АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 1 ИЮНЬ, 1965 ВЫПУСК 2

О РАССЕЯНИИ СВЕТА В ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

И. Н. МИНИН

Поступила 4 мая 1965

Рассмотрена задача о рассеянии света в однородной полубесконечной среде с изотропным рассеянием. Принято, что оптическая глубина в каждой точке среды изменяется с течением времени по экспоненциальному закону. Сделано применение полученных результатов к теории свечения новых звезд.

Теория нестационарного поля излучения развита достаточно полно только для случая, когда оптические свойства среды не изменяются с течением времени (см. [1—4]). Однако ряд задач теоретической астрофизики приводит к необходимости рассмотрения нестационарных процессов диффузии излучения в среде с переменными оптическими свойствами. Такого рода задачи возникают, например, при изучении нестационарных звезд.

В данной статье рассмотрена задача о свечении одномерной полубесконечной среды с изотропным рассеянием. Для решения задачи применяется вероятностный метод, введенный в теорию переноса лучистой энергии В. В. Соболевым [5]. При этом считается, что оптическая глубина в каждой точке среды изменяется с течением времени по экспоненциальному закону. Рассмотрена возможность применения полученных результатов к теории свечения новых звезд.

1. *Вероятность выхода кванта из среды.* Введем величину $p(\tau, t, t')\,dt$ — вероятность того, что световой квант, поглощенный на оптической глубине τ в момент времени t', выйдет из среды в промежутке времени от t до $t+dt$. Обозначим через t_1 среднее время пребывания кванта в поглощенном состоянии при элементарном акте рассеяния и рассмотрим случай, когда t_1 значительно превосходит среднее время пребывания кванта в пути между двумя последова-

тельными рассеяниями. Вместо переменной t будем в дальнейшем использовать новую переменную $u = \frac{t}{t_1}$. Тогда принятый закон изменения τ со временем запишется в виде

$$\tau(u') = \tau(u) e^{-\alpha(u'-u)}, \qquad (1)$$

где α — параметр. Кроме того, будем считать, что вероятность излучения кванта в интервале безразмерного времени от u до $u + du$ после его поглощения равна $e^{-u} du$. Для закона (1) вероятность выхода кванта не зависит явно от момента времени t' поглощения кванта, но конечно, эта вероятность зависит от t' через τ.

Составим уравнения для определения вероятности выхода кванта из среды $p(\tau, u)$. Поскольку величина $p(\tau, u)$ складывается из вероятности выхода кванта без рассеяний на пути и из вероятности выхода кванта после ряда рассеяний, находим с учетом (1) следующее интегральное уравнение

$$p(\tau, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-u-\tau e^{-\alpha u}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^u e^{-u'} du' \int_0^\infty e^{-|\tau e^{-\alpha u'} - \tau'|} p(\tau', u - u') d\tau', \qquad (2)$$

где λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния.

Уравнение (2) полностью определяет функцию $p(\tau, u)$. Отметим, что из уравнения (2) следует

$$p(\tau, 0) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau}. \qquad (3)$$

Получим теперь функциональное уравнение для $p(\tau, u)$, рассмотрев сначала выход кванта из среды с оптической глубины $\tau + \Delta\tau_0$. Для этого выход кванта с глубины $\tau + \Delta\tau_0$ представим как выход кванта с глубины τ с последующим прохождением его через дополнительный слой, оптическая толщина которого при $u = 0$ равна $\Delta\tau_0$. Вероятность выхода кванта из среды без рассеяния в дополнительном слое равна $p(\tau, u)(1 - \Delta\tau)$. Для получения вероятности выхода кванта из среды с рассеянием в дополнительном слое следует величину $p(\tau, u')\Delta\tau'$ умножить на $p(0, u - u') du'$ и проинтегрировать это произведение по u' от нуля до u. Сумма полученных вероятностей и представляет искомую величину, т. е.

$$p(\tau + \Delta\tau_0, u) = p(\tau, u)(1 - \Delta\tau) + \int_0^u p(\tau, u') \Delta\tau' p(0, u - u') du', \qquad (4)$$

где величины $\Delta\tau$ и $\Delta\tau'$ в соответствии с (1) определяются соотношениями

$$\Delta\tau = \Delta\tau_0 e^{-\alpha u}, \qquad \Delta\tau' = \Delta\tau_0 e^{-\alpha u'}. \tag{5}$$

Из (4) с учетом (5) при $\Delta\tau \to 0$ следует

$$\frac{\partial p(\tau, u)}{\partial \tau} = -e^{-\alpha u}\, p(\tau, u) + \int_0^u e^{-\alpha u'} p(\tau, u') p(0, u-u')\, du'. \tag{6}$$

Однако уравнение (6) не определяет функцию $p(\tau, u)$ полностью, поскольку при его составлении не учтен механизм рассеяния. Для получения дополнительного соотношения положим $\tau = 0$ и используем уравнение (2). В результате будем иметь

$$p(0, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-u} + \frac{\lambda}{2} \int_0^u e^{-u'} \rho(u-u')\, du', \tag{7}$$

где

$$\rho(u) = \int_0^\infty e^{-\tau} p(\tau, u)\, d\tau. \tag{8}$$

Величина $\rho(u)du$ определяет вероятность отражения кванта от среды в промежутке времени от u до $u+du$ после падения на нее. Уравнение (6) и соотношение (7) дают возможность найти как $p(\tau, u)$, так и $\rho(u)$. Отметим, что из (3) и (8) следует

$$\rho(0) = \frac{\lambda}{4}. \tag{9}$$

Для составления уравнения, определяющего $\rho(u)$, умножим обе части уравнения (6) на $e^{-\tau} d\tau$ и проинтегрируем от 0 до ∞. Тогда получим

$$-p(0, u) + \rho(u) = -e^{-\alpha u} \rho(u) + \int_0^u e^{-\alpha u'} \rho(u') p(0, u-u')\, du'. \tag{10}$$

Далее, из соотношения (7) следует

$$p'(0, u) + p(0, u) = \frac{\lambda}{2} \rho(u). \tag{11}$$

Используя (10) и (11), находим

$$\frac{1+e^{-\alpha u}}{2}\left[\rho'(u)+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\rho(u)\right]=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha u}\rho(u)+$$
$$\frac{\lambda}{4}+\int\limits_0^u e^{-\alpha u'}\rho(u')\rho(u-u')\,du'. \tag{12}$$

Заметим, что уравнения (2), (6) и (12) можно получить, исходя из общих уравнений, приведенных ранее С. А. Капланом [6] для произвольного закона изменения τ с течением времени. Однако для полноты и связности изложения мы предпочли здесь воспроизвести вывод указанных уравнений. Разумеется, при $\alpha=0$ уравнения переходят в соответствующие уравнения, полученные В. В. Соболевым [1, 2] при рассмотрении диффузии излучения в среде с неизменяющимися оптическими свойствами. Следует иметь в виду, что величина $p(\tau, u)$ кроме переменных τ и u зависит также от параметра α, хотя в обозначении это для краткости и не отражено.

2. *Определение функции* $\rho(u)$. Для решения уравнения (12), определяющего функцию $\rho(u)$, применим к нему преобразование Лапласа. Обозначив

$$\bar{\rho}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}\rho(u)\,du, \tag{13}$$

имеем

$$\bar{\rho}(s)\,\bar{\rho}(s+\alpha)-\left[\frac{2}{\lambda}(s+1)-1\right]\left[\bar{\rho}(s)+\bar{\rho}(s+\alpha)\right]+1=0. \tag{14}$$

Из уравнения (14) следует, что если $\bar{\rho}(s)$ является его решением, то и $\frac{1}{\bar{\rho}(s)}$ также удовлетворяет этому уравнению. Однако нас интересует лишь то решение, которое имеет физический смысл, т. е. дает вероятность отражения кванта от среды. Исходя из сказанного и учитывая (9), а также известное свойство преобразования Лапласа (см. [7], стр. 126), можем написать

$$\lim_{s\to\infty} s\bar{\rho}(s)=\frac{\lambda}{4}\cdot \tag{15}$$

Таким образом, для определения функции $\rho(u)$ мы должны решить функциональное уравнение (14) при условии (15) и выполнить обращение преобразования Лапласа. Для упрощения записи уравнения (14) введем функцию $f(x)$ следующим соотношением

$$\bar{p}(s) = f(x), \tag{16}$$

где $x = \frac{2}{\lambda}(s+1) - 1$. Тогда вместо уравнения (14) получим

$$f(x) f(x+\varepsilon) - x[f(x) + f(x+\varepsilon)] + 1 = 0, \tag{17}$$

где $\varepsilon = \frac{2}{\lambda}\alpha$, а (15) примет форму

$$\lim_{x\to\infty} 2xf(x) = 1. \tag{18}$$

Полное решение функционального уравнения (17) представляет большие трудности. Поэтому здесь будут приведены лишь некоторые частные решения.

Для решения уравнения (17) можно применить следующий способ. Будем искать решение в форме

$$f(x) = \frac{x^n + a_{n-1}(x)}{2x^{n+1} + b_n(x)}, \tag{19}$$

где a_{n-1} и $b_n(x)$ — полиномы от x степени $n-1$ и n соответственно с неопределенными коэффициентами (при этом $a_{-1}(x) \equiv 0$). В (19) учтено, что функция $f(x)$ должна удовлетворять условию (18). После подстановки (19) в (17) получим для определения $2n+1$ коэффициентов $2n+2$ уравнения. Избыточность количества уравнений означает, что решение уравнения (17) в форме (19) для заданного n существует только для вполне определенного значения параметра ε, которое и находится из указанной системы уравнений наряду с коэффициентами полиномов $a_{n-1}(x)$ и $b_n(x)$. При этом нужно учесть, что параметр ε может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из соотношения $\varepsilon = \frac{2}{\lambda}\alpha$ и (1) следует, что при $\varepsilon > 0$ оптическая толщина убывает, а при $\varepsilon < 0$ возрастает в каждой точке среды с течением времени. Здесь мы дадим решения уравнения (17) для $n = 0$ и $n = 1$.

При $n = 0$ находим

$$f(x) = \frac{1}{2x \mp 1} \tag{20}$$

и соответствующие значения $\varepsilon = \pm 1$, а при $n = 1$ имеем

$$f(x) = \frac{4x \mp 1}{8x^2 \mp 4x - 1} \tag{21}$$

для $\varepsilon = \pm \frac{1}{2}$.

Учитывая соотношения (16) и (20), получим

$$\bar{\rho}(s)=\frac{1}{\frac{4}{\lambda}s+\frac{4}{\lambda}-2\mp 1}, \tag{22}$$

что дает после обращения

$$\rho(u)=\frac{\lambda}{4}e^{-\left(1-\frac{\lambda}{2}\mp\frac{\lambda}{4}\right)u}. \tag{23}$$

Функция $\rho(u)$, определяемая (23), соответствует $\alpha=\pm\frac{\lambda}{2}$.

Используя аналогичным образом (16) и (21), имеем

$$\rho(u)=\frac{\lambda}{4}e^{-\left(1-\lambda\frac{4\pm 1}{8}\right)u}\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\lambda u\right) \tag{24}$$

для $\alpha=\pm\frac{\lambda}{4}$.

Введем полную вероятность A отражения кванта от среды, определяемую соотношением

$$A=\int_0^\infty \rho(u)\,du. \tag{25}$$

Как следует из (13) и (25), для нахождения A можно воспользоваться соотношением $A=\bar{\rho}(0)$. Из полученных выше результатов находим при $\alpha=\pm\frac{\lambda}{2}$

$$A=\frac{\lambda}{4-2\lambda\mp\lambda}, \tag{26}$$

а при $\alpha=\pm\frac{\lambda}{4}$

$$A=\frac{2\lambda(8-4\lambda\mp\lambda)}{(8-4\lambda\mp\lambda)^2-3\lambda^2}. \tag{27}$$

Если истинное поглощение света в среде отсутствует ($\lambda=1$), то из (26) и (27) следует $A=1$ при $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\alpha=\frac{1}{4}$, $A=\frac{1}{3}$ при $\alpha=-\frac{1}{2}$ и, наконец, $A=\frac{5}{11}$ при $\alpha=-\frac{1}{4}$. Несколько неожиданным является то обстоятельство, что при $\lambda=1$ все же получаются значения $A < 1$, соответствующие $\alpha < 0$. Этот результат можно понять, учитывая быстрый экспоненциальный рост значения τ в каждой точке среды с течением времени при $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = -\frac{1}{4}$, приводящий к „пленению" части квантов в среде.

3. *Применение к новым звездам.* Согласно современным представлениям, при вспышке новой звезды в начальный момент происходит отрыв от звезды оболочки (см. [8], гл. III). Задача о свечении звезды после отрыва оболочки была решена В. В. Соболевым [1, 2]. При этом не учитывалось выбрасывание вещества, которое происходит из звезды сразу же после отделения от нее оболочки.

Рассмотрение задачи о свечении звезды при выбрасывании вещества было начато автором [9]. Процесс непрерывного выбрасывания вещества был заменен отрывом второй оболочки через некоторый промежуток времени после момента начала вспышки. Здесь мы учтем влияние выбрасывания вещества на скорость выхода лучистой энергии из звезды, сделав допущение об уменьшении с течением времени оптической глубины каждого элемента внешних слоев звезды.

Пусть H — поток излучения с поверхности звезды в стационарном состоянии. Примем, что в момент времени $u = 0$ от звезды отделяется оболочка оптической толщины τ_*, после чего оптическая глубина внешних слоев звезды уменьшается в каждом месте по закону (1) при $\alpha = \frac{1}{2}$. Задача состоит в определении изменения со временем потока излучения с поверхности звезды $I(u)$ при указанных условиях.

Для решения задачи воспользуемся результатами, приведенными выше. Разумеется, эти результаты относятся лишь к случаю одномерной среды, однако они могут быть использованы и для приближенного решения задачи о свечении звезды. Так же, как и ранее [1, 2, 9], можем написать

$$I(u) = H \int_0^\infty (1 + \tau_* + \tau)\, p(\tau, u)\, d\tau, \tag{28}$$

или

$$I(u) = H[(1 + \tau_*)\, A_0(u) + A_1(u)], \tag{29}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_0(u) &= \int\limits_0^\infty p(\tau, u)\,d\tau, \\ A_1(u) &= \int\limits_0^\infty \tau p(\tau, u)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Воспользовавшись уравнением (6), легко получаем

$$\left.\begin{aligned} -p(0, u) &= -e^{-\alpha u} A_0(u) + \int\limits_0^u e^{-\alpha u'} A_0(u')\, p(0, u-u')\,du', \\ -A_0(u) &= -e^{-\alpha u} A_1(u) + \int\limits_0^u e^{-\alpha u'} A_1(u')\, p(0, u-u')\,du'. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

После применения преобразования Лапласа имеем

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_0(s+\alpha) &= \frac{\overline{p}(0, s)}{1-\overline{p}(0, s)}, \\ \overline{A}_1(s+\alpha) &= \frac{\overline{A}_0(s)}{1-\overline{p}(0, s)}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Далее, из (7) следует (при $\lambda = 1$, что соответствует условиям задачи)

$$\overline{p}(0, s) = \frac{1+\overline{\rho}(s)}{2(1+s)}, \tag{33}$$

а из (22) находим

$$\overline{\rho}(s) = \frac{1}{4s+1}. \tag{34}$$

Используя (32), (33) и (34), а также (29), получим решение задачи в следующем виде

$$I(u) = H\left[\frac{3}{5}e^{u} + \frac{1}{3}e^{\frac{u}{2}} + \frac{1}{15}e^{-\frac{u}{4}} + \tau_*\left(\frac{1}{3}e^{\frac{u}{2}} + \frac{1}{6}e^{-\frac{u}{4}}\right)\right]. \tag{35}$$

Однако на основе формулы (35) можно сделать лишь качественный вывод о том, что при экспоненциальном уменьшении оптической глубины с течением времени происходит экспоненциальный рост $I(u)$. Дело в том, что при получении этой формулы был принят закон (1) изменения τ с u при произвольно выбранном нами $\alpha = \frac{1}{2}$.

Для изучения реальных новых звезд следует найти $I(u)$ в интервале безразмерного времени $u \approx 10^{14}$ и αu порядка нескольких единиц, чему соответствует значение $\alpha \approx 10^{-14}$. Поэтому для количественных оценок необходимо рассмотрение случая $\alpha \ll 1$. Такое рассмотрение предполагается сделать в дальнейшем.

Ленинградский государственный
университет

ON LIGHT SCATTERING IN A ONE-DIMENSIONAL NON-STEADY STATE MEDIUM

I. N. MININ

The problem of isotropic light scattering in a one-dimensional semi-infinite medium is considered. It is assumed that the optical depth of any point in the medium varies exponentially with time. The results are applied to the theory of Nova phenomenon.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 4, 29, 406, 517, 1952.
2. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
3. *И. Н. Минин*, ДАН СССР, 154, 1059, 1964.
4. *M. Wing*, An introduction to transport theory, New York, 1962.
5. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 28, 355, 1951.
6. *С. А. Каплан*, Астрон. ж., 39, 702, 1962.
7. *Г. Дёч*, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, М., 1960.
8. *В. Г. Горбацкий*, *И. Н. Минин*, Нестационарные звезды, Физматгиз, М., 1963.
9. *И. Н. Минин*, Сб. „Теория звездных спектров" (в печати).