АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 1 ИЮНЬ, 1965 ВЫПУСК 2

## $H$-ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. В. ИВАНОВ, Д. И. НАГИРНЕР

Поступила 30 мая 1965

Исследуется перенос излучения в резонансной линии, расширение которой обусловлено эффектом Допплера. Рассматривается полубесконечная атмосфера с пренебрежимо малым поглощением в непрерывном спектре. Используется приближение полного перераспределения по частоте. Интенсивность выходящего излучения выражена через соответствующую $H$-функцию, определяемую формулами (6) и (7). Даны пятизначные таблицы $H(z, \lambda)$ для большого набора значений параметра $\lambda$. Особое внимание уделено значениям $\lambda$, близким к единице. Исследовано асимптотическое поведение $H(z, \lambda)$ при $z \gg 1$. Показано, что при $z \gg 1$ функция $H(z, \lambda)$ зависит не от самих переменных $z$ и $\lambda$, а лишь от некоторой их комбинации. Обсуждается вопрос об областях применимости и точности полученных асимптотических выражений. Найдено, что область применимости довольно широка, а точность — достаточно высока, чтобы обеспечить их практическую пригодность.

В теории многократного рассеяния света в спектральной линии важную роль играет функция $H(z, \lambda)$, введенная В. В. Соболевым [1, 2]. Она является обобщением известной функции В. А. Амбарцумяна [3] $\varphi(\mu, \lambda)$ на случай рассеяния с полным перераспределением по частоте. При многих видах зависимости мощности источников от глубины интенсивность излучения, выходящего из полубесконечной атмосферы, может быть просто выражена через $H(z, \lambda)$. Изложение относящихся к этому вопросов дается в книге В. В. Соболева [4]. Функция $H(z, \lambda)$ входит также в полученное Д. И. Нагирнером [5, 6] интегральное представление резольвенты уравнения, описывающего перенос резонансного излучения в полубесконечной атмосфере.

Свойства $H$-функций для рассеяния с полным перераспределением по частоте были изучены В. В. Ивановым [7, 8]. Однако подробных таблиц этих функций нет. В. В. Соболев [2, 4] для трех значений $\lambda$ ($\lambda = 1.00$; 0.999; 0.99) вычислил $H$-функцию при коэффициенте поглощения, обусловленном совместным действием эффекта Допплера и затухания. В этих вычислениях было принято, что отношение коэффициента поглощения в линии к коэффициенту поглощения в непрерывном спектре равно $10^4$. Таблица $H$-функции для чистого рассеяния ($\lambda = 1$) и допплеровского коэффициента поглощения приведена в статье В. В. Иванова [7]. Там же даны графики $H(z, \lambda)$ для $\lambda = 0.7$; 0.9 и 0.95. Значения $H(z, \lambda)$ для $\lambda = 0.4$ и 0.7 при допплеровском коэффициенте поглощения были найдены А. М. Самсоном [9]. Во всех этих работах $H$-функция получалась численно из уравнения для $H(z, \lambda)$.

Для практических расчетов интенсивностей и профилей линий этих данных совершенно недостаточно. В связи с этим в Ленинградском университете предпринята работа по табулированию $H$-функций. В настоящей статье приводятся результаты расчетов для допплеровского коэффициента поглощения. Считается, что поглощение в непрерывном спектре отсутствует. Попутно с описанием вычислений в статье дается сводка основных свойств рассматриваемой $H$-функции. Чтобы облегчить использование таблиц, в начале статьи приводятся уравнения, описывающие перенос резонансного излучения, а также выражения для интенсивности выходящего из среды излучения через функцию $H(z, \lambda)$.

1. Пусть $\mu$ — косинус угла выхода излучения из среды, отсчитанный от внешней нормали, $x$ — безразмерная частота:

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_D},$$

где $\nu_0$ — частота центра линии, $\Delta\nu_D$ — допплеровская полуширина. Тогда при отсутствии поглощения в непрерывном спектре интенсивность излучения, выходящего из среды в резонансной линии, при полном перераспределении по частоте при рассеянии дается известным выражением

$$I(0, \mu, x) = \int_0^\infty S(\tau)\, e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu}}\, \alpha(x)\, \frac{d\tau}{\mu}, \tag{1}$$

где $S(\tau)$ — так называемая функция источников, $\alpha(x)$ — отношение коэффициента поглощения в частоте $x$ к коэффициенту поглощения в центре линии, $\tau$ — оптическая глубина в центре линии. При пренебрежении вынужденным излучением функция источников связана с населенностями уровней $n_1$ и $n_2$ соотношением

$$S(\tau) = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} \frac{n_2}{n_1}, \qquad (2)$$

где $g_i$ — статистические веса уровней, и определяется интегральным уравнением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^\infty K(|\tau - \tau'|) S(\tau')\, d\tau' + S^*(\tau). \qquad (3)$$

Здесь функция $S^*(\tau)$ представляет собой мощность первичных источников излучения (таких, как возбуждения электронным ударом и рекомбинации на верхний уровень). Она считается заданной. Параметр $\lambda$ — так называемая вероятность выживания кванта при рассеянии, или альбедо для однократного рассеяния, — определяется относительной ролью радиативных переходов с верхнего уровня по сравнению с переходами под действием ударов второго рода и ионизациями со второго уровня (подробности см., например, в [10]). Значения $\lambda$ заключены между нулем и единицей, однако в астрофизических задачах чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $\lambda$ очень близко к единице (почти консервативное рассеяние).

При допплеровском коэффициенте поглощения $\alpha(x) = e^{-x^2}$, который только и будет рассматриваться в дальнейшем, ядро интегрального уравнения (3) имеет вид

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} E_1(\tau e^{-x^2})\, dx, \qquad (4)$$

где $E_1(t)$ — обычная интегральная показательная функция

$$E_1(t) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{t}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (5)$$

Функция $K(\tau)$ была недавно подробно изучена и табулирована [11, 12]. Заметим, что уравнение (3) с ядром (4) было впервые рассмотрено Л. М. Биберманом [13].

В ряде опубликованных в последнее время работ [12, 14, 15] интегральное уравнение для $S(\tau)$ с ядром (4) было решено численно. Функция $S^*(\tau)$ принималась при этом либо постоянной: $S^*(\tau) = S_0^*$ [12, 14], либо экспоненциально убывающей: $S^*(\tau) = S_0^* e^{-m\tau}$ [12, 15]. В последнем случае для $m$ бралось несколько значений, и уравнение (3) решалось для каждого $m$ заново. Полученные значения $S(\tau)$ использовались затем для расчета интенсивности выходящего излучения по формуле (1).

Легко, однако, показать, что если функция $S^*(\tau)$ дается произведением полинома от $\tau$ на экспоненту, то интенсивность выходящего излучения $I(0, \mu, x)$ можно найти, минуя определение функции источников. Достаточно иметь только значения функции $H(z, \lambda)$, удовлетворяющей следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$H(z, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} z H(z, \lambda) \int_0^\infty \frac{H(z', \lambda)}{z + z'} G(z')\, dz', \tag{6}$$

причем если ядро уравнения (3) имеет вид (4), то

$$G(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{при } z \leqslant 1, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{\sqrt{2 \ln z}}^\infty e^{-t^2}\, dt & \text{при } z > 1. \end{cases} \tag{7}$$

В самом деле, известно (см., например, [4, 7]), что если

$$S^*(\tau) = e^{-m\tau}, \tag{8}$$

то

$$I(0, \mu, x) \equiv I_0(0, \mu, x, m) = \frac{H(\mu e^{x^2})\, H\left(\frac{1}{m}\right)}{1 + m\mu e^{x^2}}. \tag{9}$$

В частности, полагая в последних формулах $m = 0$ и пользуясь тем, что $H(\infty, \lambda) = (1 - \lambda)^{-1/2}$ (см. ниже, формула (25)), находим, что при равномерном распределении источников, когда $S^*(\tau) = 1$, интенсивность выходящего излучения оказывается равной

$$I(0, \mu, x) = \frac{H(\mu e^{x^2})}{\sqrt{1 - \lambda}}. \tag{10}$$

При

$$S^*(\tau) = \tau e^{-m\tau} \tag{11}$$

значения $I(0, \mu, x)$ следующим образом выражаются через $H(z)$:

$$I(0, \mu, x) \equiv I_1(0, \mu, x, m) = \frac{H(\mu e^{x^2})\, H\left(\frac{1}{m}\right)}{1 + m\mu e^{x^2}} \left(\frac{\mu e^{x^2}}{1 + \mu m e^{x^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{2} H\left(\frac{1}{m}\right) \int_0^\infty \frac{z' H(z')}{(1 + m z')^2} G(z')\, dz' \right). \tag{12}$$

Вообще, если

$$S^*(\tau) = \sum_{j=0}^{n} a_j \tau^j e^{-m\tau}, \tag{13}$$

то в силу линейности (3) и (1) имеем

$$I(0, \mu, x) = \sum_{j=0}^{n} a_j I_j(0, \mu, x, m), \tag{14}$$

где

$$I_j(0, \mu, x, m) = \int_0^\infty S_j(\tau, m)\, e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu}\tau} \alpha(x) \frac{d\tau}{\mu}, \tag{15}$$

а $S_j(\tau, m)$ есть решение уравнения

$$S_j(\tau, m) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|)\, S_j(\tau', m)\, d\tau' + \tau^j e^{-m\tau}. \tag{16}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\frac{\partial S_j(\tau, m)}{\partial m} = -S_{j+1}(\tau, m), \tag{17}$$

и поэтому, как видно из (15),

$$\frac{\partial I_j(0, \mu, x, m)}{\partial m} = -I_{j+1}(0, \mu, x, m). \tag{18}$$

Это соотношение дает:

$$I_j(0, \mu, x, m) = (-1)^j \frac{\partial^j I_0(0, \mu, x, m)}{\partial m^j}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (14), получаем окончательно, что при $S^*(\tau)$ вида (13)

$$I(0, \mu, x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j \frac{\partial^j I_0(0, \mu, x, m)}{\partial m^j}. \tag{20}$$

Для вычисления входящей сюда суммы надо найти первые $n$ производных по $m$ от выражения, стоящего в правой части (9). Для получения $\frac{\partial^j I_0}{\partial m^j}$ нужно иметь, таким образом, производные $H$-функции вплоть до $j$-ой включительно. Однако эти производные с помощью уравнения (6) легко выразить через саму $H$-функцию и интегралы от нее, так что для вычисления (20) в действительности нужно иметь только $H(z)$. Например, оказывается, что

$$\frac{dH(z, \lambda)}{dz} = \frac{\lambda}{2} H^2(z, \lambda) \int_0^\infty \frac{z' H(z', \lambda)}{(z + z')^2} G(z')\, dz'. \tag{21}$$

Следует отметить, что в упоминавшихся выше работах [12, 15], содержащих результаты численного решения уравнения (3) при $S^*(\tau)$ вида (8), для получения интенсивности выходящего излучения не было нужды решать уравнение (3) для каждого $m$. Если вычислена интенсивность выходящего излучения при $m = 0$, т. е. при равномерном распределении источников, то, как следует из формулы (10), мы тем самым имеем значения $H(z)$. Пользуясь ими, по формуле (9) легко найти и $I_0(0, \mu, x, m)$ при любом $m$. Более того, можно показать, что и функция источников $S_0(\tau, m)$ просто выражается через $S_0(\tau, 0)$ и $H$-функцию, а именно

$$S_0(\tau, m) = \sqrt{1 - \lambda}\, H\left(\frac{1}{m}\right) \left[ S_0(\tau, 0) - m \int_0^\tau e^{-m(\tau - \tau')} S_0(\tau', 0)\, d\tau' \right]. \tag{22}$$

Приведенные примеры могут служить иллюстрацией той важной роли, которую $H$-функции играют в теории переноса резонансного излучения.

2. Обсудим теперь кратко методы вычислений, использовавшиеся нами при составлении таблиц $H$-функции. Прежде всего отметим, что бесконечность промежутка интегрирования в уравнении (6) и сложность поведения $G(z)$ обусловливают нерегулярность $H(z, \lambda)$ на бесконечности и существенно увеличивают объем вычислений по сравнению с расчетом функции Амбарцумяна $\varphi(\mu, \lambda)$.

Для $H(z, \lambda)$ можно получить [7] следующее явное выражение:

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln\left[1 - \lambda V(u)\right] \frac{z\, du}{1 + z^2 u^2}, \tag{23}$$

где

$$V(u) \equiv \int_0^\infty G(z) \frac{dz}{1 + z^2 u^2} = \frac{2}{u\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-2x^2} \operatorname{arctg} u e^{x^2}\, dx. \tag{24}$$

Функция $V(u)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с преобразованием Фурье от ядра (4) основного интегрального уравнения (3).

Из формулы (23) следует, что $H(z, \lambda)$ является строго возрастающей функцией $z$, изменяющейся от $H(0, \lambda) = 1$ до

$$H(\infty, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{25}$$

Обозначим

$$H_0(\lambda) = \int_0^\infty H(z, \lambda) G(z)\, dz. \tag{26}$$

Из (6) с учетом (25) следует, что

$$H_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-\lambda}\right). \tag{27}$$

Используя последнее выражение, уравнение (6) можно переписать в виде

$$\frac{1}{H(z, \lambda)} = \sqrt{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \frac{z' H(z', \lambda)}{z + z'} G(z')\, dz'. \tag{28}$$

Уравнение для $H(z, \lambda)$ решалось численно, методом итераций. При $\lambda$, не очень близких к единице ($\lambda \lesssim 0{,}9$), итерации быстро сходятся, причем более или менее безразлично, какая форма уравнения — (6) или (28) — используется при вычислениях. В случае же $\lambda$, близких к единице, уравнение (28) имеет существенные преимущества перед (6). При решении уравнения (28) последовательные приближения ведут себя так, что после каждых двух итераций полезно образовать их полусумму и принять ее за следующее приближение. Этот прием сильно улучшает сходимость. Заметим, что при замене интегралов в уравнениях для $H(z, \lambda)$ суммами была учтена бесконечность производных $H(z, \lambda)$ и $G(z)$ при $z = 0$ и $z = 1 + 0$, соответственно, а также особенности поведения этих функций на бесконечности.

Наряду с описанным способом $H(z, \lambda)$ вычислялась по формуле (23), подобно тому, как это делалось Стиббсом и Уиром [16] в отношении $\varphi(\mu, \lambda)$. Предварительно была подробно изучена подынтегральная функция. Поведение $V(u)$ при малых и больших $u$ существенно различно. При $0 \leqslant v \leqslant 1$ легко получить разложение $V\left(\frac{1}{v}\right)$ в ряд

$$V\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} v - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{v^{2j+2}}{\sqrt{2j+3}\,(2j+1)}. \tag{29}$$

При $u$, близких к нулю, поведение $V(u)$ довольно сложно. Можно показать, что при $u \to 0$ имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$V(u) = 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{1}{u}}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\ln u} + \left( \frac{\pi^2}{2} + 1 \right) \frac{3}{16} \left( \frac{1}{\ln^2 u} + \right. \right. \tag{30}$$

$$\left. \left. + \frac{5}{4} \frac{1}{\ln^3 u} \right) + \left( \frac{5\pi^4}{8} + \frac{3}{2} \pi^2 + 3 \right) \frac{35}{256} \left( \frac{1}{\ln^4 u} + \frac{9}{4} \frac{1}{\ln^5 u} \right) + \cdots \right].$$

Оно было найдено из интегрального представления $V(u)$. При этом была использована методика исследования поведения интегралов типа Коши вблизи граничных точек контура интегрирования, изложенная в книге Ф. Д. Гахова [17]. Формула (30) с учетом всех выписанных членов дает $V(u)$ при $u \leqslant 10^{-5}$ с 4 значащими цифрами, а при $u \leqslant 10^{-9}$ — уже с 6 знаками.

При вычислении интеграла (23) особенность производной $H(z, \lambda)$ при $z = 0$ была выделена. Кроме того, чтобы учесть быстрые изменения подынтегральной функции при малых $u$ и больших $z$, была сделана замена $u = e^{-t}$ и интегрирование велось с равномерным шагом по $t$. Окончательные формулы, которые использовались при вычислениях, имеют вид:

при $z \leqslant 1$

$$\ln H(z, \lambda) = \frac{\lambda}{4\sqrt{2}} z \ln \frac{1+z^2}{z^2} - \frac{z}{\pi} \left\{ \int_0^1 \left| \ln \left[ 1 - \lambda V\left(\frac{1}{v}\right) \right] + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda\pi}{2\sqrt{2}} v \right] \frac{dv}{v^2 + z^2} + 2 \int_0^1 \ln \left| 1 - \lambda V(e^{-x^2}) \right| \frac{xe^{-x^2}\,dx}{1 + z^2 e^{-2x^2}} + \tag{31}$$

$$\left. + \int_1^{20} \ln [1 - \lambda V(e^{-t})] \frac{e^{-t}dt}{1 + z^2 e^{-2t}} \right\};$$

при $z > 1$

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{z} \int_0^1 \ln \left[ 1 - \lambda V\left(\frac{1}{v}\right) \right] \frac{z^2 dv}{z^2 + v^2} + \right. \tag{32}$$

$$\left. + 2 \int_0^1 \ln [1 - \lambda V(e^{-x^2})] \frac{zx\,dx}{z^2 e^{-x^2} + e^{x^2}} + \int_1^{20+\ln z} \ln [1 - \lambda V(e^{-t})] \frac{z\,dt}{z^2 e^{-t} + e^t} \right\}.$$

Все вычисления были выполнены на ЭВМ М—20 Вычислительного центра Ленинградского университета. Полученные в результате значения $H(z, \lambda)$ приведены в приложении, в таблицах 1 (для $\lambda < 0.9$), 2 ($0.925 < \lambda < 1-10^{6}$) и 3 ($\lambda = 1$). В табл. 3, кроме того, даны значения интеграла

$$G_1(z) = \int_0^\infty \frac{z' H(z', 1)}{(z+z')^2} G(z')\, dz', \tag{33}$$

входящего в выражение для производной $H$-функции при $\lambda = 1$ (см. формулу (21)). Вычисление одного значения $H(z, \lambda)$ по формуле (23) занимало около 1 сек. машинного времени. Функция $V(u)$ была подробно табулирована предварительно, на что ушло около 30 мин.

Контролем точности вычислений служило совпадение значений функции $H(z, \lambda)$, найденных итеративным путем, со значениями $H(z, \lambda)$, рассчитанными по формуле (23). Кроме того, для нескольких $\lambda$ по вычисленным значениям $H(z, \lambda)$ был рассчитан обобщенный момент $H_0(\lambda)$, определяемый формулой (26). Полученные таким путем величины $H_0(\lambda)$ отличаются от точных значений, даваемых формулой (27), менее чем на одну единицу шестого знака. Все это позволяет считать, что ошибки приводимых в табл. 1—3 значений $H(z, \lambda)$, по-видимому, меньше одной единицы последней значащей цифры.

3. Из табл, 2 видно, что когда $\lambda$ близко к единице, функция $H(z, \lambda)$ приближается к своему асимптотическому значению $H(\infty, \lambda) = (1-\lambda)^{-1/2}$ лишь при очень больших значениях $z$, тем больших, чем меньше $1-\lambda$. Поэтому составить таблицы $H(z, \lambda)$, по которым значения этой функции можно было бы для любых $z$ и $\lambda$ находить непосредственно, практически невозможно. Эту трудность легко преодолеть, если заметить следующее. При небольших значениях $z$ функция $H(z, \lambda)$ при $1-\lambda \ll 1$ близка к $H(z, 1)$, как это ясно видно из таблиц 2 и 3. При больших же $z$ для $H(z, \lambda)$ можно получить сравнительно простое асимптотическое представление, к выводу которого мы теперь и перейдем.

При $z \gg 1$ основной вклад в интеграл (23) дают значения подинтегральной функции при $u$, близких к нулю. Поэтому, заменив в подынтегральной функции $V(u)$ двумя первыми членами разложения (30), получим приближенно

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{2}\ln(1-\lambda) - \\ -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{u\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{u}}}\right]\frac{z\,du}{1+z^2u^2}. \tag{34}$$

Сделав замену $zu = t$ и обозначив

$$\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\sqrt{\pi}}{4z}\frac{1}{\sqrt{\ln z}} = q, \tag{35}$$

найдем, что с той же точностью, что и в (34),

$$\ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{2}\ln(1-\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln(1+qt)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{36}$$

Таким образом, при $z \gg 1$ функция $\sqrt{1-\lambda}\, H(z, \lambda)$ зависит не от двух аргументов $z$ и $\lambda$, а лишь от их комбинации (35). Исследуем эту зависимость.

Обозначим

$$\ln h(q) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln(1+qt)\frac{dt}{1+t^2}. \tag{37}$$

Исходя непосредственно из этой формулы, легко показать, что

$$h\left(\frac{1}{q}\right) = \sqrt{q}\, h(q), \tag{38}$$

так что достаточно иметь эту функцию для $q \leqslant 1$.

Дифференцируя (37) и вычисляя получающийся справа интеграл, находим

$$\frac{d}{dq}\ln h(q) = -\frac{1}{2}\frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+q^2}\ln q. \tag{39}$$

Отсюда

$$\ln h(q) = -\frac{1}{4}\ln(1+q^2) + \frac{1}{\pi}\ln q \operatorname{arc\,tg} q - \frac{1}{\pi}\int_0^q \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx. \tag{40}$$

При малых $q$ имеем разложение

$$\ln h(q) = \frac{1}{\pi} q\ln q - \frac{q}{\pi} - \frac{1}{4}q^2 + \cdots. \tag{41}$$

С его помощью из (36) находим, что

$$H(z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\left[1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\sqrt{\ln z}}{4\sqrt{\pi}\, z}\right] \tag{42}$$

при

$$\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{z\sqrt{\ln z}} \ll 1-\lambda. \tag{43}$$

При $q \gg 1$ (38) и (41) дают

$$\ln h(q) = -\frac{1}{2}\ln q - \frac{1}{\pi}\frac{1}{q}\ln q - \frac{1}{\pi q} + \cdots, \tag{44}$$

и при $z \gg 1$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{z\sqrt{\ln z}} \gg 1 - \lambda, \tag{45}$$

для $H(z, \lambda)$ получаем из (36)

$$H(z, \lambda) = \sqrt{\frac{4z\sqrt{\ln z}}{\sqrt{\pi}}}. \tag{46}$$

Очевидно, что область применимости этой формулы тем шире, чем меньше $1 - \lambda$. При $\lambda = 1$ условие (45) не накладывает ограничения на $z$ сверху. Формулы (42) и (46) были получены ранее одним из авторов [7, 8]. Они являются предельными случаями даваемого (36) общего асимптотического выражения

$$H(z, \lambda) = \frac{h(q)}{\sqrt{1-\lambda}}, \tag{47}$$

справедливого для больших $z$ при произвольном соотношении между значениями $z$ и $\lambda$.

Значения функции $h(q)$ при $0 \leqslant q \leqslant 1$ приведены в приложении в табл. 4. При $q > 1$ они легко могут быть вычислены по табулированным значениям с помощью соотношения (38). Что касается точности, которую обеспечивает асимптотическое представление (47), то здесь можно сказать следующее. При $z > 10$ эта формула дает значения $H(z, \lambda)$ для всех $\lambda > 0.9$ с максимальной ошибкой около $3\%$. Когда $z > 1000$, точность выше $1.7\%$, а при $z = 10\,000$ ошибка меньше $1.1\%$.

При $\lambda = 1$ для $H(z)$ можно получить и более точное асимптотическое разложение, главный член которого, разумеется, совпадает с (46). Это разложение имеет вид

$$H(z, 1) = \frac{2}{\pi^{1/4}}\sqrt{z\sqrt{\ln z}}\,\exp\left\{\frac{1}{8}\frac{1}{\ln z} - \frac{5}{64}(\pi^2 + 1)\frac{1}{\ln^2 z} + \cdots\right\}. \tag{48}$$

С учетом всех выписанных членов оно дает $H(z, 1)$ при $z > 100$ с ошибкой менее $0.05\%$. Это разложение было получено с помощью того же метода, который использовался для вывода формулы (30). Выкладки, однако, слишком длинны, чтобы их здесь приводить. Следует отметить, что учет одного только главного члена разложения, т. е. предэкспоненциального множителя, обеспечивает точность, которой обычно вполне достаточно: при $z \geqslant 100$ погрешность меньше $1\%$, а при $z$ от 10 до 100 она не превышает $3\%$; в последней области учет второго и третьего членов разложения ведет даже к уменьшению точности.

Мы видим, таким образом, что область применимости полученных асимптотических выражений довольно широка. В комбинации с приведенными выше таблицами $H(z, \lambda)$ они позволяют находить значения $H$-функции при любых $z$ и $\lambda$ с точностью, вполне достаточной для любых применений теории, так как для практических целей достаточно иметь $H$-функции с 2—3 знаками. Может поэтому возникнуть вопрос, оправдано ли вообще табулирование $H(z, \lambda)$ со столь высокой точностью, как это было сделано выше. Ответ на этот вопрос, как нам кажется, должен быть положительным. В самом деле, в большинстве случаев при решении уравнения переноса делаются те или иные приближения чисто математического характера, точность которых оценить заранее практически невозможно. Поэтому кажется естественным табулировать с высокой точностью строгие решения нескольких простейших задач, полученные без каких-либо подобных приближений. Тогда в дальнейшем их можно будет использовать в качестве своего рода стандартов при оценке точности того или иного приближенного метода. Одной из таких задач-стандартов и должна, по нашему мнению, служить задача о рассеянии света в полубесконечной среде.

В качестве примера использования таблиц $H(z, \lambda)$ с этой целью мы можем указать на следующее. Недавно доктор Хаммер любезно прислал нам неопубликованные результаты численного решения уравнения (3) при $S^*(\tau) = \mathrm{const}$, а также вычисленные затем по формуле (1) значения $I_0(0, \mu, x)$. Сравнение последних результатов со значениями $H(z, \lambda)$, приведенными в таблицах, показало, что точность составляет одну единицу последнего (третьего) знака, приводимого доктором Хаммером. Тем самым мы получили оценку точности численного метода, который был широко использован Эйвреттом и Хаммером [12] для расчета поля излучения не только в полубесконечных, но и в конечных атмосферах.

В заключение укажем, что при расчете профилей линий по формулам, приведенным в начале статьи, интенсивность излучения удобно вычислять для тех значений частоты $x$, которым соответствуют имеющиеся в таблицах значения $z$ (например, значения $z = \mu e^{x^2} = 10$ при $\mu = 1$ соответствует $x = 1.52$ и т. д.). Это позволяет избежать интерполирования табличных значений $H(z, \lambda)$, не затрудняя существенным образом построения графиков.

Выше были приведены значения $H$-функции лишь для допплеровского коэффициента поглощения. В настоящее время ведется работа по табулированию $H$-функций при коэффициенте поглощения, обусловленном совместным действием эффекта Допплера и затухания, т. е. для фойгтовского контура. Результаты этих расчетов предполагается опубликовать в одной из следующих статьей.

Авторы выражают благодарность Э. Дзёпе и С. Б. Михайлову, принимавшим участие в отдельных этапах машинных вычислений. Мы признательны также докторам Д. Хаммеру и Ю. Эйвретту за предоставление неопубликованных результатов численного решения уравнения переноса, присылку препринтов и стимулирующую переписку.

Ленинградский государственный университет

## $H$-FUNCTIONS IN THE THEORY OE TRANSFER OF RESONANCE RADIATION

V. V. IVANOV, D. I. NAGIRNER

Radiative transfer in Doppler broadened resonance line is investigated. Semi-infinite atmosphere is considered. Continuous absorption is assumed to be negligible. The approximation of the complete redistribution in frequency is used. Emergent intensity is given in terms of corresponding $H$-function defined by (6) and (7). 5-s. f. tables of $H(z, \lambda)$ for a wide range of $\lambda$ are given. Special attention is given to values of $\lambda$ close to unity. Asymptotic ($z \gg 1$) behavior of $H(z, \lambda)$ is studied. It is shown tnat if $z \gg 1$, the function $H(z, \lambda)$ no longer depends on $z$ and $\lambda$ separately but only on a combination of $z$ and $\lambda$. Ranges of validity and accuracy of the asymptotics are discussed. The range of validity is found to be rather wide while the accuracy is high enough to make their use practical.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 26, 129, 1949.
2. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 31, 231, 1954.
3. *В. А. Амбарцумян*, Астрон. ж., 19, 30, 1942; Научные труды, т. I, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
4. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГТТИ, М., 1956.
5. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 696, 1964.
6. *Д. И. Нагирнер*, Вестн. ЛГУ, № 1, 142, 1964.
7. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 39, 1020, 1962.

8. *В. В. Иванов*, Уч. Зап. ЛГУ, № 307 (Труды Астрон. обс. ЛГУ, 19), 52, 1962.
9. *А. М. Самсон*, Изв. АН СССР, сер. физич., 24, 496, 1960.
10. *R. N. Thomas, R. G. Athay*, Physics of the Solar Chromosphere, Interscience Publ., New York, 1961.
11. *В. В. Иванов, В. Т. Щербаков*, Астрофизика, 1, 31, 1965.
12. *E. H. Avrett, D. G. Hammer*, MN, 1965, в печати.
13. *Л. М. Биберман*, ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
14. *A. G. Hearn*, Proc. Phys. Soc. 81, 648, 1963.
15. *E. N. Avrett*, Proceedings of the Second Harvard—Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres, Smithsonian Institution Astrophys. Obs., Special Report, April, 1965.
16. *D. W. H. Stibbs, R. E. Wier*, MN, 119, 512, 1959.
17. *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.

*Таблица 1*

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $H(z, \lambda)$ ПРИ $\lambda \leq 0.9$

| $z$ \ $\lambda$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.75 | 0.8 | 0.85 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.00000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.05 | 1.0059 | 1.0121 | 1.0187 | 1.0256 | 1.0330 | 1.0409 | 1.0496 | 1.0543 | 1.0594 | 1.0649 | 1.0710 |
| 0.1 | 1.0096 | 1.0167 | 1.0304 | 1.0420 | 1.0545 | 1.0681 | 1.0833 | 1.0917 | 1.1008 | 1.1108 | 1.1221 |
| 0.2 | 1.0147 | 1.0304 | 1.0475 | 1.0661 | 1.0866 | 1.1095 | 1.1357 | 1.1504 | 1.1666 | 1.1848 | 1.2058 |
| 0.3 | 1.0184 | 1.0384 | 1.0602 | 1.0843 | 1.1111 | 1.1416 | 1.1771 | 1.1974 | 1.2200 | 1.2457 | 1.2759 |
| 0.4 | 1.0213 | 1.0445 | 1.0703 | 1.0989 | 1.1311 | 1.1681 | 1.2118 | 1.2370 | 1.2655 | 1.2982 | 1.3373 |
| 0.5 | 1.0237 | 1.0488 | 1.0786 | 1.1110 | 1.1478 | 1.1906 | 1.2416 | 1.2714 | 1.3053 | 1.3447 | 1.3922 |
| 0.6 | 1.0257 | 1.0541 | 1.0857 | 1.1214 | 1.1622 | 1.2101 | 1.2678 | 1.3018 | 1.3408 | 1.3864 | 1.4421 |
| 0.8 | 1.0289 | 1.0610 | 1.0971 | 1.1383 | 1.1860 | 1.2426 | 1.3120 | 1.3536 | 1.4018 | 1.4590 | 1.5303 |
| 1.0 | 1.0313 | 1.0664 | 1.1061 | 1.1516 | 1.2049 | 1.2688 | 1.3483 | 1.3965 | 1.4528 | 1.5207 | 1.6064 |
| 1.5 | 1.0356 | 1.0759 | 1.1220 | 1.1756 | 1.2394 | 1.3174 | 1.4168 | 1.4785 | 1.5520 | 1.6427 | 1.7608 |
| 2.0 | 1.0384 | 1.0821 | 1.1326 | 1.1918 | 1.2630 | 1.3513 | 1.4658 | 1.5379 | 1.6252 | 1.7347 | 1.8805 |
| 3.0 | 1.0419 | 1.0900 | 1.1461 | 1.2127 | 1.2939 | 1.3964 | 1.5323 | 1.6199 | 1.7278 | 1.8666 | 2.0578 |
| 4.0 | 1.0441 | 1.0949 | 1.1545 | 1.2258 | 1.3135 | 1.4254 | 1.5761 | 1.6746 | 1.7976 | 1.9585 | 2.1852 |
| 5.0 | 1.0455 | 1.0982 | 1.1603 | 1.2349 | 1.3272 | 1.4459 | 1.6075 | 1.7143 | 1.8488 | 2.0269 | 2.2825 |
| 7.5 | 1.0477 | 1.1033 | 1.1691 | 1.2489 | 1.3486 | 1.4783 | 1.6579 | 1.7786 | 1.9330 | 2.1417 | 2.4503 |
| 10 | 1.0490 | 1.1062 | 1.1742 | 1.2571 | 1.3611 | 1.4975 | 1.6882 | 1.8177 | 1.9849 | 2.2140 | 2.5592 |
| 15 | 1.0504 | 1.1095 | 1.1800 | 1.2662 | 1.3753 | 1.5195 | 1.7235 | 1.8636 | 2.0467 | 2.3015 | 2.6946 |
| 20 | 1.0512 | 1.1113 | 1.1832 | 1.2714 | 1.3832 | 1.5319 | 1.7436 | 1.8901 | 2.0828 | 2.3533 | 2.7768 |
| 30 | 1.0520 | 1.1132 | 1.1866 | 1.2769 | 1.3920 | 1.5456 | 1.7662 | 1.9199 | 2.1237 | 2.4130 | 2.8735 |
| 50 | 1.0528 | 1.1149 | 1.1897 | 1.2819 | 1.3998 | 1.5580 | 1.7866 | 1.9471 | 2.1614 | 2.4687 | 2.9660 |
| 75 | 1.0532 | 1.1158 | 1.1913 | 1.2846 | 1.4040 | 1.5647 | 1.7980 | 1.9624 | 2.1827 | 2.5006 | 3.0199 |
| 100 | 1.0534 | 1.1163 | 1.1922 | 1.2860 | 1.4063 | 1.5684 | 1.8040 | 1.9706 | 2.1942 | 2.5179 | 3.0496 |
| 150 | 1.0536 | 1.1168 | 1.1931 | 1.2875 | 1.4087 | 1.5722 | 1.8105 | 1.9793 | 2.2066 | 2.5366 | 3.0819 |
| 200 | 1.0537 | 1.1171 | 1.1936 | 1.2883 | 1.4099 | 1.5742 | 1.8139 | 1.9839 | 2.2131 | 2.5466 | 3.0993 |
| 300 | 1.0538 | 1.1174 | 1.1941 | 1.2891 | 1.4112 | 1.5763 | 1.8175 | 1.9888 | 2.2200 | 2.5572 | 3.1179 |
| 500 | 1.0539 | 1.1176 | 1.1945 | 1.2898 | 1.4123 | 1.5781 | 1.8205 | 1.9929 | 2.2259 | 2.5662 | 3.1339 |
| 750 | 1.0540 | 1.1178 | 1.1947 | 1.2902 | 1.4129 | 1.5790 | 1.8221 | 1.9951 | 2.2290 | 2.5710 | 3.1425 |
| 1000 | 1.0540 | 1.1178 | 1.1948 | 1.2904 | 1.4132 | 1.5795 | 1.8230 | 1.9962 | 2.2306 | 2.5735 | 3.1470 |
| ∞ | 1.0541 | 1.1180 | 1.1952 | 1.2910 | 1.4142 | 1.5811 | 1.8257 | 2.0000 | 2.2361 | 2.5820 | 3.1623 |

*Таблица 2*

## ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $H(z, \lambda)$ ПРИ $\lambda$, БЛИЗКИХ К ЕДИНИЦЕ

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5\cdot10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 0.05 | 1.0743 | 1.0781 | 1.0824 | 1.0856 | 1.0862 | 1.0869 | 1.0877 | 1.0882 | 1.0884 | 1.0886 | 1.0887 | 1.0887 | 1.0887 | 1.0887 |
| 0.1 | 1.1285 | 1.1356 | 1.1440 | 1.1503 | 1.1516 | 1.1529 | 1.1545 | 1.1556 | 1.1560 | 1.1565 | 1.1566 | 1.1566 | 1.1566 | 1.1566 |
| 0.2 | 1.2180 | 1.2317 | 1.2483 | 1.2611 | 1.2637 | 1.2665 | 1.2697 | 1.2721 | 1.2730 | 1.2739 | 1.2742 | 1.2742 | 1.2743 | 1.2743 |
| 0.3 | 1.2936 | 1.3140 | 1.3389 | 1.3585 | 1.3624 | 1.3668 | 1.3719 | 1.3756 | 1.3771 | 1.3785 | 1.3790 | 1.3790 | 1.3791 | 1.3791 |
| 0.4 | 1.3604 | 1.3873 | 1.4208 | 1.4474 | 1.4529 | 1.4589 | 1.4660 | 1.4711 | 1.4732 | 1.4752 | 1.4758 | 1.4759 | 1.4759 | 1.4759 |
| 0.5 | 1.4207 | 1.4542 | 1.4962 | 1.5301 | 1.5371 | 1.5450 | 1.5541 | 1.5608 | 1.5635 | 1.5662 | 1.5670 | 1.5671 | 1.5671 | 1.5671 |
| 0.6 | 1.4758 | 1.5158 | 1.5665 | 1.6079 | 1.6166 | 1.6263 | 1.6375 | 1.6459 | 1.6493 | 1.6526 | 1.6537 | 1.6538 | 1.6538 | 1.6538 |
| 0.7 | 1.5267 | 1.5731 | 1.6326 | 1.6817 | 1.6920 | 1.7036 | 1.7172 | 1.7272 | 1.7313 | 1.7354 | 1.7367 | 1.7368 | 1.7369 | 1.7369 |
| 0.8 | 1.5741 | 1.6268 | 1.6950 | 1.7520 | 1.7641 | 1.7776 | 1.7936 | 1.8054 | 1.8103 | 1.8151 | 1.8166 | 1.8168 | 1.8168 | 1.8168 |
| 0.9 | 1.6184 | 1.6774 | 1.7544 | 1.8193 | 1.8332 | 1.8488 | 1.8671 | 1.8809 | 1.8865 | 1.8921 | 1.8938 | 1.8941 | 1.8941 | 1.8941 |
| 1.0 | 1.6600 | 1.7251 | 1.8110 | 1.8840 | 1.8997 | 1.9173 | 1.9382 | 1.9539 | 1.9603 | 1.9667 | 1.9687 | 1.9690 | 1.9691 | 1.9691 |
| 1.2 | 1.7362 | 1.8136 | 1.9169 | 2.0064 | 2.0258 | 2.0478 | 2.0739 | 2.0936 | 2.1017 | 2.1099 | 2.1125 | 2.1128 | 2.1129 | 2.1129 |
| 1.4 | 1.8048 | 1.8939 | 2.0146 | 2.1208 | 2.1441 | 2.1705 | 2.2022 | 2.2262 | 2.2361 | 2.2461 | 2.2493 | 2.2497 | 2.2498 | 2.2498 |
| 1.6 | 1.8671 | 1.9676 | 2.1055 | 2.2286 | 2.2558 | 2.2869 | 2.3241 | 2.3527 | 2.3645 | 2.3765 | 2.3803 | 2.3808 | 2.3809 | 2.3809 |
| 1.8 | 1.9240 | 2.0355 | 2.1904 | 2.3305 | 2.3618 | 2.3976 | 2.4408 | 2.4739 | 2.4878 | 2.5018 | 2.5063 | 2.5069 | 2.5070 | 2.5070 |
| 2.0 | 1.9763 | 2.0986 | 2.2701 | 2.4274 | 2.4627 | 2.5034 | 2.5526 | 2.5906 | 2.6066 | 2.6227 | 2.6279 | 2.6286 | 2.6287 | 2.6288 |
| 2.2 | 2.0247 | 2.1573 | 2.3453 | 2.5197 | 2.5592 | 2.6047 | 2.6602 | 2.7032 | 2.7213 | 2.7397 | 2.7456 | 2.7465 | 2.7466 | 2.7466 |
| 2.4 | 2.0697 | 2.2123 | 2.4163 | 2.6079 | 2.6516 | 2.7022 | 2.7640 | 2.8121 | 2.8325 | 2.8532 | 2.8599 | 2.8608 | 2.8610 | 2.8610 |
| 2.6 | 2.1116 | 2.2639 | 2.4838 | 2.6924 | 2.7404 | 2.7960 | 2.8643 | 2.9177 | 2.9404 | 2.9635 | 2.9709 | 2.9720 | 2.9722 | 2.9722 |
| 2.8 | 2.1508 | 2.3125 | 2.5479 | 2.7736 | 2.8258 | 2.8866 | 2.9615 | 3.0203 | 3.0453 | 3.0709 | 3.0792 | 3.0804 | 3.0805 | 3.0805 |
| 3.0 | 2.1876 | 2.3584 | 2.6090 | 2.8517 | 2.9082 | 2.9741 | 3.0557 | 3.1200 | 3.1474 | 3.1756 | 3.1847 | 3.1861 | 3.1862 | 3.1863 |
| 3.2 | 2.2222 | 2.4018 | 2.6673 | 2.9269 | 2.9878 | 3.0589 | 3.1473 | 3.2172 | 3.2471 | 3.2779 | 3.2879 | 3.2893 | 3.2895 | 3.2896 |
| 3.4 | 2.2549 | 2.4430 | 2.7232 | 2.9995 | 3.0647 | 3.1411 | 3.2364 | 3.3120 | 3.3444 | 3.3779 | 3.3888 | 3.3904 | 3.3906 | 3.3906 |
| 3.6 | 2.2858 | 2.4822 | 2.7767 | 3.0697 | 3.1392 | 3.2209 | 3.3231 | 3.4045 | 3.4395 | 3.4758 | 3.4876 | 3.4893 | 3.4896 | 3.4896 |
| 3.8 | 2.3150 | 2.5195 | 2.8280 | 3.1376 | 2.2114 | 3.2985 | 3.4076 | 3.4949 | 3.5326 | 3.5717 | 3.5845 | 3.5863 | 3.5866 | 3.5866 |

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5.10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.0 | 2.7428 | 2.5551 | 2.8774 | 3.2034 | 4.2816 | 3.3739 | 3.4902 | 3.5834 | 3.6238 | 3.6658 | 3.6795 | 3.6815 | 3.6818 | 3.6818 |
| 4.2 | 2.3692 | 2.5891 | 2.9248 | 3.2671 | 3.3497 | 3.4474 | 3.5707 | 3.6701 | 3.7132 | 3.7581 | 3.7728 | 3.7749 | 3.7752 | 3.7753 |
| 4.4 | 2.3944 | 2.6216 | 2.9706 | 3.3290 | 3.4159 | 3.5190 | 3.6495 | 3.7550 | 3.8009 | 3.8488 | 3.8645 | 3.8668 | 3.8671 | 3.8671 |
| 4.6 | 2.4184 | 2.6527 | 3.0147 | 3.3892 | 3.4804 | 3.5888 | 3.7266 | 3.8383 | 3.8870 | 3.9379 | 3.9546 | 3.9571 | 3.9574 | 3.9575 |
| 4.8 | 2.4413 | 2.6826 | 3.0573 | 3.4476 | 3.5431 | 3.6570 | 3.0820 | 3.9200 | 3.9715 | 4.0255 | 4.0434 | 4.0460 | 4.0463 | 4.0464 |
| 5.0 | 2.4633 | 2.7113 | 3.0984 | 3.5045 | 3.6043 | 3.7236 | 3.8759 | 4.0002 | 4.0547 | 4.1118 | 4.1307 | 4.1335 | 4.1338 | 4.1339 |
| 5.5 | 2.5142 | 2.7783 | 3.1956 | 3.6403 | 3.7509 | 3.8836 | 4.0543 | 4.1947 | 4.2566 | 4.3218 | 4.3434 | 4.3467 | 4.3471 | 4.3471 |
| 6.0 | 2.5602 | 2.8394 | 3.2854 | 3.7679 | 3.8691 | 4.0353 | 4.2246 | 4.3814 | 4.4508 | 4.5244 | 4.5489 | 4.5526 | 4.5531 | 4.5531 |
| 6.5 | 2.6021 | 2.8954 | 3.3688 | 3.8881 | 4.0198 | 4.1795 | 4.3874 | 4.5609 | 4.6382 | 4.7204 | 4.7479 | 4.7520 | 4.7526 | 4.7526 |
| 7.0 | 2.6404 | 2.9470 | 3.4466 | 4.0018 | 4.1439 | 4.3170 | 4.5437 | 4.7341 | 4.8194 | 4.9104 | 4.9410 | 4.9456 | 4.9462 | 4.9463 |
| 7.5 | 2.6755 | 2.9948 | 3.5193 | 4.1096 | 4.2620 | 4.4483 | 4.6938 | 4.9014 | 4.9948 | 5.0950 | 5.1288 | 5.1338 | 5.1345 | 5.1346 |
| 8.0 | 2.7080 | 3.0391 | 3.5876 | 4.2119 | 4.3745 | 4.5740 | 4.8384 | 5.0633 | 5.1651 | 5.2745 | 5.3116 | 5.3172 | 5.3179 | 5.3180 |
| 8.5 | 2.7380 | 3.0804 | 3.6518 | 4.3094 | 4.4820 | 4.6947 | 4.9779 | 5.2203 | 5.3305 | 5.4495 | 5.4899 | 5.4960 | 5.4968 | 5.4970 |
| 9.0 | 2.7660 | 3.1189 | 3.7124 | 4.4025 | 4.5840 | 4.8106 | 5.1127 | 5.3728 | 5.4915 | 5.6202 | 5.6641 | 5.6707 | 5.6716 | 5.6717 |
| 9.5 | 2.7920 | 3.1551 | 3.7696 | 4.4914 | 4.6836 | 4.9221 | 4.2430 | 5.5209 | 5.6483 | 5.7869 | 5.8344 | 5.8416 | 5.8425 | 5.8427 |
| 10 | 2.8164 | 3.1890 | 3.8239 | 4.5765 | 4.7783 | 5.0296 | 5.3693 | 5.6651 | 5.8013 | 5.9500 | 6.0011 | 6.0088 | 6.0099 | 6.0100 |
| 11 | 2.8606 | 3.2512 | 3.9244 | 4.7364 | 4.9570 | 5.2335 | 5.6106 | 5.9426 | 6.0967 | 6.2660 | 6.3246 | 6.3334 | 6.3347 | 6.3348 |
| 12 | 2.8999 | 3.3067 | 4.0155 | 4.8843 | 5.1230 | 5.4242 | 5.8385 | 6.2068 | 6.3792 | 6.5697 | 6.6361 | 6.6462 | 6.6476 | 6.6478 |
| 13 | 2.9350 | 3.3568 | 4.0987 | 5.0215 | 5.2779 | 5.6032 | 6.0544 | 6.4593 | 6.6502 | 6.8626 | 6.9370 | 6.9484 | 6.9499 | 6.9501 |
| 14 | 2.9666 | 3.4021 | 4.1750 | 5.1494 | 5.4230 | 5.7719 | 6.2595 | 6.7012 | 7.9109 | 7.1456 | 7.2283 | 7.2410 | 7.2428 | 7.2430 |
| 15 | 2.9952 | 3.4434 | 4.2453 | 5.2691 | 5.5592 | 5.9313 | 6.4549 | 6.9334 | 7.1622 | 7.4198 | 7.5110 | 7.5251 | 7.5270 | 7.5273 |
| 16 | 3.0213 | 3.4812 | 4.3104 | 5.3813 | 5.6876 | 6.0822 | 6.6415 | 7.1569 | 7.4050 | 7.6858 | 7.7858 | 7.8013 | 7.8034 | 7.8037 |
| 17 | 3.0451 | 3.5161 | 4.3708 | 5.4870 | 5.8089 | 6.2256 | 6.8200 | 7.3723 | 7.6398 | 7.9443 | 8.0534 | 8.0703 | 8.0726 | 8.0730 |
| 18 | 3.0670 | 3.5482 | 4.4271 | 5.5867 | 5.9238 | 6.3620 | 6.9912 | 7.5803 | 8.8675 | 8.1960 | 8.3143 | 8.3327 | 8.3352 | 8.3356 |
| 19 | 3.0873 | 3.5780 | 4.4798 | 5.6809 | 6.0328 | 6.4921 | 7.1555 | 7.7814 | 8.0884 | 8.4413 | 8.5690 | 8.5889 | 8.5917 | 8.5921 |

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5\cdot10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 3.1060 | 3.6057 | 4.5291 | 5.7702 | 6.1365 | 6.6164 | 7.3136 | 7.9761 | 8.3030 | 8.6807 | 8.8180 | 8.8394 | 8.8425 | 8.8429 |
| 22 | 3.1396 | 3.6557 | 4.6191 | 5.9358 | 6.3294 | 6.8492 | 7.6126 | 8.3481 | 8.7151 | 9.1432 | 9.3003 | 9.3249 | 9.3284 | 9.3289 |
| 24 | 3.1689 | 3.6996 | 4.6992 | 6.0860 | 6.5057 | 7.0636 | 7.8914 | 8.6992 | 9.1066 | 9.5861 | 9.7637 | 9.7917 | 9.7957 | 9.7962 |
| 26 | 3.1948 | 3.7386 | 4.7712 | 6.2232 | 6.6675 | 7.2619 | 8.1522 | 9.0318 | 9.4797 | 10.012 | 10.219 | 10.242 | 10.246 | 10.247 |
| 28 | 3.2177 | 3.7734 | 4.8361 | 6.3492 | 6.8168 | 7.4462 | 8.3973 | 9.3477 | 9.8365 | 10.422 | 10.642 | 10.677 | 10.682 | 10.683 |
| 30 | 3.2383 | 3.8047 | 4.8952 | 6.4654 | 6.9552 | 7.6181 | 8.6262 | 9.6487 | 10.178 | 10.818 | 11.060 | 11.099 | 11.104 | 11.105 |
| 32 | 3.2569 | 3.8331 | 4.9491 | 6.5730 | 7.0840 | 7.7790 | 8.8465 | 9.9362 | 10.507 | 11.201 | 11.466 | 11.509 | 11.515 | 11.515 |
| 34 | 3.2737 | 3.8589 | 4.9986 | 6.6730 | 7.2041 | 1.9300 | 9.0534 | 10.211 | 10.823 | 11.572 | 11.861 | 11.908 | 11.914 | 11.915 |
| 36 | 3.2890 | 3.8825 | 5.0443 | 6.7663 | 7.3166 | 8.0722 | 9.2498 | 10.475 | 11.127 | 11.933 | 12.245 | 12.296 | 12.303 | 12.304 |
| 38 | 3.3030 | 3.9042 | 5.0865 | 6.8535 | 7.4222 | 8.2064 | 9.4368 | 10.729 | 11.422 | 12.283 | 12.620 | 12.675 | 12.683 | 12.684 |
| 40 | 3.3159 | 3.9242 | 5.1257 | 6.9354 | 7.5217 | 8.3334 | 9.6150 | 10.972 | 11.706 | 12.625 | 12.986 | 13.045 | 13.054 | 13.055 |
| 42 | 3.3278 | 3.9427 | 5.1622 | 7.0123 | 7.6155 | 8.4537 | 9.7853 | 11.207 | 11.982 | 12.957 | 13.344 | 13.407 | 13.416 | 13.417 |
| 44 | 3.3388 | 3.9599 | 5.1962 | 7.0849 | 7.7042 | 8.5680 | 9.9482 | 11.434 | 12.249 | 13.282 | 13.694 | 13.762 | 13.771 | 13.773 |
| 46 | 3.3490 | 3.9759 | 5.2282 | 7.1534 | 7.7882 | 8.6767 | 10.104 | 11.653 | 12.508 | 13.599 | 14.037 | 14.109 | 14.119 | 14.121 |
| 48 | 3.3586 | 3.9909 | 5.2581 | 7.2182 | 7.8679 | 8.7803 | 10.254 | 11.865 | 12.759 | 13.909 | 14.372 | 14.449 | 14.460 | 14.462 |
| 50 | 3.3674 | 4.0048 | 5.2863 | 7.2797 | 7.9437 | 8.8792 | 10.398 | 12.069 | 13.004 | 14.212 | 14.702 | 14.784 | 14.795 | 14.797 |
| 55 | 3.3873 | 4.0362 | 5.3499 | 7.4204 | 8.1180 | 9.1080 | 10.734 | 12.555 | 13.588 | 14.942 | 15.500 | 15.594 | 15.607 | 15.609 |
| 60 | 3.4044 | 4.0633 | 5.4055 | 7.5452 | 8.2735 | 9.3138 | 11.042 | 13.005 | 14.136 | 15.638 | 16.265 | 16.371 | 16.387 | 16.389 |
| 65 | 3.4193 | 4.0870 | 5.4544 | 7.6568 | 8.4133 | 9.5004 | 11.324 | 13.426 | 14.652 | 16.303 | 17.001 | 17.120 | 17.138 | 17.140 |
| 70 | 3.4323 | 4.1079 | 5.4980 | 7.7574 | 8.5399 | 9.6705 | 11.584 | 13.820 | 15.140 | 16.940 | 17.711 | 17.843 | 17.863 | 17.865 |
| 75 | 3.4439 | 4.1265 | 5.5369 | 7.8486 | 8.6551 | 9.8263 | 11.825 | 14.190 | 15.603 | 17.552 | 18.397 | 18.543 | 18.565 | 18.567 |
| 80 | 3.4542 | 4.1431 | 5.5720 | 7.9317 | 8.7606 | 9.9698 | 12.050 | 14.539 | 16.043 | 18.141 | 19.062 | 19.222 | 19.245 | 19.249 |
| 85 | 3.4635 | 4.1581 | 5.6039 | 8.0078 | 8.8576 | 10.102 | 12.260 | 14.869 | 16.462 | 18.710 | 19.707 | 19.882 | 19.907 | 19.911 |
| 90 | 3.4719 | 4.1716 | 5.6329 | 8.0779 | 8.9471 | 10.226 | 12.456 | 15.182 | 16.863 | 19.259 | 20.334 | 20.524 | 20.552 | 20.555 |
| 95 | 3.4795 | 4.1840 | 5.6595 | 8.1425 | 9.0300 | 10.340 | 12.640 | 15.479 | 17.247 | 19.791 | 20.945 | 21.150 | 21.180 | 21.184 |

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5\cdot10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 3.4865 | 4.1953 | 5.6839 | 8.2025 | 9.1071 | 10.447 | 12.814 | 15.762 | 17.615 | 20.307 | 21.541 | 21.760 | 21.793 | 21.797 |
| 110 | 3.4988 | 4.2153 | 5.7273 | 8.3102 | 9.2461 | 10.641 | 13.133 | 16.290 | 18.307 | 21.294 | 22.690 | 22.941 | 22.979 | 22.984 |
| 120 | 3.5092 | 4.2324 | 5.7647 | 8.4043 | 9.3684 | 10.813 | 13.419 | 16.773 | 18.949 | 22.228 | 23.789 | 24.073 | 24.116 | 24.122 |
| 130 | 3.5183 | 4.2473 | 5.7974 | 8.4874 | 9.4767 | 10.967 | 13.678 | 17.217 | 19.548 | 23.116 | 24.844 | 25.163 | 25.211 | 25.217 |
| 140 | 3.5262 | 4.2603 | 5.8262 | 8.5615 | 9.5736 | 11.105 | 13.914 | 17.628 | 20.107 | 23.962 | 25.860 | 26.213 | 26.267 | 26.274 |
| 150 | 3.5331 | 4.2717 | 5.8517 | 8.6278 | 9.6608 | 11.230 | 14.130 | 18.010 | 20.632 | 24.770 | 26.841 | 27.230 | 27.289 | 27.297 |
| 160 | 3.5393 | 4.2820 | 5.8746 | 8.6877 | 9.7398 | 11.344 | 14.328 | 18.366 | 21.127 | 25.544 | 27.790 | 28.215 | 28.280 | 28.289 |
| 170 | 3.5448 | 4.2911 | 5.8952 | 8.7421 | 9.8117 | 11.448 | 14.511 | 18.699 | 21.594 | 26.287 | 28.709 | 29.172 | 29.243 | 29.252 |
| 180 | 3.5498 | 4.2994 | 5.9138 | 8.7917 | 9.8775 | 11.544 | 14.681 | 19.012 | 22.036 | 27.002 | 29.602 | 30.102 | 30.179 | 30.190 |
| 190 | 3.5543 | 4.3069 | 5.9308 | 8.8372 | 9.9380 | 11.632 | 14.839 | 19.306 | 22.456 | 27.691 | 30.469 | 31.009 | 31.092 | 31.104 |
| 200 | 3.5584 | 4.3137 | 5.9464 | 8.8791 | 9.9937 | 11.714 | 14.986 | 19.583 | 22.855 | 28.356 | 31.314 | 31.894 | 31.983 | 31.996 |
| 220 | 3.5656 | 4.3258 | 5.9738 | 8.9536 | 10.093 | 11.861 | 15.253 | 20.093 | 23.598 | 29.620 | 32.942 | 33.602 | 33.705 | 33.719 |
| 240 | 3.5718 | 4.3360 | 5.9972 | 9.0179 | 10.180 | 11.989 | 15.489 | 20.553 | 24.277 | 30.806 | 34.494 | 35.239 | 35.355 | 35.371 |
| 260 | 3.5770 | 4.3448 | 6.0176 | 9.0742 | 10.256 | 12.102 | 15.699 | 20.970 | 24.901 | 31.923 | 35.981 | 36.812 | 36.942 | 36.961 |
| 280 | 3.5816 | 4.3525 | 6.0353 | 9.1238 | 10.323 | 12.203 | 15.888 | 21.350 | 25.477 | 32.980 | 37.410 | 38.328 | 38.474 | 38.494 |
| 300 | 3.5856 | 4.3592 | 6.0510 | 9.1680 | 10.382 | 12.293 | 16.059 | 21.699 | 26.012 | 33.983 | 38.785 | 39.794 | 39.954 | 39.977 |
| 320 | 3.5892 | 4.3652 | 6.0650 | 9.2075 | 10.436 | 12.374 | 16.215 | 22.020 | 26.509 | 34.937 | 40.113 | 41.214 | 41.390 | 41.414 |
| 340 | 3.5923 | 4.3706 | 6.0776 | 9.2432 | 10.485 | 12.448 | 16.357 | 22.318 | 26.974 | 35.846 | 41.397 | 42.592 | 42.783 | 42.810 |
| 360 | 3.5952 | 4.3754 | 6.0889 | 9.2755 | 10.529 | 12.515 | 16.487 | 22.594 | 27.411 | 36.716 | 42.641 | 43.931 | 44.139 | 44.169 |
| 380 | 3.5978 | 4.3798 | 6.0991 | 9.3050 | 10.569 | 12.576 | 16.608 | 22.852 | 27.820 | 37.548 | 43.849 | 45.236 | 45.460 | 45.492 |
| 400 | 3.6001 | 4.3837 | 6.1085 | 9.3320 | 10.606 | 12.633 | 16.719 | 23.092 | 28.207 | 38.346 | 45.022 | 46.507 | 46.749 | 46.783 |
| 420 | 3.6022 | 4.3873 | 6.1170 | 9.3568 | 10.640 | 12.685 | 16.822 | 23.318 | 28.571 | 39.113 | 46.163 | 47.749 | 48.007 | 48.044 |
| 440 | 3.6042 | 4.3906 | 6.1249 | 9.3797 | 10.671 | 12.734 | 16.919 | 23.529 | 28.917 | 39.850 | 47.275 | 48.962 | 49.238 | 49.277 |
| 460 | 3.6060 | 4.3937 | 6.1321 | 9.4009 | 10.701 | 12.779 | 17.009 | 23.729 | 29.244 | 40.561 | 48.360 | 50.149 | 50.443 | 50.485 |
| 480 | 3.6077 | 4.3965 | 6.1388 | 9.4205 | 10.728 | 12.821 | 17.093 | 22.917 | 29.556 | 41.247 | 49.418 | 51.310 | 51.623 | 51.668 |

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5\cdot10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 3.6092 | 4.3991 | 6.1450 | 9.4389 | 10.753 | 12.860 | 17.172 | 24.095 | 29.852 | 41.909 | 50.452 | 52.449 | 52.780 | 52.828 |
| 550 | 3.6126 | 4.4049 | 6.1588 | 9.4796 | 10.810 | 12.948 | 17.350 | 24.501 | 30.534 | 43.470 | 52.938 | 55.202 | 55.581 | 55.636 |
| 600 | 3.6154 | 4.4098 | 6.1706 | 9.5145 | 10.858 | 13.023 | 17.505 | 24.859 | 31.145 | 44.913 | 55.296 | 57.836 | 58.264 | 58.326 |
| 650 | 3.6179 | 4.4140 | 6.1806 | 9.5447 | 10.900 | 13.089 | 17.641 | 25.178 | 31.695 | 46.254 | 57.549 | 60.364 | 60.843 | 60.912 |
| 700 | 3.6200 | 4.4176 | 6.1894 | 9.5711 | 10.937 | 13.147 | 17.761 | 25.464 | 32.195 | 47.504 | 59.700 | 62.798 | 63.330 | 63.407 |
| 750 | 3.6219 | 4.4208 | 6.1971 | 9.5944 | 10.969 | 13.198 | 17.869 | 25.723 | 32.651 | 48.675 | 61.762 | 65.148 | 65.733 | 65.819 |
| 800 | 3.6235 | 4.4236 | 6.2040 | 9.6152 | 10.998 | 13.244 | 17.966 | 25.958 | 33.069 | 49.776 | 63.744 | 67.422 | 68.062 | 68.156 |
| 850 | 3.6250 | 4.4262 | 6.2101 | 9.6338 | 11.024 | 13.285 | 18.053 | 26.172 | 33.455 | 50.813 | 65.652 | 69.626 | 70.322 | 70.424 |
| 900 | 3.6263 | 4.4284 | 6.2155 | 9.6505 | 11.048 | 13.323 | 18.133 | 26.369 | 33.811 | 51.792 | 67.493 | 71.766 | 72.521 | 72.631 |
| 950 | 3.6275 | 4.4304 | 6.2205 | 9.6657 | 11.069 | 13.357 | 18.206 | 26.550 | 34.142 | 52.720 | 69.272 | 73.848 | 74.661 | 74.781 |
| 1000 | 3.6286 | 4.4323 | 6.2250 | 9.6796 | 11.088 | 13.388 | 18.272 | 26.718 | 34.451 | 53.602 | 70.994 | 75.876 | 76.749 | 76.877 |
| 1100 | 3.6304 | 4.4355 | 6.2329 | 9.7039 | 11.123 | 13.443 | 18.391 | 27.019 | 35.009 | 55.238 | 74.283 | 79.784 | 80.779 | 80.927 |
| 1200 | 3.6320 | 4.4382 | 6.2395 | 9.7246 | 11.152 | 13.490 | 18.493 | 27.281 | 35.501 | 56.729 | 77.387 | 83.516 | 84.638 | 84.806 |
| 1300 | 3.6334 | 4.4406 | 6.2452 | 9.7424 | 11.177 | 13.530 | 18.582 | 27.511 | 35.938 | 58.096 | 80.328 | 87.094 | 88.347 | 88.534 |
| 1400 | 3.6345 | 4.4426 | 6.2502 | 9.7580 | 11.199 | 13.566 | 18.660 | 27.716 | 36.331 | 59.356 | 83.124 | 90.534 | 91.920 | 92.129 |
| 1500 | 3.6356 | 4.4443 | 6.2546 | 9.7716 | 11.218 | 13.597 | 18.729 | 27.899 | 36.685 | 60.521 | 85.790 | 93.850 | 95.373 | 95.604 |
| 1600 | 3.6365 | 4.4459 | 6.2584 | 9.7838 | 11.236 | 13.624 | 18.791 | 28.064 | 37.007 | 61.605 | 88.339 | 97.054 | 93.718 | 98.970 |
| 1700 | 3.6373 | 4.4473 | 6.2618 | 9.7946 | 11.251 | 13.649 | 18.846 | 28.213 | 37.301 | 62.615 | 90.782 | 100.16 | 101.96 | 102.24 |
| 1800 | 3.6380 | 4.4485 | 6.2649 | 9.8043 | 11.265 | 13.672 | 18.897 | 28.350 | 37.570 | 63.561 | 93.127 | 103.17 | 105.12 | 105.42 |
| 1900 | 3.6386 | 4.4496 | 6.2677 | 9.8131 | 11.277 | 13.693 | 18.943 | 28.475 | 37.818 | 64.448 | 95.383 | 106.09 | 108.19 | 108.51 |
| 2000 | 3.6392 | 4.4506 | 6.2702 | 9.8211 | 11.289 | 13.712 | 18.985 | 28.589 | 38.047 | 65.283 | 97.557 | 108.93 | 111.18 | 111.53 |
| 2200 | 3.6402 | 4.4524 | 6.2746 | 9.8351 | 11.309 | 13.744 | 19.058 | 28.793 | 38.458 | 66.815 | 101.68 | 114.40 | 116.96 | 117.36 |
| 2400 | 3.6411 | 4.4539 | 6.2783 | 9.8470 | 11.326 | 13.772 | 19.122 | 28.968 | 38.815 | 68.190 | 105.54 | 119.61 | 122.49 | 122.94 |
| 2600 | 3.6418 | 4.4552 | 6.2814 | 9.8572 | 11.340 | 13.796 | 19.176 | 29.122 | 39.130 | 69.433 | 109.16 | 124.60 | 127.80 | 128.30 |
| 2800 | 3.6424 | 4.4563 | 6.2842 | 9.8660 | 11.353 | 13.817 | 19.224 | 29.257 | 39.409 | 70.563 | 112.59 | 129.38 | 132.91 | 133.47 |

| $z$ \ $1-\lambda$ | 0.075 | 0.050 | 0.025 | 0.01 | $7.5\cdot10^{-3}$ | $5\cdot10^{-3}$ | $2.5\cdot10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $5\cdot10^{-4}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | 3.6430 | 4.4572 | 6.2866 | 9.8738 | 11.364 | 13.835 | 19.266 | 29.377 | 39.659 | 71.597 | 115.83 | 133.98 | 137.85 | 138.47 |
| 3200 | 3.6435 | 4.4581 | 6.2887 | 9.8807 | 11.374 | 13.851 | 19.304 | 29.484 | 39.883 | 72.547 | 118.90 | 138.42 | 142.63 | 143.31 |
| 3400 | 3.6439 | 4.4588 | 6.2906 | 9.8868 | 11.383 | 13.866 | 19.337 | 29.581 | 40.087 | 73.424 | 121.83 | 142.70 | 147.27 | 148.00 |
| 3600 | 3.6443 | 4.4595 | 6.2923 | 9.8923 | 11.391 | 13.879 | 19.368 | 29.668 | 40.274 | 74.236 | 124.62 | 146.85 | 151.78 | 152.57 |
| 3800 | 3.6446 | 4.4601 | 6.2938 | 9.8973 | 11.398 | 13.891 | 19.395 | 29.748 | 40.443 | 74.992 | 127.28 | 150.88 | 156.16 | 157.02 |
| 4000 | 3.6450 | 4.4606 | 6.2952 | 9.9018 | 11.404 | 13.902 | 19.420 | 29.821 | 40.600 | 75.697 | 129.84 | 154.78 | 160.44 | 161.35 |
| 4200 | 3.6452 | 4.4611 | 6.2965 | 9.9059 | 11.410 | 13.911 | 19.443 | 29.888 | 40.743 | 76.356 | 132.29 | 158.58 | 164.60 | 165.59 |
| 4400 | 3.6455 | 4.4616 | 6.2976 | 9.9096 | 11.416 | 13.920 | 19.464 | 29.950 | 40.877 | 76.975 | 134.64 | 162.28 | 168.68 | 169.73 |
| 4600 | 3.6457 | 4.4620 | 6.2987 | 9.9131 | 11.421 | 13.929 | 19.484 | 30.008 | 41.001 | 77.557 | 136.91 | 165.88 | 172.66 | 173.78 |
| 4800 | 3.6460 | 4.4624 | 6.2996 | 9.9163 | 11.425 | 13.936 | 19.501 | 30.061 | 41.116 | 78.105 | 139.09 | 169.39 | 176.56 | 177.74 |
| 5000 | 3.6462 | 4.4628 | 6.3005 | 9.9192 | 11.429 | 13.943 | 19.518 | 30.110 | 41.223 | 78.623 | 141.19 | 172.82 | 180.37 | 181.63 |
| 5500 | 3.6466 | 4.4635 | 6.3025 | 9.9257 | 11.439 | 13.959 | 19.555 | 30.220 | 41.464 | 79.801 | 146.14 | 181.06 | 189.60 | 191.03 |
| 6000 | 3.6470 | 4.4742 | 6.3042 | 9.9312 | 11.447 | 13.972 | 19.586 | 30.314 | 41.671 | 80.838 | 150.70 | 188.87 | 198.42 | 200.03 |
| 6500 | 3.6473 | 4.4648 | 6.3056 | 9.9359 | 11.454 | 13.984 | 19.613 | 30.396 | 41.851 | 81.759 | 154.92 | 196.31 | 206.88 | 208.68 |
| 7000 | 3.6476 | 4.4652 | 6.3068 | 9.9400 | 11.459 | 13.994 | 19.637 | 30.467 | 42.010 | 82.584 | 158.86 | 203.41 | 215.02 | 217.01 |
| 7500 | 3.6478 | 4.4657 | 6.3079 | 9.9436 | 11.465 | 14.002 | 19.658 | 30.530 | 42.150 | 83.328 | 162.53 | 210.21 | 222.87 | 225.06 |
| 8000 | 3.6480 | 4.4660 | 6.3088 | 9.9467 | 11.469 | 14.010 | 19.676 | 30.585 | 42.275 | 84.003 | 165.97 | 216.73 | 230.46 | 232.86 |
| 8500 | 3.6482 | 4.4664 | 6.3097 | 9.9495 | 11.473 | 14.017 | 19.692 | 30.636 | 42.388 | 84.618 | 169.21 | 223.01 | 237.82 | 240.42 |
| 9000 | 3.6484 | 4.4667 | 6.3104 | 9.9520 | 11.477 | 14.023 | 19.707 | 30.681 | 42.490 | 85.181 | 172.27 | 229.06 | 244.96 | 247.78 |
| 9500 | 3.6485 | 4.4669 | 6.3111 | 9.9543 | 11.480 | 14.028 | 19.720 | 30.722 | 42.583 | 85.700 | 175.15 | 234.90 | 251.90 | 254.93 |
| 10000 | 3.6487 | 4.4672 | 6.3117 | 9.9563 | 11.483 | 14.033 | 19.732 | 30.759 | 42.668 | 86.179 | 177.89 | 240.55 | 258.66 | 261.91 |

*Таблица 3*

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $H(z, 1)$ и $G_1(z)$

| $z$ | $H(z, 1)$ | $G_1(z)$ | $z$ | $H(z, 1)$ | $G_1(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.0000 | $\infty$ | 8.0 | 5.3180 | $2.5617 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.05 | 1.0887 | 2.4733 | 8.5 | 5.4970 | $2.3406 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.1 | 1.1566 | 1.9065 | 9.0 | 5.6718 | $2.1488 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.2 | 1.2743 | 1.3546 | 9.5 | 5.8427 | $1.9814 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.3 | 1.3791 | 1.0553 | 10 | 6.0100 | $1.8341 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.4 | 1.4759 | $8.6085 \cdot 10^{-1}$ | 11 | 6.3349 | $1.5880 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.5 | 1.5671 | $7.2297 \cdot 10^{-1}$ | 12 | 6.6478 | $1.3915 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.6 | 1.6538 | $6.1986 \cdot 10^{-1}$ | 13 | 6.9502 | $1.2316 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.7 | 1.7369 | $5.3985 \cdot 10^{-1}$ | 14 | 7.2431 | $1.0996 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.8 | 1.8168 | $4.7604 \cdot 10^{-1}$ | 15 | 7.5273 | $9.8916 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.9 | 1.8941 | $4.2406 \cdot 10^{-1}$ | 16 | 7.8038 | $8.9570 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.0 | 1.9691 | $3.8098 \cdot 10^{-1}$ | 17 | 8.0730 | $8.1580 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.2 | 2.1129 | $3.1394 \cdot 10^{-1}$ | 18 | 8.3356 | $7.4689 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.4 | 2.2491 | $2.6446 \cdot 10^{-1}$ | 19 | 8.5921 | $6.8697 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.6 | 2.3809 | $2.2667 \cdot 10^{-1}$ | 20 | 8.8429 | $6.3451 \cdot 10^{-3}$ |
| 1.8 | 2.5070 | $1.9702 \cdot 10^{-1}$ | 22 | 9.3289 | $5.4728 \cdot 10^{-3}$ |
| 2.0 | 2.6288 | $1.7324 \cdot 10^{-1}$ | 24 | 9.7963 | $4.7802 \cdot 10^{-3}$ |
| 2.2 | 2.7466 | $1.5383 \cdot 10^{-1}$ | 26 | 10.247 | $4.2200 \cdot 10^{-3}$ |
| 2.4 | 2.8610 | $1.3774 \cdot 10^{-1}$ | 28 | 10.683 | $3.3754 \cdot 10^{-3}$ |
| 2.6 | 2.9722 | $1.2423 \cdot 10^{-1}$ | 30 | 11.106 | $3.7593 \cdot 10^{-3}$ |
| 2.8 | 3.0805 | $1.1275 \cdot 10^{-1}$ | 32 | 11.516 | $3.0515 \cdot 10^{-3}$ |
| 3.0 | 3.1863 | $1.0291 \cdot 10^{-1}$ | 34 | 11.915 | $2.7755 \cdot 10^{-3}$ |
| 3.2 | 3.2896 | $9.4397 \cdot 10^{-2}$ | 36 | 12.304 | $2.5379 \cdot 10^{-3}$ |
| 3.4 | 3.3906 | $8.6973 \cdot 10^{-2}$ | 38 | 12.684 | $2.3319 \cdot 10^{-3}$ |
| 3.6 | 3.4896 | $8.0455 \cdot 10^{-2}$ | 40 | 13.055 | $2.1518 \cdot 10^{-3}$ |
| 3.8 | 3.5866 | $7.4696 \cdot 10^{-2}$ | 42 | 13.418 | $1.9934 \cdot 10^{-3}$ |
| 4.0 | 3.6818 | $6.9579 \cdot 10^{-2}$ | 44 | 13.773 | $1.8531 \cdot 10^{-3}$ |
| 4.2 | 3.7753 | $6.5009 \cdot 10^{-2}$ | 46 | 14.121 | $1.7283 \cdot 10^{-3}$ |
| 4.4 | 3.8671 | $6.0908 \cdot 10^{-2}$ | 48 | 14.462 | $1.6167 \cdot 10^{-3}$ |
| 4.6 | 3.9575 | $5.7211 \cdot 10^{-2}$ | 50 | 14.797 | $1.5164 \cdot 10^{-3}$ |
| 4.8 | 4.0464 | $5.3866 \cdot 10^{-2}$ | 55 | 15.610 | $1.3057 \cdot 10^{-3}$ |
| 5.0 | 4.1339 | $5.0828 \cdot 10^{-2}$ | 60 | 16.389 | $1.1389 \cdot 10^{-3}$ |
| 5.5 | 4.3471 | $4.4340 \cdot 10^{-2}$ | 65 | 17.140 | $1.0044 \cdot 10^{-3}$ |
| 6.0 | 4.5531 | $3.9099 \cdot 10^{-2}$ | 70 | 17.866 | $8.9402 \cdot 10^{-4}$ |
| 6.5 | 4.7526 | $3.4794 \cdot 10^{-2}$ | 75 | 18.568 | $8.0220 \cdot 10^{-4}$ |
| 7.0 | 4.9463 | $3.1210 \cdot 10^{-2}$ | 80 | 19.249 | $7.2487 \cdot 10^{-4}$ |
| 7.5 | 5.1346 | $2.8190 \cdot 10^{-2}$ | 85 | 19.911 | $6.5903 \cdot 10^{-4}$ |

| $z$ | $H(z, 1)$ | $G_1(z)$ | $z$ | $H(z, 1)$ | $G_1(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 20.556 | $6.0244 \cdot 10^{-4}$ | 1000 | 76.897 | $1.4023 \cdot 10^{-5}$ |
| 95 | 21.185 | $5.5340 \cdot 10^{-4}$ | 1100 | 80.950 | $1.2097 \cdot 10^{-5}$ |
| 100 | 21.798 | $5.1058 \cdot 10^{-4}$ | 1200 | 84.832 | $1.0571 \cdot 10^{-5}$ |
| 110 | 22.985 | $4.3962 \cdot 10^{-4}$ | 1300 | 88.563 | $9.3385 \cdot 10^{-6}$ |
| 120 | 24.123 | $3.8350 \cdot 10^{-4}$ | 1400 | 92.161 | $8.3263 \cdot 10^{-6}$ |
| 130 | 25.218 | $3.3824 \cdot 10^{-4}$ | 1500 | 95.639 | $7.4831 \cdot 10^{-6}$ |
| 140 | 26.275 | $3.0112 \cdot 10^{-4}$ | 1600 | 99.009 | $6.7721 \cdot 10^{-6}$ |
| 150 | 27.298 | $2.7024 \cdot 10^{-4}$ | 1700 | 102.28 | $6.1660 \cdot 10^{-6}$ |
| 160 | 28.290 | $2.4424 \cdot 10^{-4}$ | 1800 | 105.46 | $5.6445 \cdot 10^{-6}$ |
| 170 | 29.254 | $2.2210 \cdot 10^{-4}$ | 1900 | 108.56 | $5.1920 \cdot 10^{-6}$ |
| 180 | 30.192 | $2.0308 \cdot 10^{-4}$ | 2000 | 111.58 | $4.7964 \cdot 10^{-6}$ |
| 190 | 31.105 | $1.8659 \cdot 10^{-4}$ | 2200 | 117.42 | $4.1398 \cdot 10^{-6}$ |
| 200 | 31.997 | $1.7219 \cdot 10^{-4}$ | 2400 | 123.01 | $3.6193 \cdot 10^{-6}$ |
| 220 | 33.721 | $1.4832 \cdot 10^{-4}$ | 2600 | 128.38 | $3.1988 \cdot 10^{-6}$ |
| 240 | 35.374 | $1.2945 \cdot 10^{-4}$ | 2800 | 133.56 | $2.8532 \cdot 10^{-6}$ |
| 260 | 36.963 | $1.1422 \cdot 10^{-4}$ | 3000 | 138.57 | $2.5653 \cdot 10^{-6}$ |
| 280 | 38.497 | $1.0172 \cdot 10^{-4}$ | 3200 | 143.42 | $2.3223 \cdot 10^{-6}$ |
| 300 | 39.980 | $9.1330 \cdot 10^{-5}$ | 3400 | 148.12 | $2.1152 \cdot 10^{-6}$ |
| 320 | 41.418 | $8.2573 \cdot 10^{-5}$ | 3600 | 152.70 | $1.9368 \cdot 10^{-6}$ |
| 340 | 42.814 | $7.5117 \cdot 10^{-5}$ | 3800 | 157.16 | $1.7820 \cdot 10^{-6}$ |
| 360 | 44.173 | $6.8707 \cdot 10^{-5}$ | 4000 | 161.50 | $1.6467 \cdot 10^{-6}$ |
| 380 | 45.497 | $6.3149 \cdot 10^{-5}$ | 4200 | 165.75 | $1.5275 \cdot 10^{-6}$ |
| 400 | 46.788 | $5.8294 \cdot 10^{-5}$ | 4400 | 169.90 | $1.4218 \cdot 10^{-6}$ |
| 420 | 48.050 | $5.4024 \cdot 10^{-5}$ | 4600 | 173.96 | $1.3279 \cdot 10^{-6}$ |
| 440 | 49.283 | $5.0246 \cdot 10^{-5}$ | 4800 | 177.94 | $1.2437 \cdot 10^{-6}$ |
| 460 | 50.491 | $4.6883 \cdot 10^{-5}$ | 5000 | 181.83 | $1.1680 \cdot 10^{-6}$ |
| 480 | 51.674 | $4.3876 \cdot 10^{-5}$ | 5500 | 191.27 | $1.0088 \cdot 10^{-6}$ |
| 500 | 52.835 | $4.1174 \cdot 10^{-5}$ | 6000 | 200.30 | $8.8242 \cdot 10^{-7}$ |
| 550 | 55.644 | $3.5496 \cdot 10^{-5}$ | 6500 | 208.98 | $7.8025 \cdot 10^{-7}$ |
| 600 | 58.335 | $3.1002 \cdot 10^{-5}$ | 7000 | 217.35 | $6.9634 \cdot 10^{-7}$ |
| 650 | 60.923 | $2.7374 \cdot 10^{-5}$ | 7500 | 225.43 | $6.2621 \cdot 10^{-7}$ |
| 700 | 63.419 | $2.4395 \cdot 10^{-5}$ | 8000 | 233.26 | $5.6721 \cdot 10^{-7}$ |
| 750 | 65.832 | $2.1916 \cdot 10^{-5}$ | 8500 | 240.86 | $5.1672 \cdot 10^{-7}$ |
| 800 | 68.170 | $1.9825 \cdot 10^{-5}$ | 9000 | 248.25 | $4.7331 \cdot 10^{-7}$ |
| 850 | 70.440 | $1.8045 \cdot 10^{-5}$ | 9500 | 255.45 | $4.3563 \cdot 10^{-7}$ |
| 900 | 72.648 | $1.6513 \cdot 10^{-5}$ | 10000 | 262.47 | $4.0270 \cdot 10^{-7}$ |
| 950 | 74.799 | $1.5184 \cdot 10^{-5}$ | | | |

*Таблица 4*

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $h(q)$

| $q$ | $h(q)$ | $q$ | $h(q)$ | $q$ | $h(q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.000 | 0.34 | 0.781 | 0.68 | 0.687 |
| 0.01 | 0.982 | 0.35 | 0.778 | 0.69 | 0.685 |
| 0.02 | 0.969 | 0.36 | 0.774 | 0.70 | 0.683 |
| 0.03 | 0.958 | 0.37 | 0.771 | 0.71 | 0.681 |
| 0.04 | 0.947 | 0.38 | 0.767 | 0.72 | 0.679 |
| 0.05 | 0.938 | 0.39 | 0.764 | 0.73 | 0.677 |
| 0.06 | 0.929 | 0.40 | 0.761 | 0.74 | 0.675 |
| 0.07 | 0.921 | 0.41 | 0.758 | 0.75 | 0.673 |
| 0.08 | 0.913 | 0.42 | 0.755 | 0.76 | 0.671 |
| 0.09 | 0.905 | 0.43 | 0.751 | 0.77 | 0.669 |
| 0.10 | 0.898 | 0.44 | 0.748 | 0.78 | 0.667 |
| 0.11 | 0.891 | 0.45 | 0.745 | 0.79 | 0.665 |
| 0.12 | 0.885 | 0.46 | 0.742 | 0.80 | 0.663 |
| 0.13 | 0.879 | 0.47 | 0.740 | 0.81 | 0.661 |
| 0.14 | 0.873 | 0.48 | 0.737 | 0.82 | 0.659 |
| 0.15 | 0.867 | 0.49 | 0.734 | 0.83 | 0.657 |
| 0.16 | 0.861 | 0.50 | 0.731 | 0.84 | 0.655 |
| 0.17 | 0.856 | 0.51 | 0.728 | 0.85 | 0.653 |
| 0.18 | 0.850 | 0.52 | 0.726 | 0.86 | 0.652 |
| 0.19 | 0.845 | 0.53 | 0.723 | 0.87 | 0.650 |
| 0.20 | 0.840 | 0.54 | 0.720 | 0.88 | 0.648 |
| 0.21 | 0.835 | 0.55 | 0.718 | 0.89 | 0.646 |
| 0.22 | 0.830 | 0.56 | 0.715 | 0.90 | 0.645 |
| 0.23 | 0.826 | 0.57 | 0.713 | 0.91 | 0.643 |
| 0.24 | 0.821 | 0.58 | 0.710 | 0.92 | 0.641 |
| 0.25 | 0.817 | 0.59 | 0.708 | 0.93 | 0.640 |
| 0.26 | 0.813 | 0.60 | 0.705 | 0.94 | 0.638 |
| 0.27 | 0.808 | 0.61 | 0.703 | 0.95 | 0.636 |
| 0.28 | 0.804 | 0.62 | 0.701 | 0.96 | 0.635 |
| 0.29 | 0.800 | 0.63 | 0.698 | 0.97 | 0.633 |
| 0.30 | 0.796 | 0.64 | 0.696 | 0.98 | 0.631 |
| 0.31 | 0.792 | 0.65 | 0.694 | 0.99 | 0.630 |
| 0.32 | 0.789 | 0.66 | 0.692 | 1.00 | 0.628 |
| 0.33 | 0.785 | 0.67 | 0.689 | | |