АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 1 СЕНТЯБРЬ, 1965 ВЫПУСК 3

ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОЕ ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЫ

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 4 июля 1965

Рассмотрена проблема диффузного отражения света от бесконечно глубокой одномерной среды, состоящей из атомов, обладающих тремя энергетическими уровнями. Все возможные переходы между этими уровнями предполагаются разрешенными. Учтены эффекты „отрицательного поглощения". Рассмотрен случай, когда среда освещается стационарными потоками излучения F_l в частотах ν_l $(l = 1, 2, 3)$, соответствующих переходам $3 \to 1$, $3 \to 2$, $2 \to 1$. Под влиянием падающих потоков происходит перераспределение атомов по уровням, приводящее к изменению прозрачности среды. Нелинейность рассмотренной задачи обусловлена тем, что параметры, характеризующие оптические свойства среды и процесс рассеяния, не являются постоянными величинами, а определяются полем излучения.

С помощью равенств (1), вытекающих из законов сохранения чисел квантов каждой спектральной серии, задача сведена к определению потока $H_1 = \varphi(F_l)$, отраженного от среды. С применением принципа инвариантности для $\varphi(F_l)$ — потока, отраженного в частоте ν_1, получено квазилинейное дифференциальное уравнение с частными производными. Решение этого уравнения дано в параметрической форме (16).

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных нелинейной теории рассеяния света в мутной среде [1—3]. Часть этих работ [2, 3] посвящена группе нелинейных проблем, относящихся к диффузному рассеянию в среде, состоящей из атомов, обладающих тремя энергетическими уровнями. Нелинейность этих задач связана с перераспределением атомов по уровням под влиянием стационарных потоков излучения, падающих на среду. В результате этого, иногда даже при незначительных изменениях значений падающих потоков излучения прозрачность среды для той или иной частоты может существенно измениться. Сложность указанных задач заставляла рассматривать частные случаи, когда тот или иной параметр, входящий

в задачу, предполагался близким к нулю. В этом случае появлялась возможность частичной линеаризации задачи.

В этой связи представляет особый интерес задача о диффузном отражении света от бесконечно глубокой одномерной среды. Такая задача ранее уже ставилась в [3], но опять-таки для того частного случая, когда второй уровень являлся метастабильным и учитывались лишь переходы $2 \to 1$ в результате ударов второго рода. Задача в такой постановке относительно проста в том смысле, что в этом случае приходится иметь дело с полем излучения лишь двух частот и потому основные параметры, характеризующие оптические свойства среды и процесс рассеяния, зависят от плотностей излучения, соответствующих этим двум частотам. В настоящей работе мы рассмотрим эту задачу при достаточно общих предположениях относительно атомов среды. Будем рассматривать атомы, имеющие три уровня энергии ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$), причем будем предполагать, что все переходы между ними являются разрешенными. Мы учтем также эффекты „отрицательного поглощения". В то же время будем пренебрегать явлениями превращения энергии возбуждения этих атомов и испускаемых ими квантов в тепло и обратно. Иными словами, будем рассматривать случай „чистого полихроматического рассеяния".

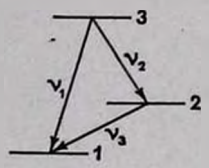

Рис. 1.

Пусть бесконечно глубокий одномерный слой, состоящий из таких атомов, освещается потоками излучения F_i ($i = 1, 2, 3$), соответственно для i-той частоты. Для краткости тут мы пользуемся обозначениями ($\nu_{13} = \nu_1$, $\nu_{23} = \nu_2$, $\nu_{12} = \nu_3$) (рис. 1). Поскольку мы рассматриваем стационарную задачу, то в каждой точке будет иметь место определенное распределение атомов по состояниям; при этом установится такой режим, когда слой будет отражать определенные стационарные потоки излучения. Нашей задачей будет найти эти отраженные потоки (H_1, H_2, H_3) как функции от потоков излучения (F_1, F_2, F_3), падающих на среду. Однако следует отметить, что для этого достаточно определить отраженный от среды поток в одной, какой-либо частоте (например, в первой), поскольку остальные могут быть

определены с помощью законов сохранения чисел квантов, которые в нашем случае приводят к равенствам

$$\frac{F_1}{h\nu_1}+\frac{F_2}{h\nu_2}=\frac{H_1}{h\nu_1}+\frac{H_2}{h\nu_2}; \qquad \frac{F_1}{h\nu_1}+\frac{F_3}{h\nu_3}=\frac{H_1}{h\nu_1}+\frac{H_3}{h\nu_3}. \tag{1}$$

В справедливости этих формул нетрудно убедиться и непосредственно. Действительно, проследим за судьбой какого-либо кванта частоты ν_1. После его поглощения атом, совершив переход $1\to3$, должен вернуться в первое состояние, совершив до этого возвращения, быть может, один или несколько (возможно даже много) переходов между состояниями 2 и 3. Возвращение в первое состояние обязательно должно сопровождаться излучением одного из квантов $h\nu_1$ или $h\nu_3$, хотя в промежутке могли излучаться и поглощаться кванты частоты ν_2, которые в данном случае нас не интересуют. Таким образом, вместо одного поглощенного кванта $h\nu_1$ будем иметь вновь излученный квант в одной из частот ν_1 и ν_3. Точно так же легко увидеть, что вместо одного поглощенного кванта $h\nu_3$ мы после возвращения атома в первое состояние вновь будем иметь один квант, соответствующий одной из частот ν_1 и ν_3. Таким образом, при всех подобных циклах переходов суммарное количество квантов поля в частотах ν_1 и ν_3 не будет меняться. Поскольку все процессы атомных переходов могут быть разбиты на циклы указанных типов, то вообще при рассматриваемых процессах сумма чисел квантов, соответствующих частотам ν_1 и ν_3, должна оставаться неизменной. А это значит, что общее число квантов в потоке, отраженном в этих двух частотах от бесконечно глубокой среды, должно быть равно числу квантов этих двух частот в падающем потоке. В этом как раз и заключается содержание второго из уравнений (1). Здесь следует подчеркнуть, что мы рассматриваем лишь явление диффузного полихроматического отражения, исключая тем самым возможность потока энергии, идущего из бесконечно глубоких слоев среды наружу. Общая формулировка законов сохранения числа квантов разных спектральных серий была дана В. А. Амбарцумяном в [4].

Теперь мы попытаемся написать уравнение для $H_1=\varphi(F_1, F_2, F_3)$ — потока излучения, отраженного от среды в первой частоте. Чтобы получить уравнение для искомой функции $\varphi(F_i)$ (для краткости будем писать один аргумент), воспользуемся принципом инвариантности. Обобщение этого принципа на случай нелинейных задач было дано в [2]. В нелинейном случае приходится иметь дело не с коэффициентом отражения, как это было в линейной теории, а с

функцией отражения. Согласно принципу инвариантности, вид этой функции не изменится, если к отражающей среде прибавить слой бесконечно малой оптической толщины. Таким образом, поскольку отражательная способность среды не меняется, то потоки излучения, отраженные от прежней и новой границы среды, мы можем приравнять друг другу (рис. 2):

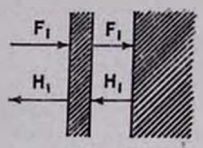

Рис. 2.

$$H_1 = H_1'(1-\tau_1) + \lambda_1 \frac{F_1 + H_1}{2}\tau_1, \tag{2}$$

где мы ограничивались случаем изотропного рассеяния, когда коэффициент x, заменяющий в одномерном случае индикатрису рассеяния, равен $^1/_2$. Здесь и далее через λ_i мы будем обозначать вероятность „выживания" кванта, соответствующего i-той частоте при элементарном акте рассеяния. Мы пишем о вероятности „выживания", поскольку, вообще говоря, данный элемент объема может производить перераспределение энергии между частотами и полное количество квантов, излучаемое объемом в некоторой частоте, может отличаться от полного количества поглощенных квантов. В дальнейшем мы дадим уточнение физического смысла величин λ_i. Через τ_i будем обозначать оптическую толщу прибавленного бесконечно тонкого слоя, соответствующую частоте ν_i.

Кроме того, если через F_i' обозначить значения потоков, идущих вглубь от границы прибавленного слоя, то аналогично можно написать

$$F_i' = F_i(1-\tau_i) + \lambda_i \frac{H_i + F_i}{2}\tau_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Принимая во внимание, что согласно принципу инвариантности $H_1' = \varphi(F_i')$, будем иметь из (2)

$$\varphi(F_i) = \varphi\left[F_i(1-\tau_i) + \lambda_i \frac{F_i + H_i}{2}\tau_i\right] - H_1\tau_1 + \lambda_1 \frac{F_1 + H_1}{2}\tau_1.$$

Разлагая далее в ряд по степеням малой величины τ_1, придем к нужному дифференциальному уравнению:

$$\left(-F_1+\lambda_1\frac{F_1+H_1}{2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}+\left(-F_2+\lambda_2\frac{F_2+H_2}{2}\right)\frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}+$$
$$+\left(-F_3+\lambda_3\frac{F_3+H_3}{2}\right)\frac{\tau_3}{\tau_1}\frac{\partial\varphi}{\partial F_3}-H_1+\lambda_1\frac{H_1+F_1}{2}=0. \qquad (3)$$

Однако следует учесть, что входящие в уравнение величины λ_i, а также отношения τ_2/τ_1 и τ_3/τ_1 зависят от поля излучения и их значения не могут быть заданы заранее. Их мы определим ниже. Коэффициенты при втором и третьем членах этого уравнения можно преобразовать, если учесть, что избыток поглощенных квантов первой частоты по сравнению с количеством излученных в этой же частоте квантов связан с трансформацией последних в кванты второй частоты:

$$\left(-F_2+\lambda_2\frac{F_2+H_2}{2}\right)\frac{\tau_2}{\tau_1}=(\lambda_2-1)\frac{F_1+H_2}{2}\frac{\tau_2}{\tau_1}-\frac{F_1-H_1}{2}\frac{\tau_2}{\tau_1}=$$
$$=(1-\lambda_1)\frac{F_1+H_1}{2}\frac{\nu_2}{\nu_1}+\frac{F_1-H_1}{2}\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\tau_2}{\tau_1},$$

где мы воспользовались также законами сохранения (1). Аналогичные выкладки можно сделать для коэффициента при $\partial\varphi/\partial F_3$ в (3). Тогда окончательно наше дифференциальное уравнение примет вид

$$\left[-(1-\lambda_1)\frac{F_1+H_1}{2}-\frac{F_1-H_1}{2}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial F_1}+\left[(1-\lambda_1)\frac{F_1+H_1}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{F_1-H_1}{2}\frac{\tau_2}{\tau_1}\right]\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{\partial\varphi}{\partial F_2}+\left[(1-\lambda_1)\frac{F_1+H_1}{2}+\frac{F_1-H_1}{2}\frac{\tau_3}{\tau_1}\right]\frac{\nu_3}{\nu_1}\frac{\partial\varphi}{\partial F_3}- \qquad (4)$$
$$-(1-\lambda_1)\frac{F_1+H_1}{2}+\frac{F_1-H_1}{2}=0.$$

Нам остается теперь вычислить и подставить в уравнение (4) выражения для λ_1, τ_2/τ_1 и τ_3/τ_1.

Напишем условия стационарности чисел атомов, находящихся в единице объема в первом и третьем состояниях:

$$n_1(B_{12}\rho_2+B_{13}\rho_1)=n_2\frac{g_1}{g_2}B_{12}(\sigma_3+\rho_3)+n_3\frac{g_1}{g_3}B_{13}(\sigma_1+\rho_1)$$
$$n_1B_{13}\rho_1+n_2B_{23}\rho_2=n_3\left\{\frac{g_1}{g_3}B_{13}(\sigma_1+\rho_1)+\frac{g_2}{g_3}B_{23}(\sigma_2+\rho_2)\right\}, \qquad (5)$$

где n_i — число атомов в единице объема в i-том состоянии, ρ_i —

плотность излучения с частотой ν_i, которая выражается через соответствующие потоки $\rho_i = \frac{F_i + H_i}{c}$; B_{ik} — эйнштейновский коэффициент вероятности перехода атома с нижнего состояния i в более высокие состояния k; как и обычно $\sigma_i = \frac{8\pi h \nu_i^3}{c^3}$, а g_i — обозначают статистические веса соответствующих состояний (см. примечание).

Вероятность „выживания кванта" первой частоты при элементарном акте рассеяния определяется следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{n_3 B_{31} \sigma_1}{B_{13}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_2\right)\rho_1}.$$

Заметим, что коэффициент λ_1 может в определенных случаях превосходить единицу. Если говорить точно, это не вероятность „выживания", а среднее число квантов первой частоты, испускаемых вместо каждого поглощенного кванта той же частоты. Для отношений оптических толщ, как известно, будем иметь

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{B_{23}\nu_2\Delta\nu_1}{B_{13}\nu_1\Delta\nu_2}\,\frac{n_2 - \frac{g_2}{g_3} n_3}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3}; \qquad \frac{\tau_3}{\tau_1} = \frac{B_{12}\nu_3\Delta\nu_1}{B_{13}\nu_1\Delta\nu_3}\,\frac{n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2}{n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3},$$

где $\Delta\nu_i$ — эффективные ширины соответствующих линий поглощения. С помощью условий стационарного состояния (5) для величин τ_2/τ_1, τ_3/τ_1 и $1 - \lambda_1$, которые входят в наше основное уравнение (4), окончательно будем иметь

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = k'\,\frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)};$$

$$\frac{\tau_3}{\tau_1} = \varkappa'\,\frac{\bar{\rho}_2 - (1-n)\bar{\rho}_1 + n}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)}; \qquad 1 - \lambda_1 = b\,\frac{1 + \bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_3 - \frac{\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_1}}{\bar{\rho}_2 + n(\bar{\rho}_3 + 1)},$$

где введены обозначения: $\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i}{\sigma_i}$; $k' = \frac{g_2 B_{23}\nu_2\Delta\nu_1}{g_1 B_{13}\nu_1\Delta\nu_2}$;

$$\varkappa' = \frac{B_{12}\nu_3\Delta\nu_1}{B_{13}\nu_1\Delta\nu_3}; \qquad b = \frac{\sigma_3 B_{12}}{\sigma_3 B_{12} + \sigma_1 B_{13}}; \qquad n = \frac{\sigma_3 B_{12}(g_1\sigma_1 B_{13} + g_2\sigma_2 B_{23})}{\sigma_2 g_2 B_{23}(\sigma_1 B_{13} + \sigma_3 B_{12})}.$$

Для того, чтобы подставить полученные выражения в наше уравнение (4), мы должны величины потоков излучения, входящие в пос-

леднее, выразить в новых единицах, которые связаны с прежними энергетическими единицами посредством следующих равенств:

$$\overline{F}_i = \frac{F_i}{c\sigma_i}; \qquad \overline{H}_i = \frac{H_i}{c\sigma_i}$$

Если для удобства теперь ввести новые обозначения $\overline{F}_i = y_i$; $\overline{H}_i = z_i$, то окончательно уравнение (4) примет вид

$$\begin{gathered}
[-b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) - (y_1 - z)(\overline{\rho}_1 + n\overline{\rho}_3 + n)]\frac{\partial z}{\partial y_1} + \\
+ \{b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) + k'(y_1 - z)[(1-n)\overline{\rho}_1 + n\overline{\rho}_3]\} l_2 \frac{\partial z}{\partial y_2} + \\
+ \{b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) + \varkappa'(y_1 - z)[\overline{\rho}_2 + (1-n)\overline{\rho}_1 + n]\} l_3 \frac{\partial z}{\partial y_3} - \\
- b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) + (y_1 - z)(\overline{\rho}_2 + n\overline{\rho}_3 + n) = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\overline{\rho}_1 = y_1 + z;$

$\overline{\rho}_2 = 2y_2 + l_2(y_1 - z);$ $\qquad l_2 = \frac{\sigma_1\nu_2}{\sigma_2\nu_1} = \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2};$ $\qquad l_3 = \frac{\nu_1^2}{\nu_3^2}.$

$\overline{\rho}_3 = 2y_3 + l_3(y_1 - z)$

Таким образом, задача теперь сводится к решению квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными для функции, представляющей искомую зависимость отраженного от среды потока первой частоты $\overline{H}_1$, от падающих на среду потоков $\overline{F}_i$. Ближайшая наша цель—найти три первых интеграла характеристической системы, соответствующей этому уравнению.

Напишем уравнения характеристик:

$$\frac{dy_1}{(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) - (y_1 - z)(\overline{\rho}_2 + n\overline{\rho}_3 + n)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{l_2}dy_2}{b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) + k'(y_1 - z)[(1-n)\overline{\rho}_1 + n\overline{\rho}_3]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{l_3}dy_3}{b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) + \varkappa'(y_1 - z)[\overline{\rho}_2 - (1-n)\overline{\rho}_1 + n]} =$$

$$= \frac{dz}{b(\overline{\rho}_1 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_2 + \overline{\rho}_1\overline{\rho}_3 - \overline{\rho}_2\overline{\rho}_3) - (y_1 - z)(\overline{\rho}_2 + n\overline{\rho}_3 + n)}.$$

Из этой системы нетрудно получить следующие четыре уравнения, которыми мы будем пользоваться при нахождении первых интегралов:

$$b(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_1=(y_1-z)(\bar{\rho}_2+n\bar{\rho}_3+n)\,d(y_1-z) \tag{7}$$

$$b(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_2+k(y_1-z)\,[(1-n)\bar{\rho}_1+n\bar{\rho}_3]\,d(y_1-z)=0 \tag{8}$$

$$\begin{gathered} b(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_1+k'(y_1-z)\,[(1-n)\bar{\rho}_1+n\bar{\rho}_3]\,d\bar{\rho}_1= \\ =-(y_1-z)(\bar{\rho}_2+n\bar{\rho}_3+n)\,\frac{2}{l_2}\,ay_2 \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} b(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_3+\varkappa(y_1-z)\,[\bar{\rho}_2+n\bar{\rho}_3+n- \\ -(1-n)\bar{\rho}_1-n\bar{\rho}_3]\,d(y_1-z)=0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $k=l_2k'$; $\varkappa=l_3\varkappa'$.

В последнем уравнении (10) выражение в квадратных скобках мы получили простым преобразованием выражения, стоящего в числителе у τ_3/τ_1. Возможность такого преобразования связана с существованием простой связи между оптическими толщами τ_i

$$\tau_1=\frac{\tau_2}{k'}+\frac{\tau_3}{\varkappa'},$$

которая следует из тождества

$$n_1-\frac{g_1}{g_3}\,n_3=\left(n_1-\frac{g_1}{g_2}\,n_2\right)+\frac{g_1}{g_2}\left(n_2-\frac{g_2}{g_3}\,n_3\right).$$

Умножая (8) на $\varkappa$ и (10) на k и затем складывая, получим

$$\begin{gathered} \varkappa b(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_2+kb(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2+\bar{\rho}_1\bar{\rho}_3-\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3)\,d\bar{\rho}_3+ \\ +\varkappa k(y_1-z)(\bar{\rho}_2+n\bar{\rho}_3+n)\,d(y_1-z)=0. \end{gathered}$$

Сопоставляя с (7), получим первый из трех независимых интегралов

$$I_1(\bar{\rho}_1,\ \bar{\rho}_2,\ \bar{\rho}_3)=\bar{\rho}_1+\frac{\bar{\rho}_2}{k}+\frac{\bar{\rho}_3}{\varkappa}=C_1.$$

Из (9) и (7) имеем

$$(\bar{\rho}_2+n\bar{\rho}_3+n)\,d\bar{\rho}_2+k\,[(1-n)\bar{\rho}_1+n\bar{\rho}_3]\,d\bar{\rho}_1=0.$$

Учитывая, что из первого интеграла

$$\varkappa d\bar{\rho}_2+kd\bar{\rho}_3+k\varkappa d\bar{\rho}_1=0,$$

придем ко второму интегралу

$$I_2(\bar{\rho}_1,\ \bar{\rho}_2,\ \bar{\rho}_3)=(\bar{\rho}_2+n)^2+k(1-n)\,\bar{\rho}_1^2-\frac{kn}{\varkappa}\,\bar{\rho}_3^2=C_2.$$

Для нахождения последнего, третьего интеграла преобразуем уравнение (8)

$$b d\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z)\frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3} d(y_1 - z) = 0. \tag{11}$$

Вместе с (7) будем иметь

$$b d\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z)\, d(y_1 - z) + kb\frac{n\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0$$

или же

$$b d\bar{\rho}_2 + k(y_1 - z)\, d(y_1 - z) + kb\bar{\rho}_3\frac{\bar{\rho}_3 - (1-n)\bar{\rho}_1 + n}{\bar{\rho}_2 + n\rho_3 + n} d\bar{\rho}_1 - \\ - kb\frac{n\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1\bar{\rho}_3 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0. \tag{12}$$

С другой стороны, умножив (11) на $\bar{\rho}_2$ и проделав аналогичные преобразования, получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 - k(y_1 - z)\, d(y_1 - z) - kb\frac{\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3 - n\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3 - \bar{\rho}_2\bar{\rho}_3}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0.$$

Складывая далее с (12), получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 + b d\bar{\rho}_3 + kb\bar{\rho}_3 d\bar{\rho}_1 + k(1-n)(y_1 - z)\, d(y_1 - z) - \\ - kb\bar{\rho}_3\frac{(1-n)\bar{\rho}_1 + n\bar{\rho}_3}{\rho_2 + n\rho_3 + n} d\bar{\rho}_1 = 0. \tag{13}$$

Но из (10) и (7) имеем

$$d\bar{\rho}_3 + \varkappa d\bar{\rho}_1 - \varkappa\frac{n\bar{\rho}_3 + (1-n)\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2 + n\bar{\rho}_3 + n} = 0.$$

Сопоставляя с (13), получим

$$b\bar{\rho}_2 d\bar{\rho}_2 + b d\bar{\rho}_3 + k(1-n)(y_1 - z)\, d(y_1 - z) - \frac{kb}{\varkappa}\bar{\rho}_3 d\bar{\rho}_3 = 0.$$

Теперь с помощью I_2 нетрудно получить третий из первых интегралов:

$$I_3(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = 2\bar{\rho}_2 + \frac{k}{b}(y_1 - z)^2 - k\bar{\rho}_1^2 - \frac{k}{\varkappa}\bar{\rho}_3^2 = C_3.$$

Для дальнейших вычислений удобно вместо I_2 взять другой интеграл, полученный посредством I_2 и I_3:

$$I_3(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) = \bar{\rho}_2^2 + k\bar{\rho}_1^2 + \frac{kn}{b}(y_1 - z)^2 = C_2'.$$

Уравнение

$$\Phi(I_1, I_2, I_3) = 0, \tag{14}$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов, в неявной форме дает общее решение дифференциального уравнения (6), являющегося основным уравнением нашей задачи. Однако наша физическая задача должна иметь одно единственное решение, и естественно, это решение должно быть частным случаем общего решения, определяемого из (14). Вместе с тем очевидно, что это частное решение должно определяться заданием начальных условий. Прежде, чем перейти к ним, заметим, что решение (14) можно написать также в параметрической форме:

$$I_1 = f_1(\zeta, \eta); \quad I_2 = f_2(\zeta, \eta); \quad I_3 = f_3(\zeta, \eta),$$

где f_1, f_2, f_3 — в общем случае произвольные функции своих аргументов. Эти функции мы должны определить из начальных условий. Для нахождения начальных условий рассмотрим то состояние, когда между падающими потоками имеет место соотношение

$$y_1 = \frac{2y_2y_3}{1 + 2y_2 + 2y_3}. \tag{15}$$

Исходя из физических соображений, можно утверждать, что в этом случае отраженный поток в каждой частоте будет равен соответствующему падающему потоку, то есть $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$. В самом деле, при этом условии все $\lambda_i = 1$, по крайней мере в нашем дополнительном слое τ_i. Следовательно, в каждой частоте будет происходить „чистое" рассеяние. Таким образом, будут удовлетворяться как уравнения стационарного состояния (5), так и принцип инвариантности. По существу это будет состояние, при котором во всей среде будет соблюдаться детальное равновесие, то есть положение дела в смысле отношений между потоками излучения не будет отличаться от термодинамического равновесия.

Итак, наши функции f_1, f_2, f_3 должны быть выбраны таким образом, чтобы при условии (15) имело место $z_1 = y_1$. Очевидно, эти условия удовлетворятся, если

$$f_1(\zeta, \eta) = \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} + \frac{\zeta}{k} + \frac{\eta}{\varkappa}$$

$$f_2(\zeta, \eta) = \zeta^2 + k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2$$

$$f_3(\zeta, \eta) = 2\zeta + k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2 - \frac{k}{\varkappa}\eta^2.$$

Поэтому частное решение дифференциального уравнения (6), удовлетворяющее нашим начальным условиям, будет иметь вид

$$y_1 + z + \frac{2y_2 + l_2(y_1 - z)}{k} + \frac{2y_3 + l_3(y_1 - z)}{\varkappa} = \frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta} + \frac{\zeta}{k} + \frac{\eta}{\varkappa}$$

$$[2y_2 + l_2(y_1 - z)]^2 + k(y_1 + z)^2 + \frac{kn}{b}(y_1 - z)^2 = \zeta^2 +$$

$$+ k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2 - \frac{k}{\varkappa}\eta^2. \tag{16}$$

$$2[2y_2 + l_2(y_1 - z)] + \frac{k}{b}(y_1 - z)^2 - k(y_1 + z)^2 - \frac{k}{\varkappa}[2y_3 + l_3(y_1 - z)]^2 =$$

$$= 2\zeta + k\left(\frac{\zeta\eta}{1 + \zeta + \eta}\right)^2 - \frac{k}{\varkappa}\eta^2.$$

Следует отметить, что все постоянные, входящие в решение задачи, зависят лишь от взаимного расположения энергетических уровней атома, потому все они являются наперед заданными числами для каждой среды, состоящей из атомов данного типа. Решение задачи заданное в таком виде, позволяет нам исследовать и построить зависимости z от падающих потоков y_i.

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

Примечание: Формула $\rho_i = \frac{F_i + H_i}{c}$ справедлива в одномерном случае. Мы могли бы, как известно, в качестве грубого приближения применить результаты решения одномерной задачи и к трехмерной проблеме. Однако, в трехмерной задаче с плоскопараллельными слоями

$$\rho_i = \frac{1}{c}\int I_i\, d\omega.$$

Этот интеграл может быть разбит на две части, в которых интегрирование будет производиться, соответственно, по внешней и по внутренней полусфере направлений. С другой стороны, учитывая, что

$$H_i = \int\limits_{2\pi} I_i \cos\theta\, d\omega; \qquad F_i = \int\limits_{(2\pi)^-} I_i \cos\theta\, d\omega,$$

где интегрирование ведется по соответствующим полусферам и заменяя среднее значение $\cos\theta$ на $^1/_2$, мы легко получим, что

$$\rho_l = \frac{2}{c}(F_l + H_l).$$

В связи с этим, в окончательные результаты вошли бы небольшие изменения. Однако в настоящей статье нашей целью было дать формальное решение одномерной задачи, и потому мы не рассматривали те изменения, которые необходимо будет внести для применения наших результатов к трехмерной задаче.

POLYCHROMATIC DIFFUSE REFLECTION OF LIGHT FROM AN INFINITELY DEEP ONE-DIMENSIONAL MEDIUM

A. G. NICOGHOSSIAN

The problem of diffuse reflection of light from an infinitely deep one-dimensional medium consisting of atoms with three energetic levels has been discussed. All possible transitions between these levels are assumed to be permitted. The effects of „negative absorption" were taken into account. The case of the illuminated medium by the radiation fluxes F_i with the frequencies ν_i ($i = 1, 2, 3$) corresponding to the transitions $3 \to 1$, $3 \to 2$, $2 \to 1$ has been considered. Under the influence of incident fluxes the redistribution of atoms between different states occurs bringing into the change of the medium transparency.

Nonlinearity of the considered problem is due to the fact that the parameters characterizing the optical properties of the medium and scattering process are not constant, but are determined by the radiation field.

By means of equalities (1) followed from the law of conservation of the quantum number in each spectral series the problem is reduced to the determination of the flux $\varphi(F_l) = H_1$, reflected from the medium in the frequency ν_1. Using the invariance principle for flux $\varphi(F_l)$, reflected in the frequency ν_1, the quasilinear differential equation with partial derivatives has been received. The solution of this equation is given in the parametrical form (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **39**, 159, 1964.
2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **38**, 225, 1964.
3. *А. Г. Никогосян*, ДАН Арм. ССР, **39**, 227, 1964.
4. *В. А. Амбарцумян*, Научные труды, т. I, 78, АН Арм. ССР, Ереван, 1960.