ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
BULLETIN OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ARMENIAN SSR

Բնական գիտություններ № 1—2, 1944 *Естественные науки*

АСТРОНОМИЯ

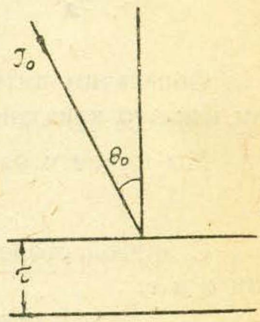
Академик В. А. Амбарцумян

Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины

Во многих вопросах теоретической астрофизики возникает задача о рассеянии света в среде, обладающей конечной оптической толщиной. В частности эта задача встает в теории образования линий поглощения звездными атмосферами, в теории рассеяния света планетными атмосферами и т. д.

При этом среда должна рассматриваться как обладающая способностью не только рассеяния, но и поглощения.

В трехмерном случае задача эта ставится следующим образом: имеется среда, состоящая из плоскопараллельных слоев, оптической толщины τ. Задано для этой среды отношение коэфициента рассеяния к сумме коэфициентов рассеяния и поглощения. На одну из граней среды падает излучение интенсивности J_0 под углом θ_0 с нормалью. Каковы будут интенсивность и распределение по направлениям рассеянного, диффузно-отраженного света и каковы будут интенсивность и распределение по направлениям диффузно-пропущенного средой света? Индикатриса рассеяния среды предполагается заданной.

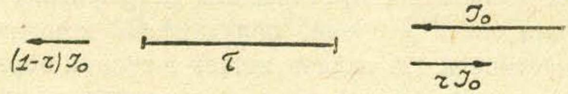


Изложенная задача приводит к некоторому интегральному уравнению, решение которого представляет значительную трудность.

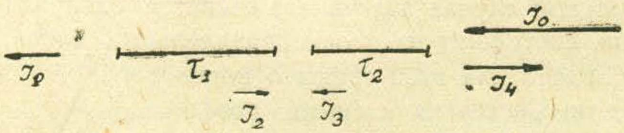
В связи с этим представляет интерес рассмотреть сначала более простую *одномерную* задачу о рассеянии. Оказывается, что и эта задача приводит к интегральному уравнению с конечной областью интегрирования. Ядром уравнения в этом случае служит ядро Ласко $\frac{1}{2}e^{-|\tau-t|}$.

Однако, можно показать, что как одномерная, так и трехмерная задача могут быть решены путем сведения их к некоторым функциональным уравнениям. При этом имеется то преимущество, что в качестве неизвестных в эти уравнения входят только величины, характеризующие положение на обоих границах среды (напр. интенсивности излучения), т. е. как раз искомые величины. Между тем в методе интегральных уравнений в качестве неизвестных фигурируют функции, характеризующие положение дел в каждой точке внутри среды. Кроме того, сам метод функциональных уравнений гораздо проще и быстрее приводит к цели.

a) *Основные уравнения.* Пусть имеем одномерную среду с оптической толщиной τ. Тогда эта среда отражает некоторую долю падающей на нее интенсивности J_0, именно rJ_0, и пропускает некоторую долю qJ_0. В случае, когда в среде нет поглощения, а происходит лишь чистое рассеяние, очевидно $q = 1 - r$. При этом величина r зависит от оптической толщины τ. Положение дел в этом случае представлено на чертеже:



Рассмотрим два „слоя" с оптическими толщинами τ_1 и τ_2, расположенных один за другим, так что в совокупности они образуют один слой оптической толщины $\tau_1 + \tau_2$.



Обозначим интенсивность на границах, а также на стыке сред так, как это показано на следующей схеме:

Мы имеем с одной стороны

$$J_1 = q\ (\tau_1 + \tau_2)\ J_0 \tag{1}$$

С другой стороны, мы можем написать по определению величин q и r:

$$J_3 = q\ (\tau_2)\ J_0 + r\ (\tau_2)\ J_2$$

$$J_2 = r\ (\tau_1)\ J_3$$

$$J_1 = q\ (\tau_1)\ J_3$$

Из последних трех равенств имеем:

$$J_1 = \frac{q(\tau_1)\,q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\,r(\tau_2)}$$

Сопоставляя с (1), получаем

$$q\ (\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)\,q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1)\,r(\tau_2)} \tag{2}$$

Что касается до J_4, то мы имеем

$$J_4 = q\ (\tau_2)\ J_2 + r\ (\tau_2)\ J_3$$

или, поскольку

$$J_4 = r\ (\tau_1 + \tau_2)\ J_0$$

то, исключая J_2, получаем:

$$r(\tau_1+\tau_2)=r(\tau_2)+\frac{q(\tau_2)^2\, r(\tau_1)}{1-r(\tau_1)\, r(\tau_2)} \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) представляют собою систему двух функциональных уравнений для двух неизвестных функций $q(\tau)$ и $r(\tau)$.

б) *Чистое рассеяние.* Найдем сперва частное решение этой системы для случая чистого рассеяния:

$$r(\tau)=1-q(\tau) \tag{4}$$

Подставляя это условие в (2), получаем для $q(\tau)$ одно функциональное уравнение

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)\, q(\tau_2)}{q(\tau_1)+q(\tau_2)-q(\tau_1)\, q(\tau_2)} \tag{5}$$

откуда следует

$$\frac{1}{q(\tau_1+\tau_2)}=\frac{1}{q(\tau_1)}+\frac{1}{q(\tau_2)}-1$$

или если вычтем единицу из обоих частей равенства:

$$\frac{1}{q(\tau_1+\tau_2)}-1=\frac{1}{q(\tau_1)}-1+\frac{1}{q(\tau_2)}-1$$

Отсюда видно, что функция

$$\frac{1}{q(\tau)}-1$$

должна быть линейной однородной функцией от τ. Обозначим ее через $a\tau$

$$\frac{1}{q(\tau)}-1=a\tau$$

откуда

$$q(\tau)=\frac{1}{1+a\tau} \tag{6}$$

Это и есть решение функционального уравнения (5).

Значение коэфициента a определяется при этом по заданной индикатрисе рассеяния. Для нахождения a уточним сперва понятие об индикатрисе рассеяния для одномерного случая.

Из проходящей интенсивности J элемент оптической глубины $d\tau$ поглощает интенсивность $J d\tau$. Из этого количества доля $(1-\lambda)\, J d\tau$ подвергается истинному поглощению и больше не участвует в игре. Другая же доля $\lambda J d\tau$ рассеивается элементом $d\tau$, т. е. излучается элементом $d\tau$ в обе стороны. При этом некоторая часть $x\lambda J d\tau$ излучается в том же направлении, в котором шло само излучение J, а другая часть $(1-x)\,\lambda J d\tau$ излучается в противоположном направлении.

Задание величины x и означает задание „индикатрисы" рассеяния в одномерном случае.

При заданной индикатрисе x постоянная a формулы (6) должна быть одной и той же для всех τ, в том числе при малой оптической толщине слоя, когда (6) сводится к

$$q(\tau) = 1 - a\tau \tag{7}$$

С другой стороны очевидно, что интенсивность прошедшего через слой малой оптической толщины τ излучения будет равна

$$J = J_0 (1 - \tau) + \lambda x J_0 \tau$$

откуда при $\lambda = 1$

$$q = 1 - (1 - x)\tau \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем

$$a = 1 - x \tag{9}$$

т. е. a определяет долю света рассеиваемого обратно.

Итак, вообще

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + (1 - x)\tau} \tag{10}$$

При $x = \frac{1}{2}$, т. е. при „равновероятном рассеянии" в обе стороны, что аналогично сферической индикатрисе в трехмерном случае:

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\tau} \tag{11}$$

в) Общий случай. Перейдем теперь к общему случаю, когда наряду с рассеянием в среде имеется и поглощение, причем λ постоянно.

При слое очень малой оптической толщины $d\tau$ мы имеем для коэфициента отражения:

$$r = \lambda (1 - x) d\tau \tag{12}$$

а для коэфициента пропускания

$$q = 1 - (1 - \lambda x) d\tau \tag{13}$$

Воспользуемся выражениями (12) и (13) и, приняв в (2) и (3) τ_1 очень малым и равным $d\tau$, напишем получающиеся равенства

$$q(\tau + d\tau) = \frac{q(\tau)\{1 - (1 - \lambda x)\, d\tau\}}{1 - r(\tau)\lambda(1 - x)\, d\tau}$$

$$r(\tau + d\tau) = r(\tau) + \frac{q(\tau)^2 \lambda (1 - x)\, d\tau}{1 - r(\tau)\lambda(1 - x)\, d\tau}$$

Пренебрегая членами, содержащими $d\tau^2$, находим:

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = \lambda (1 - x)\, q(\tau)\, r(\tau) - (1 - \lambda x)\, q(\tau) \tag{14}$$

$$\frac{dr(\tau)}{d\tau} = \lambda(1-x)\, q(\tau)^2 \tag{15}$$

Деля (14) на (15), имеем:

$$qdq = rdr - \frac{1-\lambda x}{\lambda(1-x)}\, dr$$

откуда

$$q^2 - r^2 = C - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)}\, r$$

где C — постоянная интегрирования. Но, при $q = 1$ (полное пропускание, что соответствует $\tau = 0$), отражение $r = 0$. Поэтому $C = 1$. Мы имеем:

$$1 + r^2 - q^2 - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)}\, r = 0 \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), находим:

$$\frac{dr}{1 + r^2 - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)}\, r} = d\tau \tag{17}$$

Обозначим корни уравнения

$$1 + r^2 - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)}\, r = 0$$

через r_0 и $\frac{1}{r_0}$ и выберем $r_0 \leqslant 1$.

Тогда (16) перепишется в виде

$$\left(r_0 - r\right)\left(\frac{1}{r_0} - r\right) = q^2 \tag{18}$$

а уравнение (17) после интегрирования даст

$$r = r_0\, \frac{1 - \frac{C}{r_0^2}\, e^{-2k\tau}}{1 - Ce^{-2k\tau}}$$

где

$$k = \frac{\lambda}{2}(1-x)\, \frac{1-r_0^2}{r_0} \tag{19}$$

а C — постоянная интегрирования. Но при $\tau = 0$ должно быть $r = 0$. Поэтому $C = r_0^2$. Итак

$$r = r_0\, \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2\, e^{-2k\tau}} \tag{20}$$

Подставляя это выражение в (16), находим для q:

$$q = \frac{(1-r_0^2)\, e^{-k\tau}}{1 - r_0^2\, e^{-2k\tau}} \tag{21}$$

Из формулы (20) видно, что r_0 есть значение коэфициента отражения при $\tau = 0$.

Формулы (20) и (21) представляют собою решение системы функциональных уравнений (2) и (3).

Академия Наук Арм. ССР
Астрономическая обсерватория
1943, ноябрь

Ակադ. Վ. Հ. Համբարձումյան

ՎԵՐՋՆԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ՑՐՈՂ ԵՎ ԿԼԱՆՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴՐԻ ՄԻԱՉԱՓ ԴԵՊՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս հոդվածում քննվում է միաչափ ցրման խնդիրը։ Առաջադրված է լուծման նոր մեթոդ։ Խնդիրը վեր է ածված թափանցման գործակից q-*ի և անդրադարձման գործակից* r-*ի (2) և (3) ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեմի։ Սիստեմի լուծումը տրված է (20) և (21) բանաձևերում։*

V. A. Ambarzumian

On the one-dimensional case of the problem of the scattering medium of finite optical thickness

Summary

The one-dimensional scattering problem is considered. A new method of the solution is developed. The problem is reduced to the system of functional equations (2) and (3) for the transmission-coefficient q and reflection coefficient r. The solution of the system is given by (20) and (21).