

ПЕРЕНОС РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ. II.

В. В. ИВАНОВ, Д. И. НАГИРЧЕР

Поступила 29 декабря 1965

Исследуется функция источников $S_p(\tau, \lambda)$ в бесконечной однородной среде с точечным источником излучения. Считается, что при рассеянии происходит полное перераспределение по частотам. Явное выражение для $S_p(\tau, \lambda)$ было получено в предыдущей статье [1]. Изучается поведение $S_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \ll 1$ и $\tau \gg 1$, где τ — оптическое расстояние от источника. Рассмотрено три вида коэффициента поглощения — доплеровский, фойгтовский и лоренцовский. Особое внимание уделяется почти консервативному рассеянию ($1 - \lambda \ll 1$). Дается физическая интерпретация результатов. Обсуждается влияние перераспределения по частотам на пространственное распределение возбужденных атомов.

Настоящая статья посвящена исследованию пространственного распределения возбужденных атомов в бесконечной однородной среде, содержащей точечный источник излучения. Считается, что источник излучает кванты в частотах спектральной линии, которые затем изотропно рассеиваются атомами среды. Предполагается, что между частотами кванта до и после рассеяния никакой корреляции нет (приближение полного перераспределения по частоте). Строгое решение этой задачи для двухуровневого атома получено в первой статье [1]. Здесь это решение подробно анализируется. Дается также физическая интерпретация результатов.

Многие из приводимых ниже формул являются непосредственными аналогами (а в ряде случаев — прямыми обобщениями) соотношений, полученных в теории диффузии моноэнергетических нейтронов [2].

Объяснение всех обозначений дано в первой части работы. Ссылки вида (1.2.17) означают формулу (2.17) из статьи [1].

1. *Поле излучения вблизи источника.* Рассмотрим в первую очередь, как ведет себя функция источников $S_p(\tau, \lambda)$ при малых τ , то есть в непосредственной окрестности источника.

Перепишем (I.3.13) в виде

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \left(\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z^2} \right) \quad (1.1)$$

и изучим поведение входящих сюда интегралов при $\tau \ll 1$. Дифференцируя (I.2.17), находим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z^2} = \frac{a_1}{\tau} - a_2 + O(\tau). \quad (1.2)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz &= \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz + \\ &+ \int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) G(z) dz + \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) G(z) dz. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При $\tau \ll 1$ для третьего слагаемого в правой части имеем оценку

$$\int_1^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) G(z) dz = O(\tau). \quad (1.4)$$

Обращаясь ко второму слагаемому, замечаем, что при $z < 1$, как это следует из (I.3.12), (I.2.9) и (I.2.27),

$$\frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} = \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) + O(z^2), \quad (1.5)$$

так что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) G(z) dz = \\ & = G(0) \int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) dz = \\ & = a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) (E_2(\tau) - 1) + O(\tau), \end{aligned} \quad (1.6)$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} \left(e^{-\frac{\tau}{z}} - 1 \right) G(z) dz = \\ & = a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau \ln \tau + O(\tau). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поэтому вместо (1.3) при $\tau \ll 1$ можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz &= \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz + \\ &+ a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau \ln \tau + O(\tau). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Объединяя этот результат с (1.2), для функции источников $S_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \ll 1$ находим

$$\begin{aligned} S_p(\tau, \lambda) &= \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \left\{ a_1 + \left[\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz - a_2 \right] \tau + \right. \\ &\left. + a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau^2 \ln \tau \right\} + O(1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Входящий в эту формулу интеграл просто выражается через постоянную a_1 . Исследуя поведение функции источников при $\tau \ll 1$, мы могли бы исходить из представления решения в форме (1.3.6). Подстановка $y = \tau u$ дала бы тогда

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \lambda V\left(\frac{y}{\tau}\right)} - 1 \right) \frac{y \sin y}{\tau} dy. \quad (1.10)$$

При $u > 1$ с помощью (I.2.26) получаем

$$\frac{1}{1 - \lambda V(u)} - 1 = \frac{\lambda \pi}{2} a_1 \frac{1}{u} - \lambda \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\pi} a_2 - \lambda \frac{\pi}{2} a_1^2 \right) \frac{1}{u^2} + \dots \quad (1.11)$$

Из (1.11) и (1.10) находим, что при $\tau \ll 1$

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4 \pi \tau^2} \left[a_1 + \left(\lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 - a_2 \right) \tau + O(\tau^2 \ln \tau) \right]. \quad (1.12)$$

Сравнивая (1.12) с (1.9), получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz = \lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2, \quad (1.13)$$

и вместо (1.9) имеем окончательно

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4 \pi \tau^2} \left[a_1 + \left(\lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 - a_2 \right) \tau + \right. \\ \left. + a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau^2 \ln \tau \right] + O(1), \quad (\tau \ll 1). \quad (1.14)$$

Отметим, что коэффициент при первом члене зависит от λ линейно, второй член содержит λ^2 , третий — уже λ^3 . Это означает, что чем дальше от источника находится элемент объема, тем большее в среднем число рассеяний совершают те кванты, которые вызывают возбуждение атомов в этом объеме. Такого результата можно было ожидать и из физических соображений.

2. Поле излучения вдали от источника (доплеровский коэффициент поглощения). Упрощения в решении в противоположном предельном случае — на больших расстояниях от источника — определяются поведением коэффициента поглощения в крыле линии. Исследовать их в общем виде, для произвольного $\alpha(x)$, было бы трудно. В этом разделе будет рассмотрен случай доплеровского коэффициента поглощения. Результаты аналогичного исследования для лоренцовского и фойгтовского профилей даются в следующем разделе.

При $\tau \gg 1$ основной вклад в интеграл (I.3.13) вносят значения подынтегральной функции при больших z . Поэтому, согласно (I.2.43), при доплеровском коэффициенте поглощения $R(z, \lambda)$ в (I.3.13) можно заменить на

$$\left[(1 - \lambda)^2 + \left(\lambda \frac{\pi}{2} z G_D(z) \right)^2 \right]^{-1}, \quad (2.1)$$

подставив вместо $G_D(z)$ главный член асимптотического разложения этой функции при $z \gg 1$, то есть [см. формулу (1.2.35)]

$$G_D(z) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi} z^2 \sqrt{\ln z}}. \quad (2.2)$$

Присизводя указанные замены, находим, что

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{z}}}{(1-\lambda)^2 + \left(\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4z\sqrt{\ln z}}\right)^2} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{\pi}z^2\sqrt{\ln z}}. \quad (2.3)$$

С той же точностью, с которой мы совершили переход от (1.3.13) к (2.3), после подстановки $y = \frac{\tau}{z}$ формула (2.3) превращается в следующую:

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau^2\sqrt{\ln \tau}(1-\lambda)^2} F_p^D(t), \quad (\tau \gg 1) \quad (2.4)$$

где

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}}{t^2 + y^2} dy, \quad (2.5)$$

$$t_D = \frac{4\tau\sqrt{\ln \tau}(1-\lambda)}{\lambda\sqrt{\pi}}. \quad (2.6)$$

Формулы (2.4) — (2.6) и дают искомое асимптотическое представление $S_p^D(\tau, \lambda)$ при больших τ . Главное упрощение состоит в том, что величина $\tau^4 \sqrt{\ln \tau} \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} S_p^D(\tau, \lambda)$, зависящая от двух переменных — τ и λ — в асимптотической области превращается в функцию одной переменной t_D , просто выражающейся через τ и λ . Как известно [2], аналогичные упрощения при $\tau \gg 1$ существуют и в монохроматическом случае.

Для полного определения функции источников при $\tau \gg 1$ осталось найти значения $F_p^D(t)$. Это большого труда не составляет, так как $F_p^D(t)$ выражается через известные функции [3]:

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} (ci t \cdot \sin t - si t \cdot \cos t), \quad (2.7)$$

где $si t$ и $ci t$ — интегральные синус и косинус:

$$\operatorname{si} t = - \int_t^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \operatorname{ci} t = - \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx. \quad (2.8)$$

Из (2.7) можно получить разложение $F_p^D(t)$ в ряд, быстро сходящийся при малых t . Несколько первых членов этого ряда таковы:

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} \left[1 - \frac{\pi}{2} t - t^2 \ln t + (1 - \gamma) t^2 - \frac{\pi}{4} t^3 + \frac{t^4 \ln t}{6} + O(t^4) \right], \quad (2.9)$$

где $\gamma = 0.577216$ — постоянная Эйлера. При больших t функция $F_p^D(t)$ разлагается в асимптотический ряд

$$F_p^D(t) = 1 - \frac{4!}{2 \cdot t^2} + \frac{6!}{2 \cdot t^4} - \frac{8!}{2 \cdot t^6} + \dots + (-1)^n \frac{(2n+2)!}{2 \cdot t^{2n}} + \dots, \quad (2.10)$$

который нетрудно получить из ее интегрального представления (2.5). Значения $F_p^D(t)$, вычисленные по приведенным только что формулам, даны в табл. 1.

При $1 - \lambda \ll 1$ существует область значений τ , для которой $t_D \ll 1$. Из (2.4) и (2.6) следует, что в этой области

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4 \pi \tau^2} \frac{8}{\lambda^2 \pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \left[1 - \frac{2 \sqrt{\pi}}{\lambda} \tau \sqrt{\ln \tau} (1 - \lambda) + \dots \right]. \quad (2.11)$$

При $\lambda = 1$ условие $t_D \ll 1$ не ограничивает значений τ сверху. Поэтому, положив в последней формуле $\lambda = 1$, получаем асимптотику $S_p^D(\tau, 1)$, справедливую при всех $\tau \gg 1$:

$$S_p^D(\tau, 1) = \frac{1}{4 \pi \tau^2} \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau}. \quad (2.12)$$

Если в разложениях $u_D(z)$ и $G_D(z)$ при $z \gg 1$ взять несколько первых членов [см. формулы (1.2.43) и (1.2.35)], то из (1.3.13) можно получить не только первый, но и следующие члены асимптотики $S_p^D(\tau, 1)$:

$$S_p^D(\tau, 1) = \frac{1}{4 \pi \tau^2} \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \left(1 + \frac{1 + 2\gamma}{4} \frac{1}{\ln \tau} - \frac{2\pi^2 + 3 + 3\gamma + 3\gamma^2}{24} \frac{1}{\ln^2 \tau} + \dots \right) \quad (2.13)$$

Таблица 1

ФУНКЦИЯ $F_p^D(t)$

t	$F_p^D(t)$	t	$F_p^D(t)$	t	$F_p^D(t)$
0.0	0.00000	4.0	0.6658	12.0	0.9296
0.1	0.00435	4.2	0.6830	12.4	0.9335
0.2	0.01545	4.4	0.6991	12.8	0.9371
0.3	0.03118	4.6	0.7140	13.2	0.9404
0.4	0.05011	4.8	0.7280	13.6	0.9434
0.5	0.07122	5.0	0.7411	14.0	0.9462
0.6	0.09377	5.2	0.7533	14.4	0.9489
0.7	0.1172	5.4	0.7647	14.8	0.9513
0.8	0.1411	5.6	0.7755	15.2	0.9535
0.9	0.1652	5.8	0.7855	15.6	0.9557
1.0	0.1893	6.0	0.7950	16.0	0.9577
1.2	0.2365	6.4	0.8122	16.4	0.9596
1.4	0.2820	6.8	0.8275	16.8	0.9613
1.6	0.3252	7.2	0.8411	17.2	0.9629
1.8	0.3658	7.6	0.8533	17.6	0.9645
2.0	0.4039	8.0	0.8642	18.0	0.9659
2.2	0.4395	8.4	0.8740	18.4	0.9673
2.4	0.4726	8.8	0.8828	18.8	0.9686
2.6	0.5034	9.2	0.8907	19.2	0.9698
2.8	0.5320	9.6	0.8979	19.6	0.9709
3.0	0.5586	10.0	0.9045	20.0	0.9720
3.2	0.5833	10.4	0.9104		
3.4	0.6062	10.8	0.9159		
3.6	0.6275	11.2	0.9209		
3.8	0.6474	11.6	0.9254		
4.0	0.6658	12.0	0.9296		

или

$$S_p^D(\tau, 1) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \left(1 + 0.539 \frac{1}{\ln \tau} - 1.054 \frac{1}{\ln^2 \tau} + \dots \right). \quad (2.14)$$

Заметим, между прочим, что удерживать второй член в (2.11) имеет смысл только тогда, когда он превосходит по абсолютной величине второй член разложения (2.13).

В противоположном предельном случае, когда $t_D \gg 1$, из (2.4) и (2.10) имеем

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau} \sqrt{\ln\tau}} \frac{1}{(1-\lambda)^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\lambda^2\pi}{\tau^2 \ln\tau (1-\lambda)^2} + \dots \right) \quad (2.15)$$

При τ , по порядку больших единицы, для которых при данном λ величина t_D не являются ни очень малой, ни очень большой, функцию источников следует находить по формуле (2.4), беря значения $F_p^D(t)$ из табл. 1.

Функцию источников оказывается полезным представить в несколько иной форме, которая подсказывается следующими соображениями. Согласно (I.2.37), при больших τ функция ослабления $M_1^D(\tau)$ асимптотически равна

$$M_1^D(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau} \sqrt{\ln\tau}}. \quad (2.16)$$

Поэтому величину t_D , определяемую выражением (2.6), можно записать также в виде

$$t_D = \frac{4}{\lambda\pi} \cdot \frac{1-\lambda}{M_1^D(\tau)}, \quad (2.17)$$

а формула (2.4) с учетом (I.2.37) переписывается так:

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2^D(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p^D(t_D), \quad (\tau \gg 1). \quad (2.18)$$

До сих пор считалось, что оба этих соотношения относятся к значениям τ , по порядку величины большим единицы. Однако (2.17) позволяет вычислять величину t_D для любых τ , в том числе и тех, где формула (2.6) уже неприменима. Функции $M_1^D(\tau)$ и $M_2^D(\tau)$ при небольших τ должны, вообще говоря, находится численным интегрированием по формуле (I.2.1). Впрочем, недавно опубликованы [4] подробные таблицы $M_1^D(\tau)$ и $M_2^D(\tau)$, так что их можно считать известными. С учетом только что сказанного, функцию источников естественно представить в виде

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2^D(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p^D(t_D) \xi_p^D(\tau, \lambda), \quad (2.19)$$

где $\xi_p^D(\tau, \lambda)$ — поправочный множитель, учитывающий отклонение от асимптотики (2.18). Удобство такой формы записи состоит в том,

что в наиболее интересном случае почти консервативного рассеяния величина $\xi_p^D(\tau, \lambda)$ не сильно отличается от единицы при всех τ (из изложенного выше ясно, что $\xi_p^D(\tau, \lambda) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$). Поскольку, кроме того, при $1 - \lambda \ll 1$ поглощение начинает существенно сказываться лишь на больших расстояниях от источника, а $\xi_p^D(\tau, \lambda)$ заметно отличается от единицы только при сравнительно небольших τ , величину $\xi_p^D(\tau, \lambda)$ можно в этом случае заменить на $\xi_p^D(\tau, 1)$, а множитель λ положить равным единице. В результате будем иметь

$$S_p^D(\tau, \lambda) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{M_2^D(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p^D(t_D) \xi_p^D(\tau, 1), \quad (1-\lambda \ll 1). \quad (2.20)$$

Если нужна только оценка функции источников, отличим поправочного множителя $\xi_p^D(\tau, 1)$ от единицы можно пренебречь. Что же касается всех остальных величин, то они легко вычисляются по приведенным выше формулам с использованием таблиц $M_1^D(\tau)$ и $M_2^D(\tau)$ [4].

Переходя в (2.19) к пределу при $\lambda \rightarrow 1$ и пользуясь (2.9), находим, что при строго консервативном рассеянии

$$S_p^D(\tau, 1) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{8}{\pi^2} \frac{M_2^D(\tau)}{[M_1^D(\tau)]^2} \xi_p^D(\tau, 1). \quad (2.21)$$

Из сравнения этой формулы с (1.14) следует, что при $\tau \ll 1$

$$\xi_p^D(\tau, 1) = \frac{\pi^2}{8} \left[1 + \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \tau + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{8} \right) \tau^2 \ln \tau + O(\tau^3) \right]. \quad (2.22)$$

При $\tau \gg 1$

$$\xi_p^D(\tau, 1) = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{\ln \tau} - \frac{\pi^2 - 12\gamma}{48} \frac{1}{\ln^2 \tau} + \dots \quad (2.23)$$

3. Поле излучения вдали от источника (фойгтовский и лоренцовский коэффициенты поглощения). Исследование асимптотического поведения функции источников при фойгтовском и лоренцовском коэффициентах поглощения проводится аналогично тому, как это делалось в доплеровском случае. Мы дадим только окончательные результаты.

Оказывается, что при фойгтовском коэффициенте поглощения и $\tau \gg 1$

$$S_p^V(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{V \alpha U(\alpha, 0)}{2\tau^{3/2} (1-\lambda)^2} F_p^V(t_V), \quad (3.1)$$

где

$$F_p^V(t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^2 \int_0^{\infty} \frac{y^{3/2} e^{-y} dy}{(t + \sqrt{y})^2 + y}, \quad (3.2)$$

$$t_V = \frac{3(1-\lambda)}{\lambda \sqrt{\pi a U(a, 0)}} \tau^{1/2}. \quad (3.3)$$

При $t \ll 1$ значения функции $F_p^V(t)$ можно найти из ее разложения

$$F_p^V(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} t^3 + \frac{t^4}{3} + \dots, \quad (3.4)$$

а при $t \gg 1$ — по асимптотической формуле

$$\begin{aligned} F_p^V(t) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{(k+1)\pi}{4} \cdot 2^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right) \frac{1}{t^k} = \\ &= 1 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} + 5 \frac{1}{t^2} - \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для промежуточных t значения $F_p^V(t)$ находятся из (3.2) численным интегрированием (табл. 2).

Подчеркнем, что вид функции $F_p^V(t)$ не зависит от значения a . Правда, область применимости формулы (3.1) при разных a различна. Чем меньше a , тем больше минимальное τ , при котором эта формула уже может служить разумным приближением.

Когда относительная роль поглощения мала ($1-\lambda \ll 1$), в асимптотической области ($\tau \gg 1$) можно выделить три зоны:

1) Зона почти консервативного рассеяния. Здесь влияние поглощения мало. Это та область, где уже $\tau \gg 1$, но еще $t_V \ll 1$, то есть

$$1 \ll \tau \ll \frac{\lambda^2 \pi a U(a, 0)}{9(1-\lambda)^2}. \quad (3.6)$$

В этой области, как следует из (3.1) и (3.4),

$$\begin{aligned} S_p^V(\tau, \lambda) &= \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \cdot \frac{3}{\lambda^2 2\pi \sqrt{a U(a, 0)}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \times \\ &\times \left[1 - \frac{6\tau^{1/2}}{\lambda\pi \sqrt{a U(a, 0)}} (1-\lambda) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

2) Переходная область. Поглощение заметно сказывается; хотя и не играет еще определяющей роли. Этой области соответствуют

Таблица 2

ФУНКЦИЯ $F_p^V(t)$

t	$F_p^V(t)$	t	$F_p^V(t)$	t	$F_p^V(t)$
0.0	0.0000	4.0	0.5055	12.0	0.7828
0.1	0.00299	4.2	0.5203	12.4	0.7888
0.2	0.01078	4.4	0.5342	12.8	0.7945
0.3	0.02199	4.6	0.5474	13.2	0.8000
0.4	0.03562	4.8	0.5600	13.6	0.8050
0.5	0.05091	5.0	0.5719	14.0	0.8099
0.6	0.06733	5.2	0.5832	14.4	0.8145
0.7	0.08445	5.4	0.5939	14.8	0.8190
0.8	0.1020	5.6	0.6041	15.2	0.8232
0.9	0.1197	5.8	0.6138	15.6	0.8272
1.0	0.1374	6.0	0.6232	16.0	0.8311
1.2	0.1722	6.4	0.6405	16.4	0.8347
1.4	0.2060	6.8	0.6564	16.8	0.8383
1.6	0.2382	7.2	0.6710	17.2	0.8416
1.8	0.2687	7.6	0.6844	17.6	0.8448
2.0	0.2974	8.0	0.6968	18.0	0.8480
2.2	0.3245	8.4	0.7083	18.4	0.8510
2.4	0.3499	8.8	0.7189	18.8	0.8539
2.6	0.3738	9.2	0.7288	19.2	0.8566
2.8	0.3963	9.6	0.7381	19.6	0.8593
3.0	0.4173	10.0	0.7467	20.0	0.8619
3.2	0.4372	10.4	0.7549	30.0	0.9052
3.4	0.4558	10.8	0.7625	50.0	0.9418
3.6	0.4734	11.2	0.7696	100.0	0.9704
3.8	0.4899	11.6	0.7763		
4.0	0.5055	12.0	0.7828		

расстояния от источника, для которых параметр t_V по порядку величины близок к единице. Функция источников должна находиться по формулам (3.1) — (3.3).

3) Зона сильного поглощения. Здесь $t_V \gg 1$, то есть

$$\approx \frac{\lambda^2 \pi a U(a, 0)}{9(1-\lambda)^2} \quad (3.8)$$

Функция источников дается следующим выражением, вытекающим из (3.1) и (3.5) при учете (3.3):

$$S_p^V(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{\sqrt{aU(a, 0)}}{2(1-\lambda)^2} \frac{1}{\tau^{3/2}} \left(1 - \frac{16}{9} \frac{\lambda\sqrt{aU(a, 0)}}{1-\lambda} \frac{1}{\tau^{1/2}} + \dots \right) \quad (3.9)$$

Подобно тому, как это делалось в случае доплеровского коэффициента поглощения, функцию источников при всех τ полезно представить в форме

$$S_p^V(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2^V(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p^V(t_V) \xi_p^V(\tau, \lambda), \quad (3.10)$$

где

$$t_V = \frac{3}{\lambda\sqrt{\pi}} \frac{1-\lambda}{M_1^V(\tau)}. \quad (3.11)$$

В частности, при $1-\lambda \ll 1$ можно принять, что

$$S_p^V(\tau, \lambda) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{M_2^V(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p^V(t_V) \xi_p^V(\tau, 1). \quad (3.12)$$

При грубых оценках множитель $\xi_p^V(\tau, 1)$ вполне можно заменять на единицу.

Для строго консервативного рассеяния из (3.10) и (3.4) находим

$$S_p^V(\tau, 1) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{\pi} \frac{M_2^V(\tau)}{[M_1^V(\tau)]^2} \xi_p^V(\tau, 1). \quad (3.13)$$

Все эти соотношения относятся к фойгтовскому коэффициенту поглощения. Чтобы получить аналогичные формулы для лоренцовского профиля, достаточно устремить a к бесконечности. Учитывая, что

$$aU(a, 0) \rightarrow \frac{1}{\pi} \quad \text{при} \quad a \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

[это следует из (I.2.44)], вместо (3.1) и (3.3) находим

$$S_p^L(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{3/2}(1-\lambda)^2} F_p^L(t_L), \quad (3.15)$$

где

$$t_L = \frac{3(1-\lambda)}{\lambda} \tau^{1/2}, \quad (3.16)$$

причем функция $F_p^L(t)$ совпадает с $F_p^V(t)$ и дается формулой (3.2).

В частности, при

$$1 \ll \tau \ll \frac{\lambda^2}{9(1-\lambda)^2} \quad (3.17)$$

имеем

$$S_p^L(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{3}{\lambda^2 2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left[1 - \frac{6\tau^{1/2}}{\lambda\sqrt{\pi}} (1-\lambda) + \dots \right], \quad (3.18)$$

тогда как при

$$\tau \gg \frac{\lambda^2}{9(1-\lambda)^2} \quad (3.19)$$

из (3.15) находим

$$S_p^L(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-\lambda)^2} \frac{1}{\tau^{3/2}} \left(1 - \frac{16}{9\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\tau^{1/2}} + \dots \right). \quad (3.20)$$

Главный член разложения (3.18) был получен ранее Б. А. Векленко [5].

Из (3.18), полагая $\lambda = 1$, получаем главный член асимптотики $S_p^L(\tau, 1)$ при больших τ . Можно вывести и более точную формулу, аналогичную разложению (2.13) в доплеровском случае:

$$S_p^L(\tau, 1) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left(1 + \frac{9}{20} \frac{1}{\tau} + \dots \right). \quad (3.21)$$

Формулы (3.10) — (3.13) не меняют своего вида при переходе к лоренцовскому коэффициенту поглощения. Нужно только всюду индекс V заменить на L и учесть, что $F_p^L(t) = F_p^V(t)$. В приближении $\xi_p^L(\tau, 1) = 1$ функция источников легко вычисляется по этим формулам при всех τ , так как $M_1^L(\tau)$ и $M_2^L(\tau)$ просто выражаются через бесселевы функции мнимого аргумента [1, 6].

4. *Длина термализации.* После формального исследования поля излучения точечного источника остановимся на физической интерпретации результатов, относящихся к почти консервативному рассеянию. Кванты, испускаемые источником, испытывают в среде многократные рассеяния, каждое из которых представляет собой возбуждение атома с последующим спонтанным переходом. Чем дальше от источника находится возбужденный атом, тем большее в среднем число рассеяний должен был испытать квант, дошедший сюда и вызвавший возбуждение. Между тем, за возбуждением атома с вероятностью $1 - \lambda$ следует безизлучательный переход, и квант „гибнет“. Поэтому, сколь бы мала

ни была величина $1 - \lambda$, на достаточно больших расстояниях от источника „гибель“ квантов должна начать сказываться. Вблизи же источника, где возбуждение в основном производится квантами, испытавшими относительно небольшое число рассеяний, поле излучения должно быть почти таким же, как если бы „гибели“ квантов не было вовсе.

Согласно только что сказанному, при $1 - \lambda \ll 1$ вокруг источника должна существовать область, где рассеяние приближенно можно считать консервативным, то есть полагать $\lambda = 1$. Понятно, что размеры этой „области консервативного рассеяния“ должны быть тем больше, чем меньше роль поглощения. Это качественное заключение справедливо во всех случаях (при любой зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты, любой индикатрисе и т. п.). Если же говорить о количественной стороне дела, то здесь уже все определяется процессами, происходящими при элементарном акте рассеяния.

Из формулы (I.3.18) следует, что при изотропном монохроматическом рассеянии размер „консервативной области“ по порядку величины равен диффузионной длине $\tau_d \equiv \frac{1}{k}$. Поскольку считается, что $1 - \lambda \ll 1$, из (I.3.15) имеем $k \approx \sqrt{3(1 - \lambda)}$, так что

$$\tau_d \approx \frac{1}{\sqrt{3(1 - \lambda)}}. \quad (4.1)$$

При рассеянии с полным перераспределением по частотам играет роль не только величина поглощения, определяемая значением λ , но и вид зависимости коэффициента поглощения от частоты. Из результатов, полученных в предыдущих разделах, ясно, что поглощением можно в первом приближении пренебрегать на расстояниях от источника, которым соответствуют значения параметра t , по порядку меньшие единицы. Поглощение начинает существенно сказываться только тогда, когда t становится порядка единицы. Поэтому за размер области консервативного рассеяния можно принять расстояние от источника, которому соответствует значение параметра t , равное единице.

Значение τ , которому отвечает $t = 1$, будем называть *длиной термализации*. Обозначая длину термализации через τ , имеем по определению

$$\lambda M_1(\tau) = C(1 - \lambda), \quad (4.2)$$

где константа C определяется профилем коэффициента поглощения, но во всех случаях близка к единице. В частности,

$$C_D = \frac{4}{\pi} = 1.273, \quad (4.3a)$$

$$C_V = C_L = \frac{3}{\sqrt{\pi}} = 1.693. \quad (4.36)$$

При малой относительной роли поглощения ($1 - \lambda \ll 1$) множитель λ в левой части (4.2) можно заменить на единицу, а для вычисления функции ослабления $M_1(\tau_i)$ взять главный член ее асимптотики (см. [1], раздел 2). В результате получим

$$\tau_i \sqrt{\ln \tau_i} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{1 - \lambda}, \quad (\text{Допплер}) \quad (4.4a)$$

$$\tau_i \approx \frac{\pi a U(a, 0)}{9} \frac{1}{(1 - \lambda)^2}, \quad (\text{Фойгт}) \quad (4.46)$$

$$\tau_i \approx \frac{1}{9} \frac{1}{(1 - \lambda)^2}. \quad (\text{Лоренц}) \quad (4.4b)$$

Отметим, что область применимости формулы (4.46) ограничена теми значениями τ_i , при которых для $M_1^V(\tau_i)$ уже можно пользоваться асимптотическим представлением (1.2.49). То же самое относится и ко всем асимптотикам, полученным в предыдущем разделе для фойгтовского случая.

Понятие длины термализации чрезвычайно полезно для качественного суждения о характере решения большинства задач о переносе резонансного излучения. Она было введено в теорию Ю. Эйветтом и Д. Хаммером [6] и получило затем систематическое применение ([7, 8] и др.). Длина термализации, используемая в этих работах, отличается от τ_i на несущественный постоянный множитель. Происхождение термина объясняется тем, что в изотермической плазме величина τ_i дает оптическое расстояние от границы, начиная с которого населенность верхнего уровня становится близкой к термодинамически равновесной населенности, отвечающей кинетической температуре плазмы.

Общее заключение, которое можно сделать на основании приведенных только что формул, состоит в следующем: чем медленнее убывает коэффициент поглощения в крыле линии, тем больше длина термализации, а, значит, и размеры области консервативного рассеяния. Насколько велико влияние различий в коэффициенте поглощения, можно судить по такому примеру. Когда $1 - \lambda = 10^{-1}$ (в действительности часто приходится иметь дело и с много меньшими значениями $1 - \lambda$), при доплеровском коэффициенте поглощения длина термализации равна примерно $0.4 \cdot 10^4$, а при лоренцовском — $1.1 \cdot 10^7$. Диффузионная

же длина составляет всего $0.6 \cdot 10^8$. Различие достигает многих порядков. Однако и сейчас еще иногда встречается очень распространенная в недавнем прошлом ошибка — отождествление длины термализации с диффузионной длиной.

5. *Эффект накопления.* Рассмотрим теперь вопрос о том, к чему сводится суммарный эффект многократных рассеяний. Точнее говоря, выясним, как изменяется концентрация возбужденных атомов на заданном расстоянии от источника в результате взаимодействия его излучения со средой.

Обратимся сперва к монохроматическому рассеянию. Представим себе, что источник мощности $4\pi/\sigma^2$ находится в пустоте. На расстоянии r от него помещен „пробный“ объем с веществом. Свойства этого вещества (объемный коэффициент поглощения τ , значение параметра λ и т. д.) будем считать теми же самыми, которыми мы ранее наделяли все вещество, заполняющее пространство. Пусть объем имеет форму цилиндра сечением 1 см^2 и толщиной dr , ось которого направлена на источник. Поток излучения, падающего на этот объем, равен $\frac{4\pi}{\sigma^2} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2}$. Из него за единицу времени поглощается энергия $\frac{\sigma dr}{r^2}$. Доля λ этой энергии излучается затем во все стороны. Поэтому функция источников в таком пробном объеме равна

$$S_0^M(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2}. \quad (5.1)$$

Если же источник находится в бесконечной однородной среде, то на расстоянии r от него функция источников равна $S_p^M(\tau, \lambda)$. Таким образом, отношение

$$i_p^M(\tau, \lambda) = \frac{S_p^M(\tau, \lambda)}{S_0^M(\tau, \lambda)} = \frac{4\pi\tau^2}{\lambda} S_p^M(\tau, \lambda) \quad (5.2)$$

показывает, во сколько раз под влиянием среды изменяется излучение пробного объема, лежащего на расстоянии r от источника. Величину $i_p^M(\tau, \lambda)$ можно назвать коэффициентом влияния среды. Графики $i_p^M(\tau, \lambda)$ для нескольких значений λ , построенные с использованием численных данных, приводимых в книге К. Кейса, Ф. Гофмана и Г. Плачека [2], приведены на рис. 1. Наша ближайшая цель состоит в обсуждении общего поведения кривых $i_p^M(\tau, \lambda)$.

При большом поглощении (малые λ) среда сильно ослабляет излучение. В предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ это ослабление происходит экспоненциально. С ростом λ убывание коэффициента влияния при возрастании τ становится все более медленным. При $\lambda > \frac{4}{\pi^2} = 0.405$ вокруг источника появляется область, где среда действует уже как своего рода усилитель, или, правильнее сказать, накопитель. Однако пока поглощение играет сравнительно большую роль, размеры этой области и „усиление“ в ней не очень велики. Так, даже при $\lambda = 0.9$ максимальное значение коэффициента влияния составляет лишь около 1.9, а радиус зоны накопления, где $i_p^M(\tau, \lambda) > 1$, не превышает 4.8 длин свободного пробега кванта. Только при очень слабом поглощении ($1 - \lambda \ll 1$) эффект накопления становится значительным.

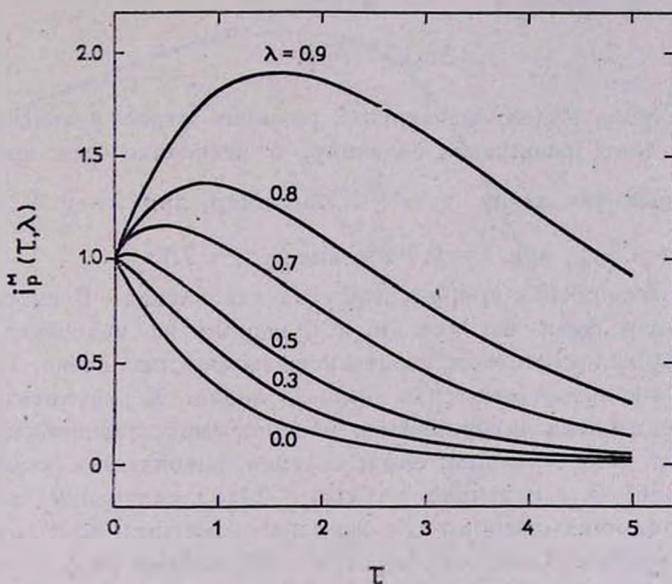


Рис. 1.

Представляет известный интерес рассмотреть случай почти консервативного рассеяния немного подробнее. Из (5.2) и (I.3.18) следует, что при $1 - \lambda \ll 1$ и $\tau \gg 1$

$$i_p^M(\tau, \lambda) \approx 3\tau e^{-k\tau}. \quad (5.3)$$

Между тем, из рис. 1 видно, что с уменьшением роли поглощения максимум накопления быстро сдвигается в сторону больших τ . Поэтому при оценке положения максимума можно исходить из последней

формулы. Дифференцируя ее по τ и приравнявая производную нулю, находим, что максимум накопления приходится на расстояние от источника, равное $\tau_{\max} = \frac{1}{k}$. Иначе говоря, при почти консервативном монохроматическом рассеянии максимальное накопление наблюдается на расстоянии одной диффузионной длины от источника. Принимая во внимание, что при почти консервативном рассеянии $k \approx \sqrt{3(1-\lambda)}$, для коэффициента влияния среды в максимуме находим из (5.3):

$$i_p^M(\tau_{\max}, \lambda) \approx \sqrt{\frac{3}{1-\lambda}} e^{-\tau}. \quad (5.4)$$

Чтобы определить радиус зоны накопления τ_1 , нужно в (5.3) приравнять $i_p^M(\tau, \lambda)$ единице:

$$3\tau_1 e^{-k\tau_1} = 1. \quad (5.5)$$

При разумно малых значениях k решение этого уравнения дает для радиуса зоны накопления величину, в несколько раз превышающую диффузионную длину $\tau_d = \frac{1}{k}$. Например, при $\lambda = 0.99$ из (5.5) находим $\tau_1 \approx 4.3\tau_d$, при $\lambda = 0.9999$ имеем $\tau_1 \approx 7.1\tau_d$.

Какова физическая природа эффекта накопления? В пустоте траектории квантов были бы лучами, исходящими из источника. Когда источник окружен веществом, кванты испытывают рассеяния. Их траектории из лучей превращаются в ломаные линии. В результате отток квантов от источника затрудняется, что и служит причиной обсуждаемого эффекта. В бесконечной среде предел накоплению квантов кладет поглощение (а в конечной — также и выход излучения через границы). Мы подробно говорим обо всех этих понятных, почти очевидных вещах не случайно. Казалось бы, эти соображения имеют настолько общий характер, что должны оставаться в силе и в случае рассеяния света в частотах спектральной линии. Однако это не так, или, вернее, не совсем так. Возможность изменения частоты при рассеянии сильно меняет картину, в одних случаях резко уменьшая, а в других и вовсе сводя на-нет эффект накопления.

Возьмем, например, рассеяние с доплеровским коэффициентом поглощения. Учитывая, что при рассеянии с полным перераспределением по частотам $S_0(\tau, \lambda) = \frac{\lambda a_1}{4\pi\tau^2}$, из (2.4) — (2.6) находим, что при $1 - \lambda \ll 1$ и $\tau \gg 1$ коэффициент влияния среды равен

$$i_p^D(\tau, \lambda) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \int_0^{\infty} \frac{y^2 e^{-y}}{t_D^2 + y^2} dy. \quad (5.6)$$

График этой функции приведен на рис. 2. Качественно все обстоит так же, как и при монохроматическом рассеянии — вокруг источника существует зона накопления, в которой $i_p^D(\tau, \lambda) > 1$, причем размер ее тем больше, чем меньше $1 - \lambda$. Однако с количественной стороны имеются громадные различия. При доплеровском коэффициенте по-

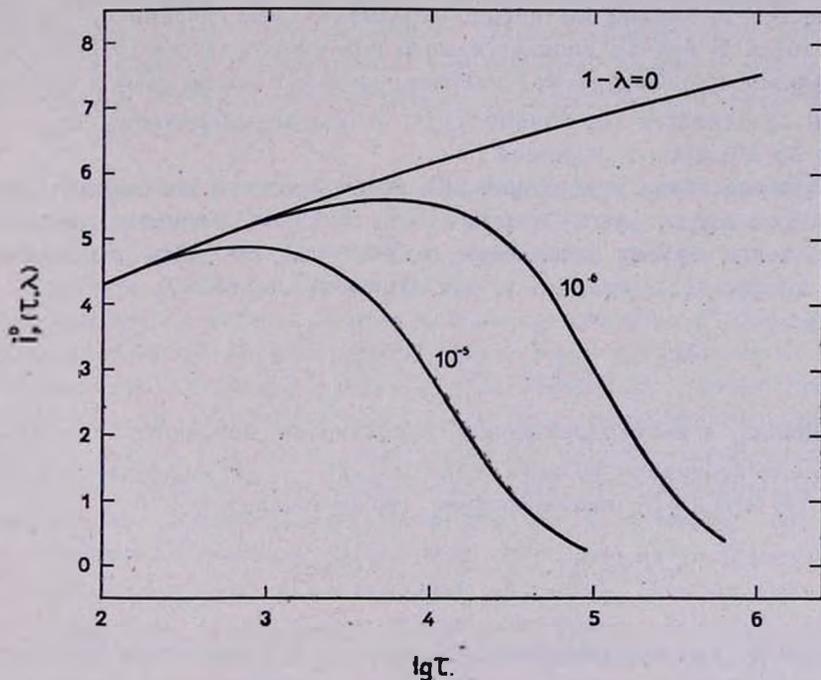


Рис. 2.

глощения коэффициент влияния в зоне накопления по порядку величины не отличается от единицы, тогда как при монохроматическом рассеянии он может достигать очень больших значений. Например, при $1 - \lambda = 10^{-6}$ имеем $i_p^D(\tau_{\max}) \approx 5.6$, тогда как $i_p^M(\tau_{\max}) \approx 1.1 \cdot 10^3$ [см. формулу (5.4)]. Причиной этого различия служит перераспределение по частотам при элементарном акте рассеяния, приводящее к постепенной „перекачке“ квантов из ядра линии в крылья. В крыльях коэффициент поглощения мал. Поэтому квант, попавший в крыло, проходит без рассеяний относительно большое расстояние. Это значит, что та-

кой квант обладает много меньшей способностью возбуждать атомы, чем квант с частотой, близкой к центру линии.

Итак, при рассеяниях происходят два явления, действующих в противоположных направлениях. Во-первых, меняются направления движения квантов, что ведет к „запутыванию“ их траекторий и вызывает эффект накопления. Во-вторых, меняется частота. После каждого рассеяния в крыльях линии оказывается все большая доля излучения. Вследствие этого среда как бы „просветляется“ — с увеличением пути, пройденного излучением в среде, растет число испытанных квантами рассеяний, и излучение постепенно утрачивает свою способность возбуждать атомы. В случае доплеровского коэффициента поглощения первый эффект преобладает над вторым, хотя и в очень слабой степени. Этим и объясняется то, почему $i_p^D(\tau, \lambda)$ в зоне накопления не отличается по порядку от единицы.

При рассеянии с лоренцовским коэффициентом поглощения доминирует уже эффект перераспределения. Даже в строго консервативном случае, когда эффект накопления должен был бы быть наибольшим, его не существует, поскольку, как это видно из (3.21),

$$i_p^L(\tau, 1) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left(1 + \frac{9}{20} \frac{1}{\tau} + \dots \right). \quad (5.7)$$

Правда, в непосредственной окрестности источника должна существовать небольшая область, где $i_p^L(\tau, 1) > 1$. Это следует из формул (1.14) и (1.2.57), показывающих, что при малых τ

$$i_p^L(\tau, 1) = 1 + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{4} \right) \tau + \dots \quad (5.8)$$

Однако уже при небольших τ рост $i_p^L(\tau, 1)$ сменяется убыванием, и во всей асимптотической области ($\tau \gg 1$) коэффициент влияния оказывается много меньше единицы. В противоположность этому, при монохроматическом рассеянии и в доплеровском случае $i_p(\tau, 1) > 1$ при всех τ .

Таким образом, при лоренцовском коэффициенте поглощения присутствие даже чисто рассеивающей среды уменьшает концентрацию возбужденных атомов на больших расстояниях от источника по сравнению с той, которая была бы в пробном объеме, находящемся в пустоте на том же расстоянии от источника. Спад концентрации возбужденных атомов в рассеивающей среде происходит при этом пропорционально $r^{-3/2}$, где r — расстояние от источника [см. формулу (3.21)]. На первый взгляд этот результат может показаться странным. В чисто рассеивающей среде поток излучения через единичную пло-

щадку убывает как r^{-2} , а потому, казалось бы, не может убывать быстрее и концентрация возбужденных атомов. На самом деле это не так. Поток, проинтегрированный по всем частотам в линии, действительно убывает как r^{-2} . Однако с расстоянием изменяется и распределение излучения по частотам. Из-за сильной зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты это обстоятельство должно обязательно приниматься во внимание. В принципе оно может обеспечить и более быстрое убывание концентрации возбужденных атомов. При рассеянии с полным перераспределением по частотам решающим здесь является поведение коэффициента поглощения в далеких крыльях линии. Чем медленнее убывает коэффициент поглощения с удалением от центра линии, тем быстрее спадает с расстоянием концентрация возбужденных атомов. По существу это есть не что иное как эффект Занстра [9].

В заключение остановимся на вопросе о том, когда среду можно считать бесконечной. Если размеры среды конечны, имеются два конкурирующих процесса, ведущих к выбыванию квантов из процесса многократных рассеяний. Один из них — это выход излучения через границы, другой — гибель квантов вследствие „истинного“ поглощения, то есть различного рода неупругих процессов — ударов второго рода, фотоионизаций с верхнего уровня и т. п. Поскольку первый из этих процессов нами не учитывался, полученные выше результаты применимы только в том случае, когда второй процесс преобладает над первым. Это условие будет выполнено, если 1) характерный размер системы много больше длины термализации; 2) источник находится на расстоянии от границы, большом по сравнению с r_0 ; 3) рассматриваются области среды, более далекие от границ, чем от источника. Выполнения этих трех предположений достаточно для того, чтобы полученные выше результаты можно было использовать для расчета населенности первого возбужденного уровня атомов газа, занимающего конечный объем.

Ленинградский государственный
университет

TRANSFER OF RESONANCE RADIATION IN INFINITE MEDIUM. II.

V. V. IVANOV, D. I. NAGIRNER

Source function $S_p(\tau, \lambda)$ for an infinite homogeneous medium with a point energy source is studied. It is assumed that there is complete redistribution in frequency. Explicit expression for $S_p(\tau, \lambda)$ was found in the preceding paper [1]. Behaviour of $S_p(\tau, \lambda)$ for $\tau \ll 1$ and $\tau \gg 1$ is investigated (τ is the optical distance from the source). Three forms of absorption coefficient are considered, namely, Doppler, Voigt and Lorentz. Special attention is paid to nearly conservative scattering ($1 - \lambda \ll 1$). Physical interpretation of the results is given. The effect of frequency redistribution on spatial distribution of excited atoms is discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Д. И. Нагирнер, В. В. Иванов, *Астрофизика*, 2, 5, 1966.
2. K. M. Case, F. Hoffman, G. Plazcek, *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*, U. S. Government Printing Office, Los Alamos, 1953.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1962.
4. В. В. Иванов, В. Т. Щербаков, *Астрофизика*, 1, 22, 1965.
5. Б. А. Векленко, *ЖЭТФ*, 36, 204, 1959.
6. E. N. Avrett, D. G. Hummer, *MN*, 120, 295, 1965.
7. *Formation of Spectrum Lines*, Smithsonian Institution Astrophysical Observatory. Special Report N 174, Cambridge, U. S. A., May, 1965.
8. В. В. Иванов, сб. «Теория звездных спектров», «Наука», М., 1956.
9. H. Zanstra, *Bull. Astron. Inst. Netherl.*, 11, № 401, 1949.