frac{1}{2 \eta s} e^{\frac{A(s) \tau_0}{\eta}}+\int_0^1 U\left(\tau_0, s, \eta, \eta'\right) e^{-\frac{A(s) \tau_0}{\eta'}} d \eta'. \tag{15}$$

Из уравнения (13), учитывая (14), будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial \tau_0}=\alpha\left(\tau_0\right) \varphi\left(\tau_0, s, \eta\right) \varphi\left(\tau_0, s, \zeta\right), \tag{16}$$

откуда

$$U(\tau_0, s, \eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau)\, \varphi(\tau, s, \eta)\, \varphi(\tau, s, \zeta)\, d\tau, \tag{17}$$

ибо

$$U(0, s, \eta, \zeta) = 0.$$

Подставляя (16) в (14), изменив порядок интегрирования, получим

$$\varphi(\tau_0, s, \eta) = \frac{1}{2\eta s} e^{-\frac{A(s)\tau_0}{\eta}} + \int_0^1 \alpha(\tau)\, \varphi(\tau, s, \eta) \left[\int_0^1 \varphi(\tau, s, \eta') e^{-\frac{A(s)\tau_0}{\eta'}} d\eta' \right] d\tau; \tag{18}$$

Умножим обе части уравнения (17) на $e^{-\frac{A(s)z}{\eta}}$, где $z > \tau_0$ — некоторый параметр и проинтегрируем по η от 0 до 1, обозначив

$$\psi(\tau, z, s) = \int_0^1 \varphi(\tau, s, \eta)\, e^{-\frac{A(s)z}{\eta}} d\eta. \tag{19}$$

Получим

$$\psi(\tau_0, z, s) = \frac{1}{2s} E_i[A(s)(z - \tau_0)] + \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau)\, \psi(\tau, z, s)\, \psi(\tau, \tau_0, s)\, d\tau. \tag{20}$$

Полученное нелинейное интегральное уравнение, подобное уравнениям типа Вольтерра, можно решать последовательными приближениями, за первое приближение можно взять свободный член. Займемся вопросом представления функции φ через функцию ψ, то есть решением уравнения (19) относительно φ. В интеграле правой части (19) производим замену переменной; обозначив $\frac{A(s)}{\eta} = p$, будем иметь

$$\psi(\tau_0, z, s) = \int_{A(s)}^{\infty} \varphi_1(\tau_0, s, p)\, e^{-zp}\, dp, \tag{21}$$

где

$$\varphi_1(\tau_0, s, p) = \varphi\left(\tau_0\ s, \frac{A(s)}{p}\right) \frac{A(s)}{p^2}. \tag{22}$$

Функция ψ представляет собой неполное преобразование Лапласа от функции φ_1, следовательно

$$L_z^{-1}[\psi(\tau_0, z, s)] = \begin{cases} \varphi_1(\tau_0, s, p) & p \geqslant A(s) \\ 0 & 0 \leqslant p < A(s), \end{cases} \tag{23}$$

а из (22)

$$\varphi(\tau_0, s, \eta) = \varphi_1\left(\tau_0, s, \frac{A(s)}{\eta}\right)\frac{A(s)}{\eta^2}.$$

Подставляя выражение $\varphi(\tau_0, s, \eta)$ в (17), получим функцию

$$U(\tau_0, s, \eta, \zeta).$$

Из (8), (13) и (17) будем иметь

$$\rho(\tau_0, t, \eta, \zeta) = L_s^{-1}\left\{\left[(s+\beta)\int_0^{\tau_0} \alpha(\tau)\varphi(\tau, s+\beta, \eta)\varphi(\tau, s+\beta, \zeta)\,d\tau\right]\times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\zeta}\right)A(s+\beta)\tau_0\right]\right\}. \tag{24}$$

Таким образом, в общем случае определение функции $\rho(\tau_0, t, \eta, \zeta)$ сводится к решению уравнения (19) и обращению двух преобразований Лапласа. Отметим, что уравнение, соответствующее уравнению (18) в стационарном случае получено В. В. Соболевым в [3]. В случае однородной среды бесконечной оптической толщины $[\alpha(\tau) = \alpha = \text{const}]$ уравнение (10) примет следующий вид

$$(\eta+\zeta)A(s)\Omega = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{1}{s}+2\eta\int_0^1 \Omega(s, \eta, \eta')\,d\eta'\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{s}+2\zeta\int_0^1 \Omega(s, \eta', \zeta)\,d\eta'\right]. \tag{25}$$

Обозначив

$$\varphi(s, \eta) = 1+2\eta s\int_0^1 \Omega(s, \eta, \eta')\,d\eta', \tag{26}$$

получим для этой функции известное уравнение В. А. Амбарцумяна с вероятностью выживания, зависящей от параметра s

$$\varphi(s, \eta) = 1 + \frac{\lambda_1(s)}{2} \eta \varphi(s, \eta) \int_0^1 \frac{\varphi(s, \eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \tag{27}$$

где

$$\lambda_1(s) = \frac{\alpha}{s A(s)},$$

$$\Omega(s, \eta, \zeta) = \frac{\lambda_1(s)}{4s} \frac{\varphi(s, \eta) \varphi(s, \zeta)}{\eta + \zeta}. \tag{28}$$

Используя уравнение (8), получим

$$L[\rho] = \frac{\lambda_1(s+\beta)}{4} \frac{\varphi(s+\beta, \eta) \varphi(s+\beta, \zeta)}{\eta + \zeta}. \tag{29}$$

В случае однородной среды конечной оптической толщины можно использовать решение соответствующей стационарной задачи.

С целью последующего обращения преобразования Лапласа будем искать решения уравнения (20) в виде ряда Лорана по s. Тогда для определения коэффициентов получается рекуррентное соотношение. Для простоты проиллюстрируем сказанное в случае $v = \infty$.

$$\psi(\tau_0, z, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(\tau_0, z)}{s^k}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (20), относительно коэффициентов ψ_k получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\psi_k(\tau_0, z) = \sum_{m=1}^{k-1} \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau) \psi_m(\tau, z) \psi_{k-m}(\tau, \tau_0) d\tau, \tag{31}$$

$$\psi_1(\tau_0, z) = \frac{1}{2} E_i(z - \tau_0).$$

Решение уравнения (19) (в случае $A(s) = 1$) также можно искать в виде ряда Лорана по s

$$\varphi(\tau, s, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\tau, \eta)}{s^k}, \tag{32}$$

$$\psi_k(\tau, z) = \int_0^1 \varphi_k(\tau, \eta) e^{-\frac{z}{\eta}} d\eta, \tag{33}$$

откуда

$$\varphi_k(\tau, \eta) = \frac{1}{\eta^2} L_z^{-1} [\psi_k(\tau_0, z)]\Big|_{p=\frac{1}{\eta}}.$$

Из (17) находим соответствующее разложение для функции

$$U(\tau_0, s, \eta, \zeta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{U_k(\tau_0, \eta, \zeta)}{s^k}, \tag{34}$$

$$U_k(\tau_0, \eta, \zeta) = \sum_{m=1}^{k-1} \int_0^{\tau_0} \alpha(\tau) \varphi_m(\tau, \eta) \varphi_{k-m}(\tau, \zeta) \, d\tau, \tag{35}$$

и

$$R(\tau_0, t, \eta, \zeta) = \exp\left\{\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)\tau_0\right\} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{U_k(\tau_0, \eta, \zeta)}{k!} t^k. \tag{36}$$

Аналогично можно поступить в случае однородного полубесконечного слоя.

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики
АН Арм ССР

NON-STATIONARY DIFFUSION OF RADIATION IN PLANE-PARALLEL LAYER

N. B. YENGIBARIAN

A non-stationary problem of diffuse reflection of radiation from inhomogeneous plane-parallel layer is considered.

In the general case the solution of the problem is brought to the solution of a non-linear integral equation (20) and the reversion of two Laplace's transformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, АН АрмССР, Ереван, 1960.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956.
3. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 111, 1000, 1956.
4. *И. Н. Минин*, Вестн.. ЛГУ, № 18, 1962.
5. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 154, № 5, 1964.
6. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 167, 1965.