

КОЛЕБАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ СФЕРЫ

Г. А. ЛУПАНОВ

Поступила 10 апреля 1965

Исправлена 12 июня 1965

Указан более простой в сравнении с работой Чандрасекара [2] вывод уравнений пульсаций сферически-симметричных конфигураций в общей теории относительности. В качестве иллюстрации решения данного уравнения рассмотрена сингулярная ($\epsilon \sim 1/r^2$) сфера. Найдены частоты ее колебаний и условия неустойчивости.

1. *Уравнения сферически-симметричных колебаний в общей теории относительности.* Проведенное в последние годы исследование радиоисточников 3С 48, 3С 273 и ряда других показало, что они являются космическими объектами совершенно нового типа. Обладая светимостью, примерно на два порядка превышающей светимость обычной крупной галактики, они вместе с тем имеют в миллион раз меньшие размеры. Для объяснения этого явления Хойл и Фаулер [1] предложили гипотезу, согласно которой данные объекты находятся в состоянии коллапса, а выделяющаяся при этом гравитационная энергия служит источником их светимости. Для этого их масса должна быть порядка $10^8 \div 10^9 M_{\odot}$. В связи с этой гипотезой представляется интересным исследование устойчивости столь массивных звезд в рамках общей теории относительности.

Устойчивость равновесных состояний какой-либо системы, как известно, может быть исследована с помощью уравнений малых колебаний вблизи данного равновесного состояния. Подобные уравнения сферически-симметричных колебаний сферически-симметричных конфигураций были получены Чандрасекаром [2] и независимо с приложением к политропным шарам в [3].

Чандрасекар при выводе уравнения пульсаций наряду с уравнениями гравитационного поля использовал как дополнительное ус-

ловие требование сохранения числа барионов. Следует заметить, что наложение этого условия не является обязательным. Действительно, в уравнения гравитации из величин, характеризующих саму среду, входят только давление p и плотность энергии ε ; коэффициент Γ_1 [4] (именно при введении этого коэффициента Чандрасекару и понадобилось дополнительное условие) — отношение теплоемкостей, записанный в форме

$$\Gamma_1 = \frac{dp}{d\varepsilon} \cdot \frac{p + \varepsilon}{p} \quad (1)$$

также есть функция только p , ε и их дифференциалов. Поэтому достаточно лишь к возмущенным уравнениям Эйнштейна для случая сферически-симметричного распределения материи (см. [2]) добавить дифференциалы p и ε (также полученные из уравнений Эйнштейна), проделать соответствующие преобразования, как мы получим для пульсаций сферически-симметричных конфигураций уравнение

$$\begin{aligned} \sigma^2 l^{\lambda-1} (p + \varepsilon) \xi = & \frac{4}{r} \frac{dp}{dr} \xi - l^{-\frac{(\lambda+2)}{2}} \frac{d}{dr} \left[l^{\frac{3\lambda+1}{2}} \frac{\Gamma_1 p}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 l^{-1/2} \xi) \right] + \\ & + \frac{8\pi G}{c^4} l^\lambda p (p + \varepsilon) \xi - \frac{1}{p + \varepsilon} \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 \xi, \end{aligned} \quad (2)$$

полностью совпадающее с соответствующим уравнением Чандрасекара. Здесь ξ — лагранжево смещение, введенное с помощью равенств $\frac{\partial \xi}{\partial x^0} = v$, $v = \frac{dr}{dx^0}$; G — гравитационная постоянная, l' и l^λ соответствуют метрике пространства-времени в форме

$$ds^2 = l'^{(r)} dx^{c^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - l'^{(r)} dr^2. \quad (3)$$

Таким образом, введение дополнительной переменной $N(\varepsilon, p)$ — числа барионов на единицу объема — по существу не оправдано, а уравнение сохранения числа барионов вовсе не обязательно при выводе уравнений малых колебаний.

Введем в (2) относительное смещение

$$\eta = \frac{\xi l^{-1/2}}{r}. \quad (4)$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} - l^{\lambda-1} \frac{p + \varepsilon}{\Gamma_1 p} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^{c^2}} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{d\eta}{dr} \left[\frac{4}{r} + \frac{\Gamma_1'}{\Gamma_1} + \frac{p'}{p} + \frac{3v'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right] + \\ + \eta \left[\frac{3}{r} \frac{\Gamma_1'}{\Gamma_1} + \frac{3}{r} \frac{p'}{p} + \frac{9}{2} \frac{v'}{r} + \frac{3}{2} \frac{\lambda'}{r} + \frac{p + \varepsilon}{\Gamma_1 p} \left(\frac{v'}{r} + \frac{v'^2}{4} + \frac{l^\lambda - 1}{r^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

при помощи которого удобнее исследовать колебания сингулярной сферы.

2. *Колебания сингулярной сферы.* Будем называть сингулярной сферой решение уравнений общей теории относительности, описывающее сферически-симметричное распределение материи и имеющее особенность в центре при $r = 0$. Выбор такого решения как иллюстрации применения уравнения пульсаций обусловлен следующим. Как известно, решение уравнений гравитации даже в случае сферической симметрии и статики — задача довольно трудная. Решений в аналитическом виде насчитывается не более десятка [5]. Но даже среди них одни слишком громоздки и следовательно неудобны в математическом отношении, другие с трудом поддаются физической интерпретации. Наиболее удовлетворительными представляются неоднократно рассматривавшееся решение $\varepsilon = \text{const}$ и решение с особенностью типа $\sim 1/r^2$, которое мы и называем сингулярной сферой. Данное решение получено Толменом [6]; после ряда преобразований оно может быть записано в виде

$$l^2 = 2 - n^2 \quad (6a)$$

$$l^2 = \frac{(1+n)^4}{(2-n^2)16n^2} x^{2-2n} \left[1 - \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 x^{2n} \right]^2 \quad (6b),$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1-n^2}{2-n^2} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (6c)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} p = \frac{1}{R^2} \frac{(1-n)^2}{2-n^2} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{1-x^{2n}}{1-x^{2n} \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2}, \quad (6d)$$

где $x = r/R$ и R — радиус конфигурации.

Несмотря на наличие особой точки $r = 0$, где давление и плотность энергии обращаются в бесконечность, решение (6) приемлемо физически, поскольку оно дает конечную массу. Большое удобство (6) состоит в том, что оно позволяет изменением одного лишь параметра n переходить от нерелятивистских конфигураций к релятивистским. Рассмотрим, как меняется отношение центрального давления к центральной плотности при изменении n от единицы до нуля (при $n < 0$ и $n > 1$ (6) не имеет физического смысла). При $n \rightarrow 1$ имеем

$$p/\varepsilon \approx \frac{1-n}{2} \rightarrow 0, \text{ что соответствует нерелятивистскому приближению,}$$

при этом (6) переходит в соответствующее ($p \sim 1/r^2$) решение Ньютоновских уравнений. При $n = 1/2$ получаем $p/\varepsilon = 1/3$, что соответствует релятивистскому вырожденному (или фотонному) газу. Заметим,

что случай $n = 1/2$ интерпретирован Толменом. До недавнего времени считалось, что релятивизм в качестве предельного уравнения состояния вещества допускает $p = z/3$, однако Я. Б. Зельдовичем было показано [7], что имеют физический смысл и такие уравнения состояния, как например $p \cong z$. Легко видеть, что сингулярная сфера при $n \rightarrow 0$ соответствует $p_c \sim z_c$.

Перейдем теперь непосредственно к изучению колебаний сингулярной сферы. Уравнение колебаний может быть легко получено подстановкой (6) в (5). Как всегда в таких случаях, будем полагать, что все возмущения имеют зависимость от мирового времени x^0 в виде

$$e^{i\sigma x^0}, \quad (7)$$

где $\sigma^2 c^2$ — квадрат характеристической частоты, знак которого позволит нам судить об устойчивости или неустойчивости соответствующего равновесного состояния. Положим также $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial r} = 0$. Вообще гово-

ря, в реальных телах это условие не соблюдается (также как и решение (6) не является реальной моделью). Однако, поскольку нас интересуют эффекты, связанные с переходом к релятивизму, даже такая идеализация может оказаться полезной.

Уравнение колебаний будет иметь вид

$$\begin{aligned} & (1 - x^{2n}) [(1 + n)^2 - x^{2n} (1 - n)^2] \eta'' + \frac{1}{x} \eta' [(1 + n)^4 (5 - 3n) - \\ & - x^{2n} (1 + n)^2 (5 - n) (3n^2 - 2n + 3) + x^{4n} (1 - n)^2 (5 + n) (3n^2 + 2n + 3) - \\ & - x^{6n} (1 - n)^4 (5 + 3n)] + \frac{1}{x^2} \eta \left\{ \left[-3 (1 + n)^4 (3n - 1) + \frac{8}{\Gamma_1} (1 + n)^4 \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{2n} \left[-3 (1 - n) (1 + n)^2 (3n^2 - 2n + 3) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n) (1 + n)^2 (3 + n - n^2) + \frac{\sigma^2 R^2}{\Gamma_1} \frac{32n^2 (2 - n^2)^2}{1 - n} \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{4n} \left[3 (1 - n)^2 (1 + n) (3n^2 + 2n + 3) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n)^2 (1 + n) (3 - n - n^2) - \frac{\sigma^2 R^2}{\Gamma_1} \frac{32n^2 (2 - n^2)^2}{1 + n} \right] + \right. \\ & \quad \left. + x^{6n} \left[-3 (1 - n)^4 (1 + 3n) - \frac{8}{\Gamma_1} (1 - n)^4 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, задача свелась к определению собственных значений

$\alpha^2 c^2$ дифференциального уравнения (8) при следующих краевых условиях: 1. обращение в нуль возмущения в давлении δp при $r = R$; 2. конечность решения при $r = 0$. Последнее вытекает из того факта, что точка $x = 0$ является особой точкой нашего дифференциального уравнения и требование, чтобы решение оставалось конечным в этой точке, будет для него специального вида краевым условием.

Решить задачу точно в такой постановке не удастся. Тем не менее некоторые следствия (8) можно получить (в дальнейшем предполагается проведение численного интегрирования данного уравнения). В частности, посмотрим, какие ограничения необходимо наложить на параметры n и Γ_1 , чтобы получить конечное η при $x = 0$. Всякое ограниченное решение можно представить разложением по степеням малой величины (в данном случае $x = r/R \ll 1$).

Подставив в (8) $\eta = x^3$ и приравняв коэффициенты при наименьшей степени (x^{3-2}), имеем

$$\beta^2 + \beta(4 - 3n) + \left[\frac{8}{\Gamma_1} - 3(3n - 1) \right] = 0. \quad (9)$$

Корни квадратного уравнения (9) есть

$$\beta_{1,2} = -\frac{4 - 3n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4 - 3n}{2}\right)^2 - \left[\frac{8}{\Gamma_1} - 3(3n - 1) \right]}. \quad (10)$$

Для конечности решения необходимо, чтобы хотя бы один из корней (β_1 или β_2) был положительной величиной; из (10) легко видеть, что для этого требуется выполнение условия

$$[8/\Gamma_1 - 3(3n - 1)] \geq 0. \quad (11)$$

Нижняя граница Γ_1 , то есть значение $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$ при котором решение еще конечно для заданного n , есть

$$\Gamma_{1 \text{ крит.}} = \frac{8}{3(3n - 1)}. \quad (12)$$

Минимальное значение $\Gamma_{1 \text{ крит.}}$ имеет при $n \rightarrow 1$, то есть в слабо-релятивистском приближении, когда $\Gamma_{1 \text{ крит.}} = 4/3$, и затем возрастает с уменьшением n , то есть с увеличением релятивистских эффектов. При $n = 1/3$ $\Gamma_{1 \text{ крит.}} = \infty$, а при $n < 1/3$ вообще нет конечных решений при любом (даже бесконечном) Γ_1 .

Отметим, что при $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$ мы имеем в центре $\eta = \text{const}$.

Как известно, краевая задача, подобная нашей, может быть сведена к вариационной задаче, именно к отысканию минимума функционала (Чандрасекар [2]).

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \int_0^R l^{\frac{3\lambda-\nu}{2}} (p+\varepsilon) r^2 \xi^2 dr &= 4 \int_0^R l^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 \xi^2 dr + \\
+ \int_0^R l^{\frac{\lambda+3\nu}{2}} \frac{\Gamma_1 p}{r^2} \left[\frac{d}{dr} (r^2 l^{-\nu/2} \xi) \right]^2 dr &- \int_0^R l^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 \frac{r^2 \xi^2}{p+\varepsilon} dr + \\
+ \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^R l^{\frac{3\lambda+\nu}{2}} p (p+\varepsilon) r^2 \xi^2 dr.
\end{aligned} \quad (13)$$

С помощью той или иной пробной функции, удовлетворяющей граничным условиям, можно оценить первую гармонику колебаний сферически-симметричной конфигурации, в том числе и интересующей нас сингулярной сферы. В качестве такой пробной функции выберем

$$\xi l^{-\nu/2} = r. \quad (14)$$

Данная пробная функция соответствует постоянному вдоль всей конфигурации η и, следовательно, вблизи центра описывает случай $\Gamma_1 = \Gamma_{1 \text{ крит.}}$.

Квадрат частоты первой гармоники колебаний оказывается равным

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \frac{1-n^2}{R^2 20 (2-n^2)^2 (16-9n^2)} [9\Gamma_1 (3\pi^4 + 16n^2 + 51) - \\
- (33n^4 - 257n^2 + 8 \cdot 133)].
\end{aligned} \quad (15)$$

В слабoreлятивистском приближении имеем

$$\sigma^2 (n \rightarrow 1) = \frac{3(1-n)}{R^2} (3\Gamma_1 - 4), \quad (16)$$

для ультрарелятивистского газа

$$\sigma^2 (n = 1/2) = \frac{0.443 \Gamma_1 - 0.883}{R^2} \quad (17)$$

и для $p_c \sim \varepsilon_c$

$$\sigma^2 (n = 0) = \frac{0.358 \Gamma_1 - 0.834}{R^2}. \quad (18)$$

Заметим следующее. С помощью пробной функции (14) мы нашли лишь приближенное выражение для частот колебаний. Несмотря на это, получив в (15) $\sigma^2 \leq 0$, можно с уверенностью сделать заключение о неустойчивости. Дело в том, что наша вариационная задача сводится к отысканию минимума. Следовательно, результат $\sigma^2 \leq 0$,

полученный с помощью какой-либо пробной функции, удовлетворяющей всем необходимым условиям, означает, что σ^2 для функции, соответствующей минимуму функционала и являющейся решением нашей задачи, тем более отрицателен.

Ход кривых $\sigma^2(n)$ при $\Gamma_1 = \text{const}$ изображен на графике (рис. 1). Кривая $\Gamma_1 = 4/3$ целиком расположена в области неустойчивости, лишь при $n \rightarrow 1$, то есть в слабoreлятивистском приближении, она по касательной приближается к области устойчивости. Кривые с $2.32 < \Gamma_1 < 4/3$ имеют две ветви: одна, лежащая в окрестности $n = 0$, соответствует неустойчивым равновесным состояниям сингулярной сферы, другая, лежащая в окрестности $n = 1$, — устойчивым. При этом, как видно из графика, с увеличением Γ_1 допускаются все меньшие и

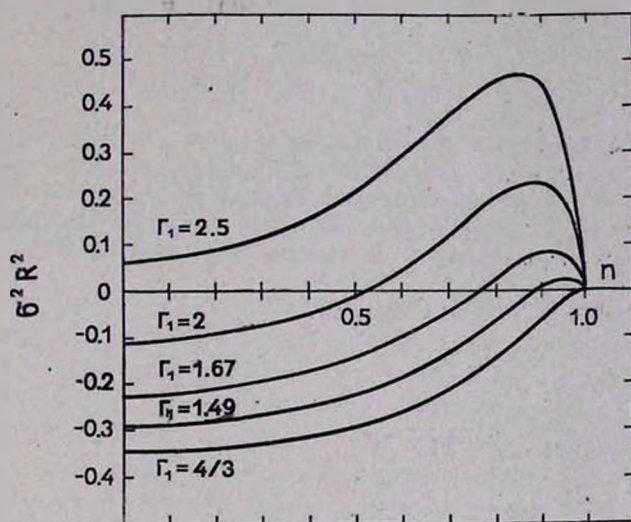


Рис. 1. Зависимость $\sigma^2 R^2$ от параметра n при $\Gamma_1 = \text{const}$.

меньшие значения n , при которых конфигурация устойчива. Иными словами, в устойчивых конфигурациях уменьшение релятивизма в уравнении состояния приводит к возможности все более сильных гравитационных эффектов (увеличение красного смещения). Кривые с $\Gamma_1 > 2.32$ целиком лежат в области $\sigma^2 > 0$. При этом, однако, нельзя с уверенностью заявить, что сингулярная сфера устойчива, в частности вблизи $n = 0$. Дело в том, что наше приближение с помощью пробной функции (14) наиболее неудовлетворительно именно вблизи $n = 0$, и у нас нет гарантии, что какая-либо другая пробная функция не даст здесь $\sigma^2 < 0$.

Автор признателен профессору С. А. Каплану за постановку задачи и ценные замечания в ходе работы.

Горьковский научно-исследовательский
радиофизический институт

SINGULAR SPHERE OSCILLATIONS

G. A. LUPANOV

The simple method (in comparison with the method of Chandrasekhar [2]) of derivation of the pulsation equation in general theory of relativity is found. The method is illustrated by considering the singular sphere ($\varepsilon \sim 1/r^2$). The frequencies and instability conditions are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Hoyle, W. Fowler, *Nature*, **197**, 533, 1963.
2. S. Chandrasekhar, *Ap. J.*, **140**, 417, 1964.
3. С. А. Каплан, Г. А. Лупанов, *Астрон. ж.*, **42**, № 2, 1965.
4. С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, М., 1962.
6. R. C. Tolman, *Phys. Rev.*, **55**, 364, 1939.
7. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ*, **41**, 1609, 1961.