

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРЕНОСА
ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 20 июня 1965

В статье рассматриваются два частных случая нелинейной трехмерной задачи переноса излучения, решение которых на основании метода самосогласованных оптических глубин, введенного В. А. Амбарцумяном в работе [2], сводится к решению некоторой линейной задачи и нахождению значения параметра u_0 из уравнения (6) в первой задаче и u_1^0 , u_2^0 из (21) и (22)—во второй задаче.

В статье [1] В. А. Амбарцумяном показано, что принцип инвариантности иногда с успехом применяется при решении нелинейных задач переноса излучения. В другой статье В. А. Амбарцумяна [2] на основании идеи о самосогласованных оптических глубинах разработан новый подход к нелинейным задачам: сперва решается в общем виде линейная задача для любой зависимости реальных оптических глубин (в разных частотах) от некоторой предельной (когда все атомы находятся в основном состоянии), а затем эта зависимость подбирается так, чтобы полученное поле излучения приводило к возбуждению атомов, которое соответствует той же зависимости.

В данной статье рассматриваются две трехмерные нелинейные задачи, которые вышеуказанным способом можно свести к линейным.

а) *Монохроматическое рассеяние в плоско-параллельной среде.* Пусть имеется плоско-параллельный слой, состоящий из атомов одного сорта, каждый из которых может находиться в двух состояниях— в нормальном и возбужденном. Пусть n_1 и n_2 будут числа атомов в соответствующих состояниях в единице объема. Пусть, наконец, на одну из плоских границ слоя падает излучение, интенсивность которого описывается выражением $J_0(\gamma)$. Связь между предельной опти-

ческой толщиной $d\tau$ и реальной оптической толщиной dy слоя с линейной толщиной dl при данном режиме возбуждения атомов определяется формулами

$$d\tau = (n_1 + n_2) kdl \quad (1)$$

$$dy = \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) kdl, \quad (2)$$

где g_1 и g_2 — статистические веса соответствующих состояний.

Из (1) и (2) будем иметь

$$d\tau = \frac{\frac{n_1}{n_2} + 1}{\frac{n_1}{n_2} - \frac{g_1}{g_2}} dy. \quad (3)$$

Условие стационарности дает

$$n_1 \rho - n_2 \frac{g_1}{g_2} (\rho + \sigma) = 0; \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \left(1 + \frac{\sigma}{\rho} \right), \quad (4)$$

где ρ — плотность излучения в единичном интервале частот на данной глубине.

Подставляя (4) в (3), получим

$$d\tau = \left[1 + \frac{g_1 + g_2}{g_1 \sigma} \rho \right] dy. \quad (5)$$

Интегрируя это равенство по τ от 0 до τ_0 , получим

$$\tau_0 = y_0 + \frac{g_1 + g_2}{g_1 \sigma} Q(y_0), \quad (6)$$

где $Q(y_0) = \int_0^{y_0} \rho(y) dy$, τ_0 — полная предельная, а y_0 — полная реальная оптическая толщина среды. Наша первая цель — определить значение y_0 . Функция $\rho(y)$ удовлетворяет хорошо известному из линейной теории интегральному уравнению (см. например [3])

$$\rho(y) = \rho_0(y) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{y_0} \rho(x) E_1 |y - x| dx, \quad (7)$$

где

$$\rho(y_0) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_0(\eta) e^{-\frac{y}{\eta}} d\eta. \quad (8)$$

Достаточно из уравнения (7) определить $Q(y_0)$, подставляя которое в (6), получим уравнение относительно y_0 .

Пусть функция $B(y, \eta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$B(y, \eta) = e^{-\frac{y}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{y_0} B(x, \eta) E_I |y - x| dx. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (9) отличаются только свободными членами, причем свободный член уравнения (7) является суперпозицией членов типа свободного члена уравнения (9), поэтому решение уравнения (7) является суперпозицией решений уравнения (9) при различных значениях η , то есть

$$\rho(y) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_0(\eta) B(y, \eta) d\eta. \quad (10)$$

Для определения функции $Q(y_0)$ можно также использовать следующее уравнение, которое эквивалентно уравнению (7):

$$\begin{aligned} Q(y) = & \int_0^1 \eta J_0(\eta) (1 - e^{-\frac{y}{\eta}}) d\eta + \frac{\lambda}{2} Q(y_0) \int_0^{y_0} E_I (y - x) dx + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_0^{y_0} Q(x) [E_I |y - x| - E_I(x)] dx. \end{aligned} \quad (11)$$

б) *Один частный случай полихроматического рассеяния.* Рассмотрим плоско-параллельный слой, состоящий из атомов, имеющих три состояния, но второе состояние является метастабильным (переход 1—2 запрещен). Пусть на одну из плоских границ слоя падают излучения, соответствующие переходам 1—3 и 2—3, описываемые выражениями $J_1(\eta)$ и $J_2(\eta)$.

Вследствие отсутствия циклических переходов имеет место чистое рассеяние в каждой частоте.

Находим зависимость между реальными оптическими толщинами в каждой частоте и предельной оптической толщиной в первой частоте (то есть оптической толщиной в первой частоте в случае, когда

все атомы находятся в первом состоянии) слоя с линейной толщиной dl .

$$d\tau = (n_1 + n_2 + n_3) k_1 dl; \quad (12)$$

$$dy_i = \left(n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3 \right) k_i dl \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

Условия стационарности дают

$$n_1 \rho_1 - n_3 \frac{g_1}{g_3} (\rho_1 + \tau_1) = 0, \quad (14)$$

или

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{g_1}{g_3} \left(1 + \frac{\tau_1}{\rho_1} \right); \quad \frac{n_1}{n_3} - \frac{g_1}{g_3} = \frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}. \quad (15)$$

Из (13) будем иметь

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{g_1}{g_3} \right) k_1}{\left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{g_2}{g_3} \right) k_2}; \quad (16)$$

или, используя (15), получим

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1} k_1}{\frac{g_2}{g_3} \frac{\tau_2}{\rho_2} k_2}; \quad \frac{dy_1}{dy_2} = \frac{g_1 \tau_1 k_1 \rho_2}{g_2 \tau_2 k_2 \rho_1}. \quad (17)$$

Из (12) и (13) (при $i = 1$) имеем

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3} dy_1 = \frac{\frac{n_1}{n_3} + \frac{n_2}{n_3} + 1}{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}} dy_1 = \\ &= \frac{\frac{g_1}{g_3} \left(1 + \frac{\tau_1}{\rho_1} \right) + \frac{g_2}{g_3} \left(1 + \frac{\tau_2}{\rho_2} \right) + 1}{\frac{g_1}{g_3} \frac{\tau_1}{\rho_1}} dy_1 = \\ &= \left[\frac{g_1 + g_2 + g_3}{\tau_1 g_1} \rho_1 + 1 + \frac{g_2}{g_1} \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] dy_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая (17), из (18) получаем

$$d\tau = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_1 g_1} \rho_1 dy_1 + dy_1 + \frac{k_1}{k_2} dy_2. \quad (19)$$

Аналогичным образом получаем

$$d\tau = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_2 g_2} \frac{k_1}{k_2} \rho_2 dy_2 + \frac{k_1}{k_2} dy_2 + dy_1. \quad (20)$$

Интегрируя (19) и (20) от 0 до τ_0 , получим

$$\tau_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_1 g_1} Q_1(y_1^0) + \frac{k_1}{k_2} y_2^0 + y_1^0 \quad (21)$$

$$\tau_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3}{\sigma_2 g_2} \frac{k_1}{k_2} Q_2(y_2^0) + \frac{k_1}{k_2} y_2^0 + y_1^0, \quad (22)$$

где

$$Q_k(y) = \int_0^y \rho_k(x) dx \quad (k = 1, 2). \quad (23)$$

Функции $\rho_k(y)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\rho_k(y) = \frac{2\pi}{c} \int_0^1 J_k(\eta) e^{-\frac{y}{\eta}} d\eta + \frac{1}{2} \int_0^{y_k^0} \rho_k(x) E_1|y-x| dx \quad (k=1, 2). \quad (24)$$

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики
АН АрмССР

ON ONE PROBLEM OF THE RADIATION NON-LINEAR TRANSFER

N. B. YENGIBARIAN

Two particular cases of non-linear three-dimensional problem of the radiation transfer are considered. The solutions of this problem are brought to the solution of some linear problem by Ambartsumian's method of self-coordinated optical depths [2]. The parameters of these solutions y_0 from the equation (6) and y_1^0 , y_2^0 from equations (21) and (22) are found.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **38**, 225, 1964.
2. В. А. Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, **39**, 159, 1964.
3. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии, М., 1956.