АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ I ФЕВРАЛЬ, 1965 ВЫПУСК I

ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. II.

В. В. ИВАНОВ, В. Т. ЩЕРБАКОВ

Поступила 5 мая 1964

Функции $N_{12}(\tau)$ и $N_{21}(\tau)$, определяемые формулой (2), табулированы для $0 \leqslant \tau < 100$.

Настоящая работа является продолжением начатого ранее [1] исследования, имеющего целью изучение и табулирование основных специальных функций, встречающихся в теории переноса излучения в частотах спектральной линии.

В первой статье [1] были рассмотрены функции

$$M_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2 - \tau e^{-x^2}} dx \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

и даны пятизначные таблицы $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant 1000$. В настоящей работе изучаются тесно связанные с $M_k(\tau)$ функции

$$N_{kn}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} E_n(\tau e^{-x^2})\, dx, \tag{2}$$

где $E_n(t)$ — n-ая интегральная показательная функция

$$E_n(t) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{t}{\zeta}} \zeta^{n-2}\, d\zeta. \tag{3}$$

Функции $N_{kn}(\tau)$ играют в теории многократного рассеяния резонансного излучения при допплеровском коэффициенте поглощения ту же роль, какую в теории переноса излучения без изменения частоты играют функции $E_n(\tau)$. В частности, $N_{21}(\tau)$ определяет ядро основного интегрального уравнения, описывающего рассеяние резонансного излучения в плоском слое [2], [3], [4] и в однородной сфере [5], а $N_{12}(\tau)$ определяет вероятность того, что квант, поглощенный в плоском слое на оптической глубине τ, выйдет через границу $\tau=0$, не испытав по пути ни одного рассеяния.

Подробных таблиц функций $N_{kn}(\tau)$, по-видимому, не было опубликовано. В настоящей работе даются таблицы двух из этих функций, наиболее интересных с точки зрения приложений, а именно $N_{12}(\tau)$ и $N_{21}(\tau)$.

В основу вычислений были положены значения функций $M_k(\tau)$, приведенные в первой части работы [1]. Дело в том, что имея $M_k(\tau)$, можно найти и $N_{kn}(\tau)$. В самом деле, из (1) и (2) с учетом (3) имеем

$$N_{kn}(\tau)=\tau^{n-1}\int_{\tau}^{\infty} M_k(t)\,\frac{dt}{t^n}. \tag{4}$$

Прежде чем переходить к описанию вычислений, остановимся кратко на свойствах функций $N_{kn}(\tau)$.

Из (4) легко получается следующее рекуррентное соотношение:

$$N_{kn}(\tau)=\frac{1}{n-1}\left[M_k(\tau)-\tau N_{k+1,\,n-1}(\tau)\right]. \tag{5}$$

Оно позволяет свести вычисление всех функций $N_{kn}(\tau)$ $(k, n=1, 2, \cdots)$ к нахождению лишь $M_k(\tau)$ и $N_{k1}(\tau)$ $(k=1, 2, \cdots)$.

Пользуясь известным разложением $E_1(t)$

$$E_1(t)=-\gamma-\ln t+t-\frac{t^2}{2\cdot 2!}+\frac{t^3}{3\cdot 3!}-\cdots, \tag{6}$$

где $\gamma=0.577216$ — постоянная Эйлера, из (2) нетрудно получить, что

$$N_{k1}(\tau)=-\frac{\gamma}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2k\sqrt{k}}-\frac{\ln\tau}{\sqrt{k}}+\frac{\tau}{\sqrt{k+1}}-\frac{\tau^2}{2\cdot 2!\sqrt{k+2}}+ \\ +\frac{\tau^3}{3\cdot 3!\sqrt{k+3}}-\cdots \tag{7}$$

При больших τ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$N_{kn}(\tau)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\tau^k\sqrt{\ln\tau}}\left(a_{0kn}+\frac{1}{2}\,\frac{a_{1kn}}{\ln\tau}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{a_{2kn}}{\ln^2\tau}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{a_{3kn}}{\ln^3\tau}+\cdots\right), \tag{8}$$

где

$$a_{jkn}=\sum_{l=0}^{j}(-1)^l C_j^l\,\Gamma^{(j-l)}(k)\,\frac{l!}{(n+k-1)^{l+1}}. \tag{9}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Формула (8) получается из (2) тем же способом, которым ранее в [1] из (1) были получены асимптотические формулы для $M_k(\tau)$. При этом для постоянных a_{jkn} получается следующее выражение:

$$a_{jkn} = \int_0^\infty y^{k-1} E_n(y) \ln^j y \, dy \quad (j = 0,\ 1,\ 2, \cdots\ k,\ n = 1,\ 2, \cdots). \tag{10}$$

С помощью (3) оно легко преобразуется к форме (9). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} a_{jkn} &= \int_0^1 \zeta^{n-2}\, d\zeta \int_0^\infty y^{k-1}\, e^{-\frac{y}{\zeta}} \ln^j y\, dy = \\ &= \int_0^1 \zeta^{n+k-2}\, d\zeta \int_0^\infty t^{k-1}\, e^{-t} (\ln t + \ln \zeta)^j\, dt = \\ &= \sum_{l=0}^{j} C_j^l \int_0^1 \zeta^{n+k-2} \ln^{j-l} \zeta\, d\zeta \int_0^\infty t^{k-1}\, e^{-t} \ln^l t\, dt = \\ &= \sum_{l=0}^{j} (-1)^l C_j^l\, \Gamma^{(j-l)}(k)\, \frac{l!}{(n+k-1)^{l+1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя в (8) значения постоянных, находим

$$N_{12}(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\tau\sqrt{\ln \tau}} \left(0.50000 - \frac{0.26930}{\ln \tau} + \frac{0.57287}{\ln^2 \tau} - \frac{1.5663}{\ln^3 \tau} + \cdots \right), \tag{12}$$

$$N_{21}(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\tau^2\sqrt{\ln \tau}} \left(0.50000 - \frac{0.019304}{\ln \tau} + \frac{0.16892}{\ln^2 \tau} - \frac{0.13467}{\ln^3 \tau} + \cdots \right). \tag{13}$$

Эти формулы позволяют легко вычислять $N_{12}(\tau)$ и $N_{21}(\tau)$ при больших τ. Формулы (12) и (13) с учетом всех выписанных членов дают значения функций $N_{12}(\tau)$ и $N_{21}(\tau)$ при $\tau = 100$ с точностью до двух единиц третьей значащей цифры. С ростом τ точность этих формул возрастает.

В приложении (табл. 1) приведены значения функций $N_{12}(\tau)$ и $N_{21}(\tau)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant 100$. Как уже указывалось, они получены численным интегрированием по формуле (4) с использованием найденных ранее значений $M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$. Вычисления были выполнены на машине БЭСМ-2 Вычислительного центра Ленинградского отделения Математического института АН СССР.

Численное интегрирование производилось по формуле трапеций, причем количество узлов выбиралось следующим образом. Для $N_{kn}(\tau)$ строились верхняя и нижняя суммы Дарбу и число точек деления выбиралось так, чтобы эти суммы различались не более чем на одну единицу последнего знака, приводимого в табл. 1. Тем самым одновременно оценивалась точность табулируемых значений. Кроме того, были выполнены различные дополнительные контроли. Например, была проверена выполнимость рекуррентной формулы (5), а для $\tau \leqslant 1$, кроме того, значения функции $N_{21}(\tau)$ были вычислены независимо по формуле (7). Ошибки в приводимых значениях функций не должны превышать одной единицы последнего знака.

В таблице значения функций представлены в форме $a \cdot 10^n$, где $0.1 \leqslant a < 1$, причем приведены только значащие цифры числа a (нуль и запятая опущены) и значение n. Например, $N_{12}(10) = 0.1635 \cdot 10^{-1} = 0.01635$; $N_{21}(100) = 0.132 \cdot 10^{-4} = 0.0000132$.

Астрономическая обсерватория ЛГУ
Вычислительный центр Ленинградского отделения
Математического института АН СССР

TABLES OF FUNCTIONS ENCOUNTERED IN THE THEORY OF TRANSFER OF RESONANCE RADIATION. II.

V. V. IVANOV, V. T. STCHERBAKOV

The functions $N_{12}(\tau)$ and $N_{21}(\tau)$ defined by (2) are tabulated for $0 \leqslant \tau \leqslant 100$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Иванов, В. Т. Щербаков*, Астрофизика, 1, 22, 1965.
2. *Л. М. Биберман*, ЖЭТФ, 17, 416, 1947.
3. *T. Holstein*, Phys. Rev., 72, 1212, 1947.
4. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 39, 1020, 1962; 40, 257, 1963; Уч. зап. ЛГУ, 307, 62, 1962.
5. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 39, 632, 1962.

Таблица 1

ФУНКЦИИ $N_{12}(\tau)$ И $N_{21}(\tau)$

τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$		τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$	
0.00	10000	1	∞		2.75	8623	—1	4158	—1
0.05	86958	0	19155	1	2.80	8419	—1	3997	—1
0.10	78676	0	14533	1	2.85	8223	—1	3844	—1
0.15	72106	0	11940	1	2.90	8035	—1	3699	—1
0.20	66602	0	10173	1	2.95	7853	—1	3560	—1
0.25	61859	0	88578	0	3.00	7679	—1	3428	—1
0.30	57698	0	78255	0	3.05	7511	—1	3303	—1
0.35	54001	0	69872	0	3.10	7348	—1	3183	—1
0.40	50687	0	62897	0	3.15	7192	—1	3069	—1
0.45	47694	0	56985	0	3.20	7041	—1	2960	—1
0.50	44975	0	51904	0	3.25	6896	—1	2856	—1
0.55	42492	0	47486	0	3.30	6756	—1	2757	—1
0.60	40217	0	43610	0	3.35	6620	—1	2663	—1
0.65	38124	0	40183	0	3.40	6489	—1	2572	—1
0.70	36192	0	37132	0	3.45	6363	—1	2486	—1
0.75	34405	0	34402	0	3.50	6241	—1	2404	—1
0.80	32748	0	31946	0	3.55	6123	—1	2325	—1
0.85	31207	0	29727	0	3.60	6008	—1	2249	—1
0.90	29772	0	27714	0	3.65	5898	—1	2177	—1
0.95	28432	0	25883	0	3.70	5790	—1	2108	—1
1.00	27181	0	24212	0	3.75	5687	—1	2041	—1
1.05	26009	0	22683	0	3.80	5586	—1	1978	—1
1.10	24910	0	21279	0	3.85	5489	—1	1917	—1
1.15	23879	0	19969	0	3.90	5395	—1	1858	—1
1.20	22910	0	18799	0	3.95	5303	—1	1802	—1
1.25	21998	0	17701	0	4.00	5214	—1	1748	—1
1.30	21138	0	16684	0	4.05	5128	—1	1697	—1
1.35	20328	0	15743	0	4.10	5045	—1	1647	—1
1.40	19563	0	14869	0	4.15	4963	—1	1600	—1
1.45	18840	0	14056	0	4.20	4885	—1	1554	—1
1.50	18156	0	13301	0	4.25	4808	—1	1510	—1
1.55	17509	0	12596	0	4.30	4734	—1	1468	—1
1.60	16896	0	11939	0	4.35	4661	—1	1427	—1
1.65	16315	0	11326	0	4.40	4591	—1	1388	—1
1.70	15763	0	10750	0	4.45	4522	—1	1350	—1
1.75	15239	0	10213	0	4.50	4456	—1	1314	—1
1.80	14741	0	9709	—1	4.55	4391	—1	1279	—1
1.85	14267	0	9236	—1	4.60	4328	—1	1245	—1
1.90	13817	0	8792	—1	4.65	4267	—1	1213	—1
1.95	13388	0	8376	—1	4.70	4207	—1	1181	—1
2.00	12979	0	7983	—1	4.75	4148	—1	1151	—1
2.05	12589	0	7614	—1	4.80	4092	—1	1122	—1
2.10	12217	0	7267	—1	4.85	4036	—1	1094	—1
2.15	11862	0	6939	—1	4.90	3982	—1	1067	—1
2.20	11523	0	6630	—1	4.95	3929	—1	1041	—1
2.25	11199	0	6338	—1	5.0	3878	—1	1015	—1
2.30	10889	0	6063	—1	5.1	3779	—1	9672	—2
2.35	10592	0	5802	—1	5.2	3685	—1	9223	—2
2.40	10308	0	5556	—1	5.3	3595	—1	8803	—2
2.45	10036	0	5323	—1	5.4	3508	—1	8410	—2
2.50	9776	—1	5102	—1	5.5	3426	—1	8041	—2
2.55	9526	—1	4893	—1	5.6	3348	—1	7695	—2
2.60	9286	—1	4694	—1	5.7	3272	—1	7370	—2
2.65	9056	—1	4506	—1	5.8	3200	—1	7064	—2
2.70	8835	—1	4328	—1	5.9	3131	—1	6777	—2

τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$		τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$	
6.0	3065	−1	6506	−2	13.6	1137	−1	9765	−3
6.1	3001	−1	6250	−2	13.8	1118	−1	9452	−3
6.2	2940	−1	6009	−2	14.0	1099	−1	9154	−3
6.3	2881	−1	5781	−2	14.2	1081	−1	8870	−3
6.4	2824	−1	5565	−2	14.4	1064	−1	8598	−3
6.5	2769	−1	5361	−2	14.6	1047	−1	8339	−3
6.6	2717	−1	5168	−2	14.8	1030	−1	8091	−3
6.7	2666	−1	4985	−2	15.0	1015	−1	7854	−3
6.8	2617	−1	4811	−2	15.2	9990	−2	7627	−3
6.9	2570	−1	4646	−2	15.4	9840	−2	7409	−3
7.0	2524	−1	4489	−2	15.6	9694	−2	7200	−3
7.1	2480	−1	4339	−2	15.8	9552	−2	7000	−3
7.2	2437	−1	4197	−2	16.0	9414	−2	6808	−3
7.3	2396	−1	4062	−2	16.2	9280	−2	6624	−3
7.4	2356	−1	3933	−2	16.4	9149	−2	6447	−3
7.5	2317	−1	3810	−2	16.6	9022	−2	6277	−3
7.6	2280	−1	3693	−2	16.8	8898	−2	6113	−3
7.7	2243	−1	3581	−2	17.0	8777	−2	5956	−3
7.8	2208	−1	3474	−2	17.2	8660	−2	5805	−3
7.9	2174	−1	3371	−2	17.4	8545	−2	5659	−3
8.0	2141	−1	3273	−2	17.6	8433	−2	5518	−3
8.1	2108	−1	3179	−2	17.8	8324	−2	5383	−3
8.2	2077	−1	3089	−2	18.0	8218	−2	5252	−3
8.3	2046	−1	3003	−2	18.2	8114	−2	5126	−3
8.4	2017	−1	2920	−2	18.4	8013	−2	5005	−3
8.5	1988	−1	2841	−2	18.6	7914	−2	4887	−3
8.6	1960	−1	2765	−2	18.8	7817	−2	4774	−3
8.7	1933	−1	2691	−2	19.0	7723	−2	4664	−3
8.8	1906	−1	2621	−2	19.2	7631	−2	4558	−3
8.9	1880	−1	2553	−2	19.4	7540	−2	4456	−3
9.0	1855	−1	2488	−2	19.6	7452	−2	4357	−3
9.1	1831	−1	2425	−2	19.8	7366	−2	4261	−3
9.2	1807	−1	2365	−2	20.0	7282	−2	4169	−3
9.3	1783	−1	2307	−2	20.2	7199	−2	4079	−3
9.4	1760	−1	2251	−2	20.4	7119	−2	3992	−3
9.5	1738	−1	2197	−2	20.6	7040	−2	3908	−3
9.6	1717	−1	2144	−2	20.8	6962	−2	3826	−3
9.7	1695	−1	2094	−2	21.0	6887	−2	3747	−3
9.8	1675	−1	2045	−2	21.2	6813	−2	3670	−3
9.9	1654	−1	1999	−2	21.4	6740	−2	3596	−3
10.0	1635	−1	1953	−2	21.6	6669	−2	3523	−3
10.2	1597	−1	1867	−2	21.8	6599	−2	3453	−3
10.4	1560	−1	1786	−2	22.0	6531	−2	3385	−3
10.6	1525	−1	1710	−2	22.2	6463	−2	3319	−3
10.8	1492	−1	1639	−2	22.4	6398	−2	3255	−3
11.0	1459	−1	1573	−2	22.6	6333	−2	3192	−3
11.2	1429	−1	1510	−2	22.8	6270	−2	3132	−3
11.4	1399	−1	1451	−2	23.0	6208	−2	3073	−3
11.6	1371	−1	1395	−2	23.2	6147	−2	3015	−3
11.8	1343	−1	1342	−2	23.4	6087	−2	2959	−3
12.0	1317	−1	1292	−2	23.6	6029	−2	2905	−3
12.2	1292	−1	1245	−2	23.8	5971	−2	2852	−3
12.4	1267	−1	1200	−2	24.0	5915	−2	2801	−3
12.6	1243	−1	1158	−2	24.2	5859	−2	2751	−3
12.8	1221	−1	1118	−2	24.4	5805	−2	2702	−3
13.0	1199	−1	1080	−2	24.6	5751	−2	2654	−3
13.2	1178	−1	1044	−2	24.8	5698	−2	2608	−3
13.4	1157	−1	1009	−2	25.0	5647	−2	2563	−3

τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$		τ	$N_{12}(\tau)$		$N_{21}(\tau)$	
25.5	5521	−2	2455	−3	51	2538	−2	553	−4
26.0	5401	−2	2354	−3	52	2484	−2	530	−4
26.5	5286	−2	2259	−3	53	2432	−2	509	−4
27.0	5175	−2	2169	−3	54	2382	−2	489	−4
27.5	5069	−2	2084	−3	55	2334	−2	470	−4
28.0	4967	−2	2005	−3	56	2288	−2	453	−4
28.5	4868	−2	1929	−3	57	2243	−2	436	−4
29.0	4774	−2	1858	−3	58	2200	−2	420	−4
29.5	4682	−2	1791	−3	59	2159	−2	405	−4
30.0	4595	−2	1727	−3	60	2119	−2	391	−4
30.5	4510	−2	1666	−3	61	2081	−2	377	−4
31.0	4428	−2	1609	−3	62	2044	−2	365	−4
31.5	4349	−2	1554	−3	63	2008	−2	352	−4
32.0	4272	−2	1502	−3	64	1973	−2	341	−4
32.5	4198	−2	1453	−3	65	1940	−2	330	−4
33.0	4127	−2	1406	−3	66	1907	−2	319	−4
33.5	4058	−2	1361	−3	67	1876	−2	309	−4
34.0	3991	−2	1318	−3	68	1846	−2	300	−4
34.5	3926	−2	1277	−3	69	1816	−2	291	−4
35.0	3863	−2	1239	−3	70	1787	−2	282	−4
35.5	3802	−2	1201	−3	71	1760	−2	273	−4
36.0	3743	−2	1166	−3	72	1733	−2	265	−4
36.5	3686	−2	1132	−3	73	1707	−2	258	−4
37.0	3630	−2	1099	−3	74	1681	−2	250	−4
37.5	3576	−2	1068	−3	75	1656	−2	243	−4
38.0	3523	−2	1038	−3	76	1633	−2	237	−4
38.5	3472	−2	1009	−3	77	1609	−2	230	−4
39.0	3422	−2	982	−4	78	1587	−2	224	−4
39.5	3374	−2	955	−4	79	1565	−2	218	−4
40.0	3327	−2	930	−4	80	1543	−2	212	−4
40.5	3281	−2	905	−4	81	1522	−2	207	−4
41.0	3236	−2	882	−4	82	1502	−2	201	−4
41.5	3193	−2	859	−4	83	1482	−2	196	−4
42.0	3150	−2	837	−4	84	1462	−2	191	−4
42.5	3109	−2	816	−4	85	1444	−2	187	−4
43.0	3068	−2	796	−4	86	1425	−2	182	−4
43.5	3029	−2	777	−4	87	1407	−2	178	−4
44.0	2991	−2	758	−4	88	1390	−2	173	−4
44.5	2953	−2	740	−4	89	1372	−2	169	−4
45.0	2917	−2	722	−4	90	1356	−2	165	−4
45.5	2881	−2	705	−4	91	1339	−2	161	−4
46.0	2846	−2	689	−4	92	1323	−2	158	−4
46.5	2812	−2	673	−4	93	1308	−2	154	−4
47.0	2779	−2	658	−4	94	1293	−2	151	−4
47.5	2746	−2	643	−4	95	1278	−2	147	−4
48.0	2715	−2	629	−4	96	1263	−2	144	−4
48.5	2683	−2	615	−4	97	1249	−2	141	−4
49.0	2653	−2	602	−4	98	1235	−2	138	−4
49.5	2623	−2	589	−4	99	1221	−2	135	−4
50.0	2594	−2	577	−4	100	1208	−2	132	−4