АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 МАРТ, 1966 ВЫПУСК 1

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНЫХ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ

Поступила 6 декабря 1965
Исправлена 31 января 1966

Коротко рассмотрена гравитационная неустойчивость анизотропных моделей. Показано, что коэффициент усиления начальных неоднородностей в анизотропных моделях значительно больше, чем в моделях Фридмана. Обсуждается возможность образования космических объектов в анизотропных моделях за счет гравитационной неустойчивости.

1. В настоящее время общепринятой является космологическая теория расширяющейся Вселенной, основанная на моделях Фридмана. При этом естественно предполагать, что на ранних стадиях расширения вещество было однородным, а космические объекты возникли в ходе расширения в результате гравитационной неустойчивости. Вопрос о гравитационной неустойчивости моделей Фридмана хорошо изучен (см., например, [1, 2]). Возмущения, заданные на достаточно раннем этапе расширения, могут привести к образованию космических объектов [3]. Для того, чтобы в теории Фридмана к настоящему моменту успели образоваться такие объекты, начальные возмущения приходится задавать на очень раннем этапе, при плотностях много больше ядерной. При этом трудно объяснить возникновение начальных неоднородностей. Очень интересные попытки построения таких теорий, предпринятые в работах [2, 4] не дают вполне удовлетворительных результатов.

В последнее время появился ряд работ [5—7], в которых построено несколько однородных анизотропных космологических моделей типа модели Гекмана-Шюкинга [8]. На современном этапе расширения эти модели могут с большой точностью совпадать с моделями Фридмана. Однако, на ранних этапах расширения анизотропия сильно меняет свойства моделей.

В настоящей работе рассматривается гравитационная неустойчивость анизотропных моделей. Показано, что коэффициент усиления начальных неоднородностей в анизотропных моделях значительно больше, чем в моделях Фридмана. Сделанные оценки показывают, что в этих моделях гравитационная неустойчивость может привести к образованию космических объектов большого масштаба, вплоть до галактик и скоплений галактик.

2. Коротко напомним основные результаты работ [1, 2], касающиеся гравитационной неустойчивости. Будем рассматривать только квазиэвклидову модель Фридмана.

Квадрат интервала можно записать в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - b^2(t)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2], \tag{1}$$

где c — скорость света.

В зависимости от уравнения состояния вещества, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&P = 0; && b = b_0 t^{2/3}; && \varkappa E = \frac{4}{3}\frac{c^2}{t^2};\\
&P = E/3; && b = b_0 t^{1/2}; && \varkappa E = \frac{3}{4}\frac{c^2}{t^2};\\
&P = E; && b = b_0 t^{1/3}; && \varkappa E = \frac{1}{3}\frac{c^2}{t^2};
\end{aligned} \tag{2}$$

где P — давление, E — плотность энергии, $\varkappa = 8\pi G$, G — гравитационная постоянная Ньютона.

Разлагая возмущения в интеграл Фурье, например

$$\delta E = \int e^{i(k_1x + k_2y + k_3z)}\,\delta E_k\,dk_1dk_2dk_3$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2,$$

получим

$$P = 0: \qquad \frac{\delta E_k}{E} = C_1E^{1/2} + C_2E^{-1/3}; \tag{3}$$

$$P = E/3: \qquad \frac{\delta E_k}{E} \approx C_1 E^{-1/2} + C_2 E^{-1/6}; \tag{4}$$

при $\qquad \dfrac{ckt}{b} = \dfrac{ct}{\lambda} \ll 1, \qquad \lambda = \dfrac{b}{k}$ — длина волны возмущения

$$P = E: \qquad \frac{\delta E_k}{E} \simeq C_1 E^{-2/3} + C_2 E^{-2/3} \ln E, \tag{5}$$

также при $\qquad \dfrac{ckt}{b} = \dfrac{ct}{\lambda} \ll 1;$

3. Аналогичную задачу можно рассматривать в анизотропных моделях. Также ограничимся квазиэвклидовыми моделями, поскольку только они асимптотически при $t \to \infty$ приближаются к моделям Фридмана. Квадрат интервала можно записать в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - b^2 (dx^2 + dy^2) - a^2 dz^2. \tag{6}$$

Постоянные Хаббла $\beta = \dfrac{d \ln b}{dt}$ в плоскости (x, y) и $\alpha = \dfrac{d \ln a}{dt}$ по оси z не совпадают. Возможно как $\alpha > \beta$, так и $\beta > \alpha$. В зависимости от уравнения состояния вещества и от соотношения между постоянными Хаббла α и β получаем различные модели:

$$P = 0: \qquad b = b_0 t^{2/3}; \qquad a = a_0 \frac{t - t_0}{t^{1/3}}; \qquad \varkappa E = \frac{4}{3} \frac{c^2}{t (t - t_0)}. \tag{7}$$

Причем, $\quad \alpha < \beta \quad$ при $\quad t_0 < 0; \quad \alpha > \beta \quad$ при $\quad t_0 > 0.$

$$P = E/3: \quad b = b_0 \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}; \; a = \frac{a_0}{\eta (1 - \eta^2)}; \quad \varkappa E = \frac{3c^2}{f_0^2} \frac{(1 - \eta^2)^4}{\eta^4}; \tag{8}$$

$$t = \frac{f_0}{4} \left[\eta \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right]; \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \qquad \alpha < \beta.$$

Второе решение (с $\alpha > \beta$) соответствует $1 \leqslant \eta < \infty$ (при этом $b_0 \to -b_0$, $a_0 \to -a_0$).

$$P = E:\quad b = b_0 t^{\nu};\quad a = a_0 t^{1-2\nu};\quad \varkappa E = \nu(2-3\nu)\, t^{-2} \qquad (9)$$
$$0 \leqslant \nu \leqslant {}^2/_3.$$

Если $0 \leqslant \nu \leqslant {}^1/_3$, то $\alpha > \beta$, если ${}^1/_3 \leqslant \nu \leqslant {}^2/_3$, то $\alpha < \beta$. Подробнее эти решения проанализированы в [7]. Возмущения также можно разлагать в интеграл Фурье, например

$$\delta E = \int e^{i(k_1 x + k_2 y + lz)}\, \delta E_{k,l}\, dk_1 dk_2 dl$$
$$k^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

В анизотропных моделях в первом порядке теории возмущений возникают пять линейно-независимых типов возмущения плотности (два в изотропных моделях). К возмущениям плотности приводят и вращение вокруг оси, лежащей в плоскости (x, y), и гравитационные волны, распространяющиеся в этой плоскости. Лишь вращение вокруг оси симметрии z и гравитационные волны, распространяющиеся вдоль оси z, не приводят к возмущениям плотности.

Рассмотрим конкретно рост возмущений плотности в различных моделях, ограничиваясь наиболее быстро нарастающими членами. Как общее свойство всех трех моделей отметим, что возмущения при $\alpha < \beta$ нарастают быстрее, чем при $\alpha > \beta$. Видимо, это связано с аксиальной симметрией задачи. Можно ожидать, что при отказе от аксиальной симметрии возмущения плотности будут нарастать быстрее, чем в рассмотренных здесь случаях с $\alpha < \beta$.

4. На ранних этапах расширения применимо уравнение состояния $P = E$. Решение можно искать в виде ряда по степеням $t \sim E^{-1/2}$. Наиболее быстро нарастающие компоненты возмущения плотности можно записать в виде

$$\frac{\delta E_{k,l}}{E} \simeq C_1 E^{\nu-1} + C_2 E^{-2\nu}. \qquad (10)$$

Изотропному решению соответствует $\nu = {}^1/_3$, что дает $\dfrac{\delta E_{k,l}}{E} \sim E^{-2/3}$ в соответствии с (5). Наибольшей анизотропии соответствуют $\nu = 0$ и $\nu = {}^2/_3$. При этом, однако, $E = 0$, то есть мир пустой. Если, тем не менее, для оценки максимально возможной скорости роста возмущений положить в (10) $\nu \simeq 0$, $\nu \simeq {}^2/_3$, то получим

$$\frac{\delta E_{k,l}}{E} \sim E^{-1/3} \quad \text{при} \quad \nu = {}^2/_3, \quad \alpha < \beta \tag{11a}$$

$$\frac{\delta E_{k,l}}{E} \sim E^{-1} \quad \text{при} \quad \nu = 0, \quad \alpha > \beta. \tag{11b}$$

Возмущения нарастают заметно быстрее, чем в изотропной модели, причем тем быстрее, чем больше анизотропия.

5. Рассмотрим модель с уравнением состояния $P = E/3$. Поскольку она также применима на ранних стадиях расширения, то решение также можно искать в виде ряда по степеням $1/E^{1/4}$. Возмущения плотности нарастают по закону

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim E^{-3/4} \quad \text{при} \quad \alpha < \beta \tag{12a}$$

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim E^{-1} \quad \text{при} \quad \alpha > \beta. \tag{12b}$$

Возмущения нарастают значительно быстрее, чем в изотропной модели $\left(\frac{\delta E_k}{E} \sim E^{-1/2}\right)$.

6. Подобные результаты получаются и для модели Гекмана-Шюкинга ($P = 0$). На ранних стадиях расширения ($t \ll -t_0$, или $t - t_0 \ll t_0$ соответственно) получаем

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim E^{-5/6} \quad \text{при} \quad \alpha < \beta \quad t_0 < 0 \tag{13a}$$

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim E^{-1} \quad \text{при} \quad \alpha > \beta \quad t_0 > 0. \tag{13b}$$

На поздних стадиях расширения ($t \gg |t_0|$) возмущения нарастают как в модели Фридмана $\left(\frac{\delta E}{E} \sim E^{-1/3}\right)$. Рассматривая возмущения с большой длиной волны

$$\varepsilon = \frac{k^2 c^2 t_0^2}{b_0^2 t_0^{4/3}} \ll 1, \qquad \delta = \frac{l^2 c^2 t_0^2}{a_0^2 t_0^{4/3}} \ll 1,$$

можно показать, что возмущения плотности нарастают по закону

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim \frac{t^{5/3}}{t - t_0} \quad \text{при} \quad t_0 < 0 \quad \alpha < \beta \tag{14a}$$

$$\frac{\delta E_{kl}}{E} \sim \frac{t - t_0}{t^{1/3}} \qquad \text{при} \qquad t_0 > 0 \qquad \alpha > \beta \tag{14b}$$

Формулы (14a, b) совпадают с (13a, b) при $t \ll -t_0$, $t - t_0 \ll t_0$ соответственно, и с (3) при $t \gg |t_0|$. Машинные расчеты, проведенные для ε, $\delta = 1$, 10, 10^3, 10^6 подтверждают, что закон (14a, b) имеет место при любых ε и δ.

7. Коэффициент усиления возмущений плотности в модели Гекмана-Шюкинга может быть значительно больше, чем в модели Фридмана. В модели Фридмана при изменении плотности от E_1 до E_2 коэффициент усиления возмущения плотности

$$\Sigma_{\text{ф}} = (E_1/E^2)^{1/3}. \tag{15a}$$

В модели Гекмана-Шюкинга предположим, что при $E = E_1$ $t \ll -t_0$ (при $t_0 < 0$), или $t - t_0 \ll t_0$ (при $t_0 > 0$), тогда как при $E = E_2$ $t \gg |t_0|$. Коэффициент усиления возмущений соответственно равен

$$\Sigma_- = \frac{E_1^{5/3}}{E_2^{1/3} E_0^{4/3}} \qquad \text{при} \qquad t_0 < 0 \qquad (\alpha < \beta) \tag{15b}$$

$$\Sigma_+ = \frac{E_1}{E_2^{1/3} E_0^{2/3}} \qquad \text{при} \qquad t_0 > 0 \qquad (\alpha > \beta), \tag{15c}$$

где

$$E_0 = \frac{c^2}{6\pi G t_0^2}.$$

Принимая $E_1/c^2 \simeq 10^{11}$ *г/см*^{3}, $E_2/c^2 \simeq 10^{-29}$ *г/см*^{3}, получим $\Sigma_{\text{ф}} \simeq 10^{40/3}$. Для Σ_+, Σ_- в зависимости от t_0 получаем

Таблица 1

t_0	1 *сек*	100 *сек*	10^4 *сек*	10^{15} *сек*	10^{16} *сек*	10^{17} *сек*
Σ_-	10^{25}	$10^{91/3}$	$10^{107/3}$	10^{65}	$10^{203/3}$	$10^{211/3}$
Σ_+	$10^{59/3}$	$10^{67/3}$	10^{25}	$10^{119/3}$	10^{41}	$10^{127/3}$

8. Рассмотрим возможную модель образования космических объектов. В качестве примера возьмем „холодную" модель ранних стадий эволюции Вселенной [9]. А. Д. Сахаровым [4] были сделаны оценки квантовых флуктуаций плотности в этой модели, а в работе [10] сделаны некоторые оценки термодинамических флуктуаций плотности. За

счет квантовых флуктуаций в изотропных моделях могли бы образоваться объекты с массой $M \sim 10^{5} M_{\odot}$. За счет термодинамических флуктуаций—лишь объекты с массой $\sim 10^{-25} M_{\odot}$, причем предельная масса $\sim \Sigma_{\phi}^{3/4}$. В анизотропных моделях коэффициент усиления начальных возмущений значительно больше, чем в изотропных, и поэтому даже термодинамических флуктуаций плотности может оказаться достаточно [10] для образования галактик и скоплений галактик в моделях с $\alpha > \beta$. Можно ожидать, что квантовые флуктуации в анизотропных моделях также значительно превосходят термодинамические и поэтому смогут привести к образованию галактик и скоплений галактик и в моделях с $\alpha > \beta$.

В последнее время появились серьезные аргументы в пользу „горячей" модели начальных стадий эволюции Вселенной. И в этом случае учет возможной анизотропии расширения может оказаться важным при построении теории образования космических объектов.

9. В работах [6, 7] предложен ряд анизотропных моделей с однородным магнитным полем. Обсудим вкратце возможное влияние магнитного поля на рост возмущений.

На ранних стадиях расширения, при уравнениях состояния $P = E$ и $P = E/3$, магнитное поле сильно меняет зависимость невозмущенной метрики от времени при $\alpha < \beta$ и замедляет рост возмущений. Судя по характеру невозмущенного решения, можно думать, что возмущения плотности нарастают не быстрее, чем $\frac{\delta E}{E} \sim E^{-1}$. Тем не менее, если магнитное поле достаточно мало, то закон нарастания возмущений (14a, b) и величины Σ_{+} и Σ_{-} изменятся не сильно. Однако магнитное поле будет оказывать стабилизирующее воздействие и замедлит рост коротковолновых возмущений. Для хаотического магнитного поля такая задача рассматривалась в рамках моделей Фридмана [11]. На ранних стадиях, пока магнитное поле еще однородно, оно будет препятствовать сжатию в плоскости (x, y). На более поздних стадиях, когда магнитное поле достаточно запутается, его стабилизирующее действие скажется и по оси z. Видимо, в этом случае даже при уравнении состояния $P = 0$ существует критическая длина волны, зависящая от соотношения плотности энергии вещества и магнитного поля, типа критической длины волны Джинса.

Пользуюсь случаем поблагодарить Я. Б. Зельдовича за постоянное внимание и интерес к работе.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

A GRAVITATIONAL INSTABILITY OF ANISOTROPIC HOMOGENEOUS SOLUTIONS

A. G. DOROSHKEVICH

Gravitational instability of anisotropic models is considered briefly. It is shown that the amplification factor of initial inhomogeneouties is much greater in anisotropic models than in the models of Friedmann. The possibility of formation of cosmic objects due to gravitational instability in the anisotropic models is discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, УФН, 80, 391, 1963.
2. *Я. Б. Зельдович*, Advances in Astronomy and Astrophysics, 3, 241, 1965.
3. *И. Д. Новиков*, ЖЭТФ, 46, 686, 1964.
4. *А. Д. Сахаров*, ЖЭТФ, 49, 345, 1965.
5. *А. С. Компанеец, А. С. Чернов*, ЖЭТФ, 47, 1939, 1964.
6. *Я. Б. Зельдович*, ЖЭТФ, 48, 986, 1965.
7. *А. Г. Дорошкевич*, Астрофизика, 1, 255, 1965.
8. *O. Heckmann, E. Shücking*, XI Conceil Solvay, Bruxelles, 1958.
9. *Я. Б. Зельдович*, Вопросы космогонии, 9, 234, 1964; ЖЭТФ, 43, 1561, 1962.
10. *А. Г. Дорошкевич* (в печати).
11. *А. Д. Чернин*, Астрон. ж. (в печати),