АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 1 ИЮНЬ, 1965 ВЫПУСК 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВО ВРЕМЕНИ ВЕРОЯТНОСТИ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ КВАНТА ОТ ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

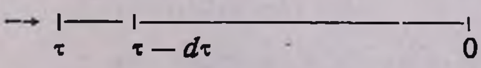
Поступила 9 апреля 1965

Рассматривается задача о нестационарной диффузии излучения от одномерной неоднородной среды конечной оптической толщины. Учитывается время, теряемое квантом в пути, и время пребывания в поглощенном состоянии.

На основе принципа инвариантности получается уравнение (1), решение которого сводится к решению уравнения (9) и обращению преобразования Лапласа. В частном случае однородной среды решение уравнения (9) дается формулой (13).

Нестационарная задача диффузного отражения квантов от рассеивающей среды была рассмотрена другими авторами [1—4] для некоторых частных случаев. В настоящей статье эта задача рассматривается для одномерной среды конечной оптической толщины при довольно общих условиях, когда 1) кванты затрачивают время как на прохождение пути, так и на пребывание в поглощенном состоянии, 2) вероятность выживания может меняться с глубиной и 3) индикатриса рассеяния (относительные вероятности излучения в направлении падения и в противоположном направлении) есть произвольная функция оптической глубины.

Пусть в момент $t=0$ в одномерную среду, оптическая толщина которой τ, входит один квант. Обозначим через $\rho(t, \tau)$ плотность вероятности диффузного отражения кванта в момент t. Будем искать функцию $\rho(t, \tau)$, учитывая конечность как времени, теряемого квантом в пути, так и времени нахождения в поглощенном состоянии.



Делаются следующие предположения:

а) Поглощенный квант спонтанно излучается по экспоненциальному закону $\alpha(x)e^{-\beta t}$, где $\frac{\alpha(x)}{\beta}=\lambda(x)\leqslant 1$; $\lambda(x)$ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния на оптической глубине x (рассчитанной от правого конца среды).

б) Атомы неравномерно распределены в среде $dt=\frac{dx}{v(x)}$. Здесь $v(x)$ — скорость, выраженная в единицах оптической толщины в единицу времени в точке x.

в) Индикатриса рассеяния несимметрична и может зависеть от оптической глубины. Обозначим через $a(x)$ вероятность рассеяния кванта вперед, $b(x)=1-a(x)$ — назад.

Уравнение относительно $\rho(t,\tau)$ можно получить с помощью принципа инвариантности, т. е. выразив $\rho(t,\tau)$ через $\rho(t,\tau-d\tau)$;

$$\rho(t,\tau)=\rho(t-2dt,\tau-d\tau)(1-2d\tau)+d\tau\, b(\tau)\alpha(\tau)e^{-\beta t}+$$

$$+2a(\tau)\alpha(\tau)d\tau\int_0^t e^{-\beta(t-t_1)}\rho(t_1,\tau)\,dt_1+ \tag{1}$$

$$+b(\tau)\alpha(\tau)d\tau\int_0^t dt_1\int_0^{t-t_1} e^{-\beta(t-t_1-t_2)}\rho(t_1,\tau)\rho(t_2,\tau)\,dt_2;$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{2}{v(\tau)}\frac{\partial\rho}{\partial t}+2\rho(t,\tau)=b(\tau)\alpha(\tau)e^{-\beta t}+$$

$$+2a(\tau)\alpha(\tau)\int_0^t e^{-\beta(t-t_1)}\rho(t_1,\tau)\,dt_1+b(\tau)\alpha(\tau)\int_0^t dt_1\int_0^{t-t_1} e^{-\beta(t-t_1-t_2)}\times \tag{1'}$$

$$\times\rho(t_1,\tau)\rho(t_2,\tau)\,dt_2.$$

Легко убедиться, что

$$\rho(t,0)\equiv 0 \quad \text{и} \quad \rho(0,\tau)\equiv 0. \tag{2}$$

Умножим обе части уравнения (1) на $e^{\beta t}$, обозначим

$$Q(t,\tau)=\rho(t,\tau)e^{\beta t}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{2}{v(\tau)} \frac{\partial Q}{\partial t} + 2\left[1 - \frac{\beta}{v(\tau)}\right] Q(t, \tau) = \alpha(\tau) b(\tau) +$$
$$+ 2a(\tau)\alpha(\tau)\int_0^t Q(t_1, \tau)\,dt_1 + b(\tau)\alpha(\tau)\int_0^t Q(t_1, \tau)\,dt_1 \int_0^{t-t_1} Q(t_2, \tau)\,dt_2. \qquad (4)$$

Обозначив далее

$$R(t, \tau) = \int_0^t Q(t_1, \tau)\,dt_1, \qquad (5)$$

получим для этой функции уравнение

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \tau \partial t} + \frac{2}{v(\tau)} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + 2\left[1 - \frac{\beta}{v(\tau)}\right] \frac{\partial R}{\partial t} = b(\tau)\alpha(\tau) +$$
$$+ 2a(\tau)\alpha(\tau) R(t, \tau) + b(\tau)\alpha(\tau)\int_0^t R'_t(t_1, \tau) R(t - t_1, \tau)\,dt_1. \qquad (6)$$

К уравнению (6) применим преобразование Лапласа. Введем:

$$\Omega(s, \tau) = \int_0^\infty e^{-st} R(t, \tau)\,dt, \qquad (7)$$

Заметив, что

$$R(0, \tau) = 0 \quad \text{из (5)} \quad \text{и} \quad R'_t(0, \tau) = \rho(0, \tau) = 0,$$

получим

$$s\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{2}{v(\tau)} s^2 \Omega(s, \tau) + 2\left[1 - \frac{\beta}{v(\tau)}\right] s\Omega(s, \tau) =$$
$$= \frac{1}{s} b(\tau) + 2a(\tau)\alpha(\tau)\Omega(s, \tau) + b(\tau)\alpha(\tau)\Omega^2(s, \tau) \qquad (8)$$

или

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = b(\tau)\alpha(\tau)\left\{\Omega^2 + 2A(s, \tau)\Omega + \frac{1}{s^2}\right\}, \qquad (9)$$

где для краткости обозначено

$$A(s, \tau) = \frac{a(\tau)}{b(\tau)s} - \frac{1}{b(\tau)\alpha(\tau)}\left[1 - \frac{\beta}{v(\tau)}\right] - \frac{s}{v(\tau) b(\tau)\alpha(\tau)} \qquad (10)$$

с условием $\Omega(s, 0) \equiv 0$ (ибо $\rho(t, 0) = 0$).

Легко убедиться, что

$$L(\rho) = (\beta + s)\,\Omega(\beta + s, \tau). \qquad (11)$$

где L — оператор Лапласа.

Уравнение (9), которое является уравнением Риккати, можно приближенно решить последовательными приближениями или разложением в ряд по τ. Подставляя найденную функцию в (11), обратным преобразованием Лапласа находим функцию $\rho(t, \tau)$

$$\rho(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} (\beta + s)\, \Omega(\beta + s, \tau)\, e^{st}\, ds. \tag{12}$$

Если α, v, a не зависят от τ, т. е. среда является однородной, то уравнение (9) легко решается

$$\Omega(s, \tau) = \frac{1}{s^2} \frac{1 - \exp\left\{2ab \sqrt{A^2(s) - \frac{1}{s^2}}\, \tau\right\}}{\gamma_2 - \gamma_1 \exp\left\{2ab \sqrt{A^2(s) - \frac{1}{s^2}}\, \tau\right\}}, \tag{13}$$

где

$$\gamma_{1,2} = -A(s) \pm \sqrt{A^2(s) - \frac{1}{s^2}}\,.$$

С помощью функции $\rho(t, \tau)$ диффузно отраженное из среды излучение $F(t)$ легко выражается через падающую интенсивность $I(t)$

$$F(t) = \int\limits_0^t I(t - t_1)\, \rho(t_1, \tau)\, dt. \tag{14}$$

Если нужно выразить $I(t)$ через $F(t)$, то можно использовать не функцию ρ, а Ω. Действительно, из (14)

$$L(F) = L(I)\, L(\rho) = L(I)\, (\beta + s)\, \Omega(\beta + s, \tau),$$

откуда

$$I = L^{-1}\left[\frac{L(F)}{(\beta + s)\, \Omega(\beta + s, \tau)}\right].$$

В заключение хочу выразить благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики
АН АрмССР

TIME-DEPENDENCE OF THE PROBABILITY OF DIFFUSE REFLECTION OF A PHOTON FROM ONE-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS MEDIUM

N. B. YENGIBARIAN

A problem of non-stationary diffusion of radiation in one-dimensional finite inhomogeneous medium is considered.

The equation (1) was obtained with the help of the principle of invariance.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии, М., 1956.
2. *R. Bellman*, Invariant imbedding time-dependent processes, vol. 2, New York, 1964.
3. *И. Н. Минин*, К теории нестационарной диффузии излучения, Вестн. ЛГУ, 19, 1962.
4. *И. Н. Минин*, О нестационарном свечении полубесконечной среды, ДАН СССР, 154, 3, 1964.