АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 МАРТ, 1966 ВЫПУСК 1

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 21 февраля 1966

Рассматривается нелинейная задача переноса излучения в плоско-параллельном слое конечной толщины, если этот слой состоит из атомов двух типов — рассеивающего и поглощающего. Посредством перехода к реальной оптической глубине решение задачи сводится к решению нелинейного интегрального уравнения собственно-Гаммерштейнова типа и определению значения параметра y_0 из уравнения (21).

При решении нелинейных задач переноса излучения в среде конечной толщины, состоящей из плоско-параллельных слоев, часто бывает полезным вместо предельной оптической глубины* точки пользоваться реальной. При этом зависимость между реальной и предельной оптической глубиной, так же как значение полной реальной оптической толщины среды, остается сначала неопределенной. Ее можно найти после решения задачи для неопределенного значения этого параметра и для любой зависимости реальной оптической глубины от предельной. Введенный В. А. Амбарцумяном метод самосогласованных оптических глубин позволяет в некоторых случаях линеаризовать задачу нелинейного переноса, используя в качестве независимой переменной реальную оптическую глубину (см. [1] и [4]). Рассмотрим одну нелинейную задачу, где введение указанной переменной, хотя и не линеаризует ее, но существенно упрощает задачу, сводя ее к нелинейному интегральному уравнению собственно-Гаммерштейнова типа.

* В нелинейных задачах теории переноса реальная оптическая глубина данной точки зависит от поля излучения и может быть определена лишь после решения всей задачи. *Предельной оптической глубиной точки* называется ее реальная оптическая глубина в случае, когда все интенсивности излучений стремятся к нулю. Точно так же можно говорить о полной реальной и предельной оптических толщинах слоя.

Пусть в плоско-параллельном слое равномерно распределены атомы двух типов. Атомы первого типа имеют два стационарных состояния и способны рассеивать кванты определенной частоты. Выбрав соответственно единицу длины, мы можем сделать коэффициент отрицательного поглощения на один возбужденный атом равным $a = \frac{g_1}{g_2}$. Обозначим далее через $b_1 = \frac{c}{2\pi}\frac{g_1}{g_2}\sigma$ коэффициент спонтанного излучения, где g_1, g_2 — статистические веса соответствующих состояний, через $\beta = b + b_1$ — коэффициент перехода $2 \to 1$ вследствие спонтанного и других типов излучения*). Индикатриса рассеяния предполагается сферической.

Атомы второго типа способны поглощать кванты и преобразовывать их в другие виды энергии, возвращаясь в начальное состояние. Пусть $\alpha(\rho)$ — коэффициент поглощения атомом второго типа, где ρ — плотность излучения в единичном интервале частот.

Обозначим через τ предельную оптическую глубину переменной точки и через τ_0 — полную предельную оптическую толщину слоя (считая только атомы первого типа, если все эти атомы находятся в основном состоянии).

Пусть в среде создается стационарное поле излучения вследствие падения на левую границу среды излучения, распределение которого по направлениям описывается интенсивностью $I_0(\eta)$, где η — косинус угла падения.

Уравнения переноса имеют следующий вид:

$$\eta\frac{\partial I(\tau, \eta)}{\partial\tau} = -I[1 - P(\tau)] - I\alpha(\rho) + IaP + \frac{b}{2}P \tag{1}$$

$$-\eta\frac{\partial F(\tau, \eta)}{\partial\tau} = -F[1 - P(\tau)] - F\alpha(\rho) + FaP + \frac{b}{2}P, \tag{2}$$

где $I(\tau, \eta)$, $F(\tau, \eta)$ — интенсивности излучения соответственно вправо и влево на предельной оптической глубине τ,

$$\rho(\tau) = \frac{2\pi}{c}\int\limits_0^1 [I(\tau, \eta) + F(\tau, \eta)]\,d\eta, \tag{3}$$

$P = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$ — доля атомов первого типа в возбужденном состоянии.

---

*) Здесь всюду единица длины выбрана таким образом, чтобы коэффициент положительного поглощения на один атом первого типа, находящийся в нормальном состоянии, был равен единице. Этот коэффициент внутри спектральной линии будем условно принимать постоянным.

Введем обозначение

$$q(\tau) = 1 + \alpha(\rho) - (a+1)P. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (2) примут следующий вид:

$$\eta \frac{\partial I}{\partial \tau} = -Iq + \frac{b}{2} P \tag{1'}$$

$$-\eta \frac{\partial F}{\partial \tau} = -Fq + \frac{b}{2} P. \tag{2'}$$

Условие стационарности для атомов первого типа дает

$$[1-(a+1)P]\rho = \frac{2\pi}{c}\beta P,$$

или

$$(q-\alpha)\rho = \frac{2\pi}{c}\beta P. \tag{5}$$

Из (1′) и (2′), используя условия

$$I(0, \eta) = I_0(\eta) \quad \text{и} \quad F(\tau_0, \eta) = 0,$$

получим

$$I(\tau, \eta) = I_0(\eta)\, e^{-\frac{Q(\tau)}{\eta}} + \frac{b}{2}\int_0^{\tau} P(x)\, e^{-\frac{Q(\tau)-Q(x)}{\eta}} \frac{dx}{\eta} \tag{6}$$

$$F(\tau, \eta) = \frac{b}{2}\int_{\tau}^{\tau_0} P(x)\, e^{-\frac{Q(x)-Q(\tau)}{\eta}} \frac{dx}{\eta}, \tag{7}$$

где

$$Q(\tau) = \int_0^{\tau} q(x)\, dx; \tag{8}$$

Складывая (6) и (7), умножая на $\frac{2\pi}{c}$ и интегрируя по η от 0 до 1, получим

$$\rho(\tau) = \rho_0(\tau) + \frac{\pi b}{c}\int_0^{\tau_0} P(x)\, E_i\,|\,Q(\tau) - Q(x)\,|\, dx, \tag{9}$$

или

$$\rho(\tau) = \rho_0(\tau) + \frac{\pi b}{c}\int_0^{\tau_0} \frac{P(x)}{q(x)}\, E_i\,|\,Q(\tau) - Q(x)\,|\, dQ(x), \tag{10}$$

где

$$\rho_0(\tau) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 I_0(\eta) e^{-\frac{Q(\tau)}{\eta}} d\eta. \tag{11}$$

Из (4) и (5) можно получить

$$\frac{P}{q} = \frac{c}{2\pi} \frac{\rho}{\alpha(\rho)\left|\frac{c}{2\pi}(a+1)\rho+\beta\right|+\beta}. \tag{12}$$

Подставим (12) в (10)

$$\rho(\tau) = \rho_0(\tau) + \lambda \int_0^{\infty} \frac{\rho(x)}{\alpha(\rho)[a_1\rho+1]+1} E_i|Q(\tau)-Q(x)|\,dQ(x), \tag{13}$$

где

$$\lambda = \frac{b}{2\beta} \quad \text{и} \quad a_1 = \frac{a+1}{\beta}\frac{c}{2\pi}.$$

Так как

$$\beta \geqslant b, \quad \text{то} \quad \lambda \leqslant \frac{1}{2}.$$

В уравнении (13) производим замену переменного, обозначив

$$Q(\tau) = y \qquad Q(x) = z \tag{14}$$

$$\rho(\tau) = U(y); \qquad \rho(x) = U(z). \tag{15}$$

Обозначим еще

$$Q(\tau_0) = y_0 \tag{16}$$

(y_0 пока неопределенное число).

Тогда уравнение (13) примет следующий вид:

$$U(y) = U_0(y) + \lambda \int_0^{y_0} \frac{U(z)}{\alpha(U)[a_1U+1]+1} E_i|y-z|\,dz, \tag{17}$$

где

$$U_0(y) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 I_0(\eta) e^{-\frac{y}{\eta}} d\eta. \tag{18}$$

Уравнение (17) является интегральным уравнением собственно-Гаммерштейнова типа (ядро $E_i|y-z|$ симметричное, положительное).

Так как $\left|\dfrac{\lambda U}{\alpha(U)[a_1U+1]+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}|U|$ в силу того, что $\alpha \geqslant 0$ и

$\lambda < \frac{1}{2}$, уравнение (17) имеет единственное решение. Отметим, что последовательные приближения при решении этого уравнения и соответствующего линейного уравнения (при $\alpha \equiv 0$) представляют примерно одинаковую трудность. Введение новой переменной $y = Q(\tau) = \int\limits_0^{\tau} q(x)\,dx$ означает переход от предельной оптической глубины к реальной. Если τ является характеристикой количества атомов первого типа, то y зависит еще от поля излучения и от наличия атомов второго типа. Сходство такой замены переменной с методом самосогласованных оптических глубин проявляется еще в том, что значение полной реальной оптической толщины среды y_0 при решении интегрального уравнения остается неопределенным. Решение $U(y, y_0)$ зависит от этого параметра y_0. Значение этого параметра можно определить следующим образом:

Из (4) и (5) получается

$$q(\tau)\frac{a_1\rho + 1}{\alpha(\rho)[a_1\rho + 1] + 1} = 1. \tag{19}$$

Интегрируя (19) по τ от 0 до τ_0, получим

$$\int\limits_0^{\tau_0} \frac{a_1\rho + 1}{\alpha(\rho)[a_1\rho + 1] + 1}\,dQ(\tau) = \tau_0, \tag{20}$$

или

$$\int\limits_0^{y_0} \frac{a_1 U(y, y_0) + 1}{\alpha(U)[a_1 U + 1] + 1}\,dy = \tau_0. \tag{21}$$

Из (23) y_0 определяется как неявная функция от τ_0.

Из уравнений (6), (7) и (12) интенсивности диффузно-отраженного и проходящего излучений $I(\tau_0, \eta)$ и $F(0, \eta)$ легко выражаются через уже полностью определенную функцию $U(y)$:

$$I(\tau_0, \eta) = I_0(\eta)\, e^{-\frac{y_0}{\eta}} + \lambda \int\limits_0^{y_0} \frac{U(z)}{\alpha(U)[a_1 U + 1] + 1}\, e^{-\frac{y_0 - z}{\eta}}\,\frac{dz}{\eta} \tag{22}$$

и

$$F(0, \eta) = \lambda \int\limits_0^{y_0} \frac{U(z)}{\alpha(U)[a_1 U + 1] + 1}\, e^{-\frac{z}{\eta}}\,\frac{dz}{\eta}. \tag{23}$$

Очевидно, что можно аналогичным образом рассматривать данную задачу при несферической индикатрисе рассеяния.

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство, а также А. Б. Нерсесяну за полезные советы.

Институт математики и механики
АН Арм ССР

ON ONE PROBLEM OF THE RADIATION OF NON-LINEAR TRANSFER

N. B. YENGIBARIAN

The non-linear problem of the radiation transfer in the plane-parallel layers of finite depth, when these layers consist of atoms of two types — scattering and absorbing — is considered.

With the help of transition to real optical depth the solution of problem led to a solution of integral equation of self-Hammershtein's type and determination of the parameter's y_0 from equation (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, 39, 159, 1964.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956.
3. *Трикоми*, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
4. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 297, 1965.