АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 ИЮНЬ, 1966 ВЫПУСК 2

ЧИСЛО РАССЕЯНИЙ ПРИ ДИФФУЗИИ ФОТОНОВ. I.

В. В. СОБОЛЕВ

Поступила 25 апреля 1966

Получены основные формулы, определяющие среднее число рассеяний фотонов в поглощающей и рассеивающей среде. Отдельно найдены выражения для чисел рассеяний фотонов, гибнущих в среде, и фотонов, выходящих из среды наружу. Полученные формулы применены к одномерной среде.

При рассмотрении диффузии излучения в какой-либо среде возникает очень важный вопрос о среднем числе рассеяний, испытываемых фотоном. Этот вопрос имеет существенное значение по ряду причин. Прежде всего можно указать на то, что задача о диффузии излучения часто решается методом последовательных приближений, состоящим в последовательном учете рассеяний первого, второго и более высоких порядков. Очевидно, что для получения этим методом достаточно точного решения необходимо, чтобы число последовательных приближений превосходило среднее число рассеяний фотона в данной среде. Во-вторых, знание среднего числа рассеяний фотона позволяет оценить среднюю плотность излучения в среде, так как среднее число рассеяний показывает, во сколько раз число фотонов, находящихся в среде, больше числа фотонов, образующихся непосредственно под действием источников излучения. Знание же средней плотности излучения дает возможность определить и некоторые другие физические характеристики среды (например, среднюю степень возбуждения атомов, если рассматривается диффузия излучения в спектральной линии). В-третьих, среднее число рассеяний фотона, умноженное на средний промежуток времени, в течение которого фотон находится в поглощенном состоянии и в пути между двумя последовательными рассеяниями, дает нам среднее время пребывания фотона в среде. Последняя же величина характеризует время установления лучистого равновесия в среде, и оценка этого времени представляет большой интерес в тех случаях, когда среда находится под действием источников излучения переменной интенсивности.

По указанным причинам (а также по некоторым другим) среднее число рассеяний фотона оценивалось многими авторами для разных частных случаев. Однако общего рассмотрения проблемы, насколько нам известно, не производилось. Между тем в настоящее время это легко можно сделать на основе существующей сильно развитой теории рассеяния излучения. При этом для среднего числа рассеяний фотона могут быть получены точные и сравнительно простые формулы.

В этой работе, которая будет изложена в серии статей, для решения поставленной задачи используется вероятностный метод (см. [1]). В настоящей статье сначала даются общие формулы для среднего числа рассеяний фотона. При этом для простоты предполагается, что элементарный объем среды рассеивает излучение изотропно. Затем полученные формулы в виде примера применяются к одномерной среде, в которой диффузия излучения происходит без изменения частоты.

В следующих статьях среднее число рассеяний фотона будет определено для трехмерной среды, состоящей из плоско-параллельных слоев. При этом отдельно будут рассмотрены случаи диффузии излучения без изменения частоты и диффузии излучения с перераспределением по частотам. Предполагается также обобщить полученные результаты на случай неизотропного рассеяния света.

Основные формулы. Рассмотрим объем произвольной формы, заполненный некоторой средой, способной поглощать и рассеивать излучение. Будем считать, что фотон, поглощенный в каком-либо месте, переизлучается затем (то есть рассеивается) с вероятностью λ или испытывает истинное поглощение с вероятностью $1-\lambda$. Величина λ будет предполагаться постоянной для всей среды.

Каждый фотон, поглощенный в данном месте, может в ходе диффузии либо выйти из среды наружу, либо испытать в ней истинное поглощение, то есть „погибнуть“. Вероятность первого события мы обозначим через P, а вероятность второго — через $1-P$. Очевидно, что величина P зависит от формы и оптических размеров рассматриваемого объема среды, от значения параметра λ и от координат места, в котором фотон был первоначально поглощен.

Если величина P известна (об определении ее для разных случаев речь будет итти позднее), то легко можно найти и среднее число рассеяний фотона, которое мы обозначим через Q.

Однако прежде чем переходить к нахождению величины Q, введем в рассмотрение еще две величины, представляющие интерес для применений. Мы обозначим через Q_1 среднее число рассеяний фотона, вышедшего из среды после диффузии наружу, и через Q_2 — среднее число рассеяний фотона, погибшего в ходе диффузии в среде. Очевидно, что все введенные величины связаны между собой соотношением

$$Q = Q_1 P + Q_2 (1 - P). \tag{1}$$

Для определения величины Q_1, воспользуемся приемом, предложенным В. А. Амбарцумяном [2] и позволяющим находить среднее число рассеяний фотонов в любом их потоке (как выходящем из среды, так и идущем внутри нее).

Представим вероятность P в виде разложения в ряд по степеням λ:

$$P = \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \lambda^3 P_3 + \cdots \tag{2}$$

Первый член этого разложения есть вероятность выхода фотона из среды после первого рассеяния, второй — после второго рассеяния и т. д. Поэтому среднее число рассеяний выходящего из среды фотона будет равно

$$Q_1 = \frac{1}{P} (\lambda P_1 + 2\lambda^2 P_2 + 3\lambda^3 P_3 + \cdots). \tag{3}$$

Пользуясь (2), получаем

$$Q_1 = \lambda \frac{\partial \ln P}{\partial \lambda}. \tag{4}$$

Найдем теперь величину Q. Очевидно, что ее можно представить в виде

$$Q = 1 + \lambda (1 - P_1) + \lambda^2 (1 - P_1 - P_2) + \cdots, \tag{5}$$

где первый член в правой части есть математическое ожидание первого рассеяния, второй член — математическое ожидание второго рассеяния и т. д. С другой стороны, учитывая, что

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = 1, \tag{6}$$

имеем

$$\begin{aligned} 1 - P &= (1 - \lambda) P_1 + (1 - \lambda^2) P_2 + (1 - \lambda^3) P_3 + \cdots = \\ &= (1 - \lambda) [P_1 + (1 + \lambda) P_2 + (1 + \lambda + \lambda^2) P_3 + \cdots] = \\ &= (1 - \lambda) [1 + \lambda (1 - P_1) + \lambda^2 (1 - P_1 - P_2) + \cdots]. \end{aligned} \tag{7}$$

Сравнение (5) с (7) дает

$$Q=\frac{1-P}{1-\lambda}. \tag{8}$$

Подставляя (4) и (8) в (1), находим и выражение для величины Q_2:

$$Q_2=\frac{1}{1-\lambda}+\lambda\frac{\partial \ln(1-P)}{\partial\lambda}. \tag{9}$$

Таким образом, все искомые величины Q, Q_1 и Q_2 выражаются при помощи формул (4), (8) и (9) через вероятность выхода фотона из среды P.

Заметим, что если нам известна величина Q, то можно легко определить и величины Q_1 и Q_2. В самом деле, из формул (4), (8) и (9) получаем

$$Q_1=\frac{\lambda Q}{1-(1-\lambda)Q}\left[1-(1-\lambda)\frac{\partial\ln Q}{\partial\lambda}\right], \tag{10}$$

$$Q_2=1+\lambda\frac{\partial\ln Q}{\partial\lambda}. \tag{11}$$

В случае чистого рассеяния формула (8) дает для Q неопределенность, раскрывая которую находим

$$Q=\frac{\partial P}{\partial\lambda} \quad \text{при } \lambda=1. \tag{12}$$

В данном случае $Q_1=Q$, так как фотоны не испытывают в среде истинного поглощения.

Число рассеяний при разных источниках излучения. Выше через функцию P было выражено среднее число рассеяний фотонов, поглощенных в данном месте среды. Очевидно, что через ту же функцию можно выразить и среднее число рассеяний фотонов, появившихся во всей среде от каких-либо источников излучения.

Пусть α — объемный коэффициент поглощения в среде и $f\alpha dV$ — количество фотонов, пришедших непосредственно от источников излучения и поглощенных в элементарном объеме dV. Тогда полное количество фотонов, поглощенных во всей среде, будет равно $\int f\alpha dV$. Доля же фотонов, выходящих из среды наружу, будет определяться формулой

$$P^{*}=\frac{\int Pf\alpha dV}{\int f\alpha dV}. \tag{13}$$

Пусть Q^* — среднее число рассеяний, испытываемых всеми поглощенными в среде фотонами, а Q_1^* и Q_2^* — среднее число рассеяний, испытываемых теми из фотонов, которые выходят наружу и гибнут соответственно. Мы, очевидно, имеем

$$Q^* = \frac{\int (1-P) f \alpha dV}{(1-\lambda) \int f \alpha dV}, \tag{14}$$

или, учитывая (13),

$$Q^* = \frac{1-P^*}{1-\lambda}. \tag{15}$$

Для величин Q_1^* и Q_2^* получаем

$$Q_1^* = \lambda \frac{\partial \ln P^*}{\partial \lambda}, \tag{16}$$

$$Q_2^* = \frac{1}{1-\lambda} + \lambda \frac{\partial \ln (1-P^*)}{\partial \lambda}. \tag{17}$$

Следовательно, величины Q^*, Q_1^* и Q_2^* определяются формулами, аналогичными формулам (4), (8) и (9) (с заменой P на P^*).

Входящая в формулу (13) величина f может быть обусловлена источниками излучения, расположенными как вне среды, так и внутри ее. Однако если источники излучения находятся внутри среды и излучают изотропно, то мы можем просто принять

$$\frac{\lambda}{4\pi} f = g, \tag{18}$$

где $g\alpha dV$ — количество фотонов, испускаемых объемом dV в единичном телесном угле. В данном случае вместо формулы (13) имеем

$$P^* = \frac{\int P g \alpha dV}{\int g \alpha dV}. \tag{19}$$

Здесь акт первоначального испускания фотона источниками излучения также считается рассеянием.

При помощи формулы (15) можно получить другую формулу для среднего числа рассеяний фотона, которая обычно применяется в теории рассеяния света. Допустим, что источники излучения действуют стационарно. Тогда в среде будет существовать стационарное поле излучения с некоторой функцией источников S. Очевидно, что число фотонов, испытывающих в среде истинное поглощение за 1 *сек*, будет равно $(1-\lambda)\frac{4\pi}{\lambda}\int S\alpha dV$. С другой стороны, то же число фотонов может быть записано в виде $(1-P^*)\frac{4\pi}{\lambda}\int g\alpha dV$. Приравнивая друг другу два последних выражения, получаем

$$(1-P^*)\int g\alpha dV=(1-\lambda)\int S\alpha dV. \tag{20}$$

Поэтому на основании формулы (15) имеем

$$Q^*=\frac{\int S\alpha dV}{\int g\alpha dV}. \tag{21}$$

Формулой (21) и пользуются обычно для нахождения величины Q^*. При этом приходится предварительно определять функцию источников S, которая различна для разных источников излучения, действующих на среду. Для нахождения же величины Q^* по формуле (15) при любых источниках излучения достаточно знать лишь одну функцию P, которая не зависит от источников излучения. В этом состоит большое преимущество формулы (15) перед формулой (21).

Следует еще отметить, что входящая в формулу (15) величина P^* в некоторых случаях может быть найдена без знания функции P. Как мы помним, величина P^* представляет собой долю фотонов, выходящих из среды при заданных источниках излучения. Для некоторых же типов источников излучения эта доля непосредственно выражается через введенные в теорию рассеяния света различные вспомогательные функции, характеризующие выходящее из среды излучение. Поэтому при таких источниках излучения и величина Q^* выражается через упомянутые вспомогательные функции.

Одномерная полубесконечная среда. Полученные выше формулы мы сейчас применим к одномерной полубесконечной среде. При этом предположим, что при элементарном акте рассеяния фотоны испускаются с одинаковой вероятностью в обе стороны и их частота не меняется.

Обозначим через $P(\tau)$ вероятность выхода из среды фотона, поглощенного на оптической глубине τ. Легко получить, что функция $P(\tau)$ определяется интегральным уравнением

$$P(\tau)=\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty e^{-|\tau-t|}P(t)\,dt+\frac{\lambda}{2}e^{-\tau}. \tag{22}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(\tau) = (1-k)\,e^{-k\tau}, \tag{23}$$

где $k = \sqrt{1-\lambda}$.

Знание функции $P(\tau)$ дает нам возможность определить среднее число рассеяний фотона, поглощенного на любой оптической глубине τ. Подставляя выражение (23) в формулы (4), (8) и (9), получаем

$$Q(\tau) = \frac{1-(1-k)\,e^{-k\tau}}{1-\lambda}, \tag{24}$$

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{2k}(1+k+\lambda\tau), \tag{25}$$

$$Q_2(\tau) = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{2k}\,[1+(1-k)\,\tau]\,\frac{e^{-k\tau}}{1-(1-k)\,e^{-k\tau}}. \tag{26}$$

Применим эти формулы в виде примера к случаю, когда фотон поглощается на границе среды. Полагая в них $\tau = 0$, имеем

$$Q(0) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \tag{27}$$

$$Q_1(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}+1\right), \tag{28}$$

$$Q_2(0) = \frac{1}{1-\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{2}\right). \tag{29}$$

Мы видим, что полученные формулы приводят к весьма различным значениям средних чисел рассеяний фотонов. Например, при $\lambda = 0.99$ для фотонов, выходящих из среды, среднее число рассеяний равно $Q_1(0) = 5.5$, для гибнущих фотонов аналогичное число составляет $Q_2(0) = 50.5$, а для всех рассматриваемых фотонов оно равно $Q(0) = 10$.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда фотон поглощается на большой оптической глубине. Если $\lambda < 1$ и τ достаточно велико, то из формул (24) и (26) следует

$$Q(\tau) \simeq Q_2(\tau) \simeq \frac{1}{1-\lambda}. \tag{30}$$

В данном случае величина $Q(\tau)$ обусловлена в основном гибелью фотонов.

Для величины $Q_1(\tau)$ при больших τ формула (25) дает

$$Q_1(\tau) \simeq \frac{\lambda\tau}{2\sqrt{1-\lambda}}. \tag{31}$$

Таким образом, среднее число рассеяний фотонов, поглощенных на большой оптической глубине τ и выходящих из среды, пропорционально τ. При этом если оптическая глубина очень велика, то среднее число рассеяний для выходящих из среды фотонов будет гораздо больше, чем для гибнущих фотонов.

Для рассматриваемой среды можно также легко найти средние числа рассеяний фотонов при любых источниках излучения. Допустим, например, что источники излучения находятся вне среды и на её границу падает излучение интенсивности I_0. Тогда мы будем иметь $f(\tau) = I_0 e^{-\tau}$ и

$$P^* = \int_0^\infty P(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau = \frac{1-k}{1+k}. \tag{32}$$

Подставляя выражение (32) в формулы (15), (16) и (17), получаем

$$Q^* = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1\right), \tag{33}$$

$$Q_1^* = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \tag{34}$$

$$Q_2^* = \frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{2(1-\lambda)}. \tag{35}$$

Из приведенных в этом разделе формул видно, что в случае чистого рассеяния (то есть при $\lambda = 1$) среднее число рассеяний фотонов в полубесконечной среде бесконечно велико (вне зависимости от расположения источников излучения).

Одномерная среда конечной оптической толщины. Рассмотрим теперь одномерную среду оптической толщины τ_0. Вероятность выхода из среды фотона, поглощенного на оптической глубине τ, через границу $\tau = 0$ обозначим через $p(\tau)$. Величина $p(\tau)$ определяется интегральным уравнением

$$p(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} e^{-|\tau-t|}\, p(t)\, dt + \frac{\lambda}{2} e^{-\tau}, \tag{36}$$

а полная вероятность выхода из среды фотона, поглощенного на оптической глубине τ, равна

$$P(\tau) = p(\tau) + p(\tau_0 - \tau). \tag{37}$$

Решение уравнения (36) имеет вид

$$p(\tau) = (1-k)\, e^{-k\tau}\, \frac{1 - re^{-2k(\tau_0 - \tau)}}{1 - r^2 e^{-2k\tau_0}}, \tag{38}$$

где r — коэффициент диффузного отражения от полубесконечной среды, то есть

$$r = \frac{1-k}{1+k}. \tag{39}$$

При $\lambda = 1$ получаем

$$p(\tau) = \frac{1 + \tau_0 - \tau}{2 + \tau_0}. \tag{40}$$

На основании формул (37) и (38) находим

$$P(\tau) = \frac{1-k}{1 + re^{-k\tau_0}} \left(e^{-k\tau} + e^{-k(\tau_0 - \tau)}\right). \tag{41}$$

При $\lambda = 1$, как и следовало ожидать, $P(\tau) = 1$.

Подстановка (41) в (8) дает следующее выражение для среднего числа рассеяний фотона, поглощенного на оптической глубине τ:

$$Q(\tau) = \frac{1}{k^2}\left[1 - \frac{1-k}{1 + re^{-k\tau_0}} \left(e^{-k\tau} + e^{-k(\tau_0 - \tau)}\right)\right]. \tag{42}$$

При $\lambda = 1$ имеем

$$Q(\tau) = 1 + \frac{1}{2}[\tau_0 + \tau(\tau_0 - \tau)]. \tag{43}$$

При помощи функции $Q(\tau)$ можно найти среднее число рассеяний фотона при произвольных источниках излучения. В виде примера предположим, что источники излучения распределены в среде равномерно, то есть $g(\tau) = 1$. Тогда получаем

$$Q^* = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} Q(\tau)\, d\tau. \tag{44}$$

Подставляя (42) в (44), находим

$$Q^{*} = \frac{1}{k^{2}}\left[1 - \frac{2(1-k)}{k\tau_0} \cdot \frac{1-e^{-k\tau_0}}{1+re^{-k\tau_0}}\right], \tag{45}$$

а при $\lambda = 1$

$$Q^{*} = 1 + \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0^2}{12}. \tag{46}$$

При нахождении среднего числа рассеяний фотонов, выходящих из среды, в отличие от случая $\tau_0 = \infty$, можно рассматривать выход фотона как через одну границу, так и через другую. Допустим, что фотон был поглощен на оптической глубине τ и после диффузии в среде выходит через границу $\tau = 0$. Тогда по аналогии с формулой (4) можно написать, что фотон испытывает в среднем $\lambda \frac{\partial \ln p(\tau)}{\partial \lambda}$ рассеяний, где $p(\tau)$ определяется уравнением (36). При произвольных источниках излучения среднее число рассеяний фотонов, выходящих через границу $\tau = 0$, равно

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\tau_0} f(\tau)\lambda \frac{\partial p(\tau)}{\partial \lambda} d\tau}{\int_0^{\tau_0} f(\tau)\, p(\tau)\, d\tau}. \tag{47}$$

Вводя обозначение

$$I = \int_0^{\tau_0} f(\tau)\, p(\tau)\, d\tau, \tag{48}$$

мы можем переписать формулу (47) в виде

$$\bar{z} = \lambda \frac{\partial \ln I}{\partial \lambda}. \tag{49}$$

Очевидно, что величина I представляет собой интенсивность излучения, выходящего из среды через границу $\tau = 0$.

Формула (49) была получена В. А. Амбарцумяном [2]. В работе М. Л. Тер-Микаеляна [3] по этой формуле были определены средние числа рассеяний фотонов, диффузно-пропущенных и диффузно-отраженных одномерной средой.

Обозначая

$$z(\tau) = \lambda \frac{\partial p(\tau)}{\partial \lambda}, \tag{50}$$

вместо формулы (47) имеем

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\tau_0} f(\tau) z(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} f(\tau) p(\tau) d\tau}. \tag{51}$$

Для определения же функции $z(\tau)$ путем дифференцирования (36) по λ находим уравнение

$$z(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau - t|} z(t)\, dt + p(\tau). \tag{52}$$

Формула (51) вместе с уравнениями (36) и (52) были раньше получены другим способом автором [1]. Из указанных уравнений были определены функции $p(\tau)$ и $z(\tau)$, а затем по формуле (51) — величина $\bar{z}$ для различных источников излучения.

В дальнейшем С. А. Каплан и В. Н. Сиверс [4] составили и решили уравнения, определяющие функции $p(\tau)$ и $z(\tau)$ для одномерной среды с движущейся границей.

Для одномерной среды конечной оптической толщины можно также найти (как это было сделано выше для полубесконечной среды) среднее число рассеяний, испытываемых гибнущими фотонами, однако на этом мы не будем останавливаться.

Ленинградский государственный
университет

NUMBER OF SCATTERINGS OF DIFFUSING PHOTONS. I

V. V. SOBOLEV

Basic formulae determining the mean number of scatterings of photons diffusing in an absorbing and scattering medium are given. Expressions for the numbers of scatterings of photons absorbed in the medium and escaping from it are found separately. The formulae are applied to the case of one-dimensional medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН АрмССР, 8, 101, 1948.
3. *М. А. Тер-Микаелян*, ДАН АрмССР, 8, 149, 1948.
4. *С. А. Каплан, В. Н. Сиверс*, Астрон. ж., 37, 821, 1960.