ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

М. Ф. ГЕЙДАРОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

§ 1. Общие соображения

Процесс динамической эволюции звездных скоплений может зависеть от ряда физических факторов. Фактор прохождения посторонних звезд через скопление был рассмотрен С. Росселандом [1], фактор сближений между звездами в скоплении впервые был проанализирован В. А. Амбарцумяном [2]. Л. Спицер и М. Шварцшильд [3] рассмотрели случай влияния массивных межзвездных облаков на скорости звезд в звездных системах.

Известно, что для звездных систем строго равновесное состояние (т. е. наиболее вероятное состояние) не существует, и в звездной динамике его роль в известной мере играют стационарные состояния. Однако, в отличие от равновесного состояния, стационарных состояний много. В процессе движения звезд внутри скопления происходят сближения между звездами. Следовательно, между членами скопления непрерывно происходит обмен кинетической энергией. При этом звезды, получающие достаточную энергию, уходят из скопления, если затем не происходит других тесных сближений со звездами скопления. Также известно, что воздействие сближений со звездами скопления в несколько раз больше, чем воздействие, производимое проходящими через скопление посторонними звездами. Поэтому можно сказать, что из основных факторов в динамике звездных систем самый результативный—это сближения между членами скопления. На этой основе становится необходимым исследование динамической эволюции звездных скоплений, учитывая сближения между его членами.

Эволюционный фактор сближений между звездами отклоняет систему от первоначального состояния необратимым образом. Это видно хотя бы из того, что полное число членов уменьшается. Но можно предположить, что с течением времени первоначальное стационарное состояние системы заменяется другим стационарным состоянием и т. д. Эволюцию звездной системы можно рассматривать как последовательную смену вышеуказанных состояний. Итак, возникает вопрос: сколько времени потребуется для того, чтобы одно стационарное состояние заменилось другим стационарным состоянием? Величина времени релаксации грубо определяется формулой, выведенной В. А. Амбарцумяном [2] для скопления, состоящего из звезд одинаковой массы,

$$\tau = \frac{1}{16 \lg N/4} \sqrt{\frac{NR^3}{Gm}}.$$

Здесь N — число звезд скопления, R — его радиус, m — масса звезды; G — гравитационная постоянная. Грубо говоря, за промежуток времени τ восстанавливается максвелловское распределение скоростей и координат, в связи с чем часть звезд скопления приобретает скорости, превосходящие критическую, и получает возможность покинуть скопление. Отсюда не следует, что все эти звезды обязательно покинут скопление. Небольшая часть уходящих звезд может отдать некоторую долю своей энергии другим звездам и остаться в скоплении. Пренебрегая этим эффектом, мы можем сказать, что скопление, теряя звезды, уменьшается в своей массе, меняет свои размеры и плотность. Эти процессы могут сопровождаться сжатием или расширением системы. По [2, 4] после ухода части звезд из скопления полная энергия системы уменьшается, и это приводит к сжатию оставшейся системы. Само скопление все более быстрыми темпами рассеивается в пространстве и, в конце концов, должно превратиться в кратную звезду с устойчивым движением, например, в двойную. В 1957—1958 годах И. Кинг в своих работах [5, 6] подтвердил выводы В. А. Амбарцумяна. По И. Кингу [5, 6] после ухода звезд скопление сжимается и его радиус изменяется приблизительно пропорционально квадрату числа звезд, остающихся в скоплении и, наконец, такое сжатие ускоряет темп ухода, т. е. время релаксации уменьшается. Однако, было высказано и обратное представление об эволюции звездных скоплений. По мнению С. Чандрасекара [7] скопление, теряя звезды, стремится стать более рассеяным с течением времени, т. е. время релаксации увеличивается; а по результатам Р. Мише [8] выходит, что во взятом им конкретном примере область скопления, заключенная внутри $R = 1{,}6$ *пс*, в ходе эволюции сжимается, а область скопления вне $R = 20$ *пс* расширяется.

Чтобы найти, как меняется состояние системы с течением времени, надо в частности знать изменение ее полной энергии. Процесс сближения между звездами скопления завершается уходом одной из звезд только тогда, когда звезда получает положительную кинетическую энергию. Следовательно, при этом скопление уменьшает свою энергию, что по теореме вириала должно сопровождаться увеличением абсолютного значения потенциальной энергии, т. е. сжатием системы, или, по крайней мере, ее основной части. Таким образом, можно сказать, что сближения между звездами в скоплении — это такой фактор для эволюции звездных скоплений, при котором основная часть скопления, теряя звезды, сжимается, в результате чего ускоряется темп разрушения.

Возникает вопрос: сколько времени потребуется для полного разрушения скопления, принадлежащего к категории открытых скоплений? С. Росселанд [1], учитывая только прохождения посторонних звезд через скопление, пришел к выводу, что время, необходимое для полного разрушения открытого скопления, порядка 10^{10} лет, а В. А. Амбарцумян [2, 4], рассматривая в качестве основного фактора сближения между звездами скопления показал, что время, необходимое для полного разрушения открытого скопления, оказывается порядка нескольких сот миллионов или миллиарда лет. В 1940 году Л. Спицер [9] своими расчетами подтвердил, что время релаксации в механизме распада скопления, рассмотренном В. А. Амбарцумяном, на порядок меньше, чем в случае, рассмотренном С. Росселандом.

В последние годы некоторые авторы начали заниматься вопросом эволюции звездных систем, исходя из уравнения кинетической теории газов [7, 8, 10—22]. В частности, И. Н. Скабицкий [11] изучал звездные системы с помощью уравнений, описывающих изменение состояния скопления с течением времени. В работе [11] сначала выводится кинетическое уравнение для звездной системы, обладающей сферической симметрией в пространстве импульсов и координат, затем дается приближенное решение этого же уравнения для промежутка времени Δt, считающегося достаточно малым и, наконец, для первого приближения получается

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

где ρ — пространственная плотность шарового скопления. Этот вывод справедлив для случая, когда в качестве начального состояния берется стационарное. Делается вывод, что скопление в значительной степени устойчиво. Кстати, следует отметить, что исследование И. Н. Скабицкого подвергалось не совсем обоснованной критике. В работе Г. Г. Кузмина [12] рассматриваются уравнения, позволяющие проследить изменение функции распределения скоростей и координат и гравитационного потенциала, а также выводятся формулы, необходимые для вычисления функции сближений. Как известно, эволюция звездных систем, в основном, связана с изменением функции распределения скоростей и координат, поэтому подход [12], в котором дается метод вычисления этого изменения, является наиболее эффективным. К сожалению, следует отметить, что в цитируемой работе Г. Г. Кузмин воздержался от продолжения анализа вероятного хода эволюции звездных скоплений. Для описания структуры сферической звездной системы Р. Мише [8, 14] использовал в качестве начального распределения усеченную функцию распределения по энергиям и угловым моментам

$$f(E, I)=Ae^{-\alpha E-\beta I^2}Q(E),$$

где E — энергия, I — угловой момент, $Q(E)$ — функция, обращающаяся в нуль при $E = E_{ух}$, энергии ухода, и учитывающая усеченность распределения для энергий, превышающих энергию ухода. В работе [8] делается предположение, что приведенная форма функции распределения по энергиям и угловым моментам с течением времени сохраняется, и поэтому задача сводится лишь к вычислению изменений значений ее параметров, т. е. A, α, β, через промежуток времени Δt, что делается численными методами.

Итак, следует отметить, что в работах [7, 8, 10—17, 23, 24] не дается полная картина описания эволюции звездных скоплений с помощью уравнений Больцмана или Фоккера-Планка обобщенного типа. Поэтому, имея в виду необходимость дальнейших еще более детальных исследований динамической эволюции звездных скоплений, поставим задачу применить уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа (см. § 2, 3):

$$\frac{Df}{Dt} = \eta \operatorname{div}_c (fc) + q\nabla_c^2 f,$$

где $\frac{D}{Dt}$ — стоксовая производная для движения в регулярном поле, ∇_c^2 — лапласиан, div_c — дивергенция по c, c — скорость; величины q и η соответственно носят характер коэффициентов диффузии и динамического трения. При решении уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа (см. § 3) примем в качестве начального состояния системы стационарное состояние, т. е. такое, которое оставалось бы неизменным при отсутствии столкновений, и одновременно будем искать решение этого же уравнения в первых приближениях так, чтобы найденное решение описывало бы происходящее из-за взаимных случайных сближений изменение функции распределения скоростей и координат, пространственной плотности и т. д. Мы надеемся, что это решение адэкватным образом будет отображать эволюцию звездных систем.

§ 2. Учет далеких звездных сближений

Известно, что состояние звездных систем полностью определяется заданием функции распределения скоростей и координат. Такая функция в пространстве скоростей и координат символически записывается в виде $f(x, y, z, u, v, w, t)$, где x, y, z — координаты, а u, v, w — компоненты скоростей рассматриваемых частиц. За промежуток времени Δt функция распределения скоростей и координат подвергнется изменению. Это произойдет вследствие действия силы от сглаженного распределения гравитирующих частиц в системе и от эффекта их случайных сближений. Обе силы носят гравитационный характер. Из них сглаженную силу притяжения какой-нибудь частицы остальными частицами системы В. А. Амбарцумян предложил называть регулярной силой, а силу, возникающую от эффекта случайных сближений между частицами системы—иррегулярной силой.

Если рассматриваемя система стационарна в регулярном поле собственного тяготения, то функция распределения скоростей и координат — f_0 удовлетворяет уравнению

$$u\frac{\partial f_0}{\partial x}+v\frac{\partial f_0}{\partial y}+w\frac{\partial f_0}{\partial z}+K_x^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial u}+K_y^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial v}+K_z^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial w}=0, \qquad (2.1)$$

где

$$K_x^{(0)}=-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\frac{Gf_0(x_1,\ y_1,\ z_1,\ u,\ v,\ w)(x-x_1)}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}dx_1dy_1dz_1dudvdw. \qquad (2.2)$$

Для $K_y^{(0)}$ и $K_z^{(0)}$ выражения аналогичны. Вообще же, поскольку значения функции распределения скоростей и координат не меняются с течением времени в точке, движущейся вместе с частицей (теорема Лиувилля), то в любой нестационарной системе

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}+K_x\frac{\partial f}{\partial u}+K_y\frac{\partial f}{\partial v}+K_z\frac{\partial f}{\partial w}=0. \qquad (2.3)$$

Если строить теорию с учетом иррегулярных сил, то в уравнении (2.3) правую часть следует полагать равной не нулю, а некоторой малой величине. Известно, что регулярная сила прямо пропорциональна произведению общей массы системы на массу рассматриваемых частиц, а иррегулярная сила прямо пропорциональна произведению массы тех частиц, между которыми имеется сближение. Следовательно, порядок величины регулярной силы F_1 и иррегулярной F_2 определяется выражениями

$$F_1\simeq G\frac{Mm}{R^2}, \qquad F_2\simeq G\frac{m^2}{r_{1,2}^2},$$

где M — общая масса скопления, m — масса одной частицы (для простоты рассматривается скопление с одинаковыми массами), R — радиус скопления, $r_{1,2}$ — расстояние между двумя частицами, а G—гравитационная постоянная. Но $r_{1,2}$ связано с N и R соотношением

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_{1,2}}{2}\right)^3N=\frac{4}{3}\pi R^3$$

или

$$r_{1,2}=2R/N^{1/3},$$

где N—общее число частиц в системе, так что для F_2 имеем

$$F_2=G\frac{Mm}{rR^2N^{1/3}}.$$

Таким образом, если мы пожелаем дополнить уравнение (2.3) членами, описывающими действие F_2, то последние должны содержать множитель $1/N^{1/3}$. Если их пишем рядом с другими членами, которые описывают действие регулярных сил, то

$$\frac{Df}{Dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}, \tag{2.4}$$

где в выражении для $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}$ можно выделить некоторый малый множитель $\mu=1/N^{1/3}$ (см. (2.8)). Уравнение (2.4) является уравнением Больцмана для нашего случая и представляет собой обобщение теоремы Лиувилля классической динамики.

В более поздних работах С. Чандрасекара [10, 15, 16] развита теория динамического трения, которая описывает поведение частицы, у которой должна быть систематическая тенденция к замедлению скорости в направлении движения. Уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа, учитывающее влияние далеких звездных сближений, может быть написано в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}\Delta t+R(\Delta t^2)=-\sum_i\frac{\partial}{\partial c_i}(f<\delta c_i>_{\text{ср.}})+\frac{1}{2}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial c_i^2}(f<\delta c_i^2>_{\text{ср.}})+$$

$$+\sum_{i\neq j}\frac{\partial^2}{\partial c_i\,\partial c_j}(f<\delta c_i\delta c_j>_{\text{ср.}})+R(<\delta c_i\delta c_j\delta c_k>_{\text{ср.}}), \tag{2.5}$$

где $<\delta c_i>_{\text{ср.}}$, $<\delta c_i^2>_{\text{ср.}}$, $<\delta c_i\delta c_j>_{\text{ср.}}$ и т. д. означают различные моменты вероятности перехода за время Δt. Математические ожидания заключенных в скобки приращений и соответственно их произведений суть

$$<\delta c_i>_{\text{ср.}}=-\eta c_i\Delta t+R(\Delta t^2),$$

$$<\delta c_i^2>_{\text{ср.}}=2q\Delta t+R(\Delta t^2),$$

$$<\delta c_i\delta c_j>_{\text{ср.}}=R(\Delta t^2)$$

(С. Чандрасекар [10]). Величины $R(<\delta c_i\delta c_j\delta c_k>_{\text{ср.}})$ более высокого порядка малости, чем Δt, поэтому можно отбросить эти малые величины в уравнении (2.5) и перейти к пределу при $\Delta t\to 0$. Тогда имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}=\eta\sum_i\frac{\partial}{\partial c_i}(fc_i)+q\sum_i\frac{\partial^2}{\partial c_i^2}f \tag{2.6}$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}=\eta\,\mathrm{div}_c(fc)+q\nabla_c^2 f. \tag{2.7}$$

Поскольку коэффициенты η и q являются малыми величинами, содержащими коэффициент μ, мы можем положить

$$\eta=\mu\eta_0 \quad \text{и} \quad q=\mu q_0, \tag{2.8}$$

после чего уравнение (2.7) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}} = \mu\left[\gamma_0 \operatorname{div}_c (fc) + q_0 \nabla_c^2 f\right]. \tag{2.9}$$

Комбинируя уравнения (2.4) и (2.9), мы получаем

$$\frac{Df}{Dt} = \mu\left[\gamma_0 \operatorname{div}_c (fc) + q_0 \nabla_c^2 f\right]. \tag{2.10}$$

Это уравнение называется уравнением Фоккера-Планка обобщенного типа. Оно учитывает далекие звездные сближения и в свою очередь является обобщением теоремы Лиувилля классической динамики, так же являясь приближенной заменой уравнения Больцмана.

Чтобы полностью охарактеризовать эволюцию звездных систем необходимо проследить изменение функции распределения скоростей, и координат с течением времени. Уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа (2.10) как раз позволяет найти ход изменения функции распределения скоростей и координат во времени. Попытка приближенного решения уравнения (2.10), основанная на использовании малости коэффициента μ, должна явиться шагом вперед по сравнению с применявшимися до сих пор более грубыми схемами [7, 8, 10—17, 23, 24]. Мы будем решать уравнение (2.10) (см. § 3) методом последовательных приближений, который коренным образом отличается от метода Р. Мише [8, 14].

При решении уравнения (2.10) будем для простоты рассматривать случай сферической симметрии, потому что, если системы не обладают сферической симметрией, то исследование взаимодействий в них потребовало бы решения весьма трудных динамических проблем. По этой причине распределение массы и регулярное силовое поле скопления принимаются сферически симметричными. Далее учитывая, что для получения качественной картины эволюции скопления тот или иной выбор начального состояния не должен иметь большого значения, допустим, что в начальный момент времени состояние системы является стационарным.

§ 3. Метод решения уравнения Фоккера-Планка. Первое приближение

Для решения уравнения Фоккера-Планка (2.10) допустим, что рассматриваются звезды в элементарном объеме $dxdydz = dR$, достаточно малом в смысле количества заключенных в нем звезд. Известно, что влияние ближайших непосредственных соседей на рассматриваемую звезду будет изменяться во времени, так как изменяется состав локального звездного распределения. В дальнейшем мы будем учитывать, что за промежуток времени Δt, большой по сравнению с периодом флюктуации ускорения, но малый, по сравнению с теми интервалами времени, за которые скорость и положение рассматриваемых звезд изменяется заметным образом, стационарность нарушается незначительно.

Принимая во внимание, что μ — малый коэффициент пропорциональности, попытаемся решение уравнения (2.10) представить в виде

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots, \tag{3.1}$$

где f_0 — функция распределения в стационарном состоянии, мы ее назовем нулевым приближением, $f_0 + \mu f_1$, $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 \cdots$ — последующие приближения к функции f. Точно также для K_x, K_y и K_z мы можем написать

$$K_x = K_x^{(0)} + \mu K_x^{(1)} + \mu^2 K_x^{(2)} + \cdots$$

$$K_y = K_y^{(0)} + \mu K_y^{(1)} + \mu^2 K_y^{(2)} + \cdots$$

$$K_z = K_z^{(0)} + \mu K_z^{(1)} + \mu^2 K_z^{(2)} + \cdots \tag{3.2}$$

Потребуем теперь, чтобы (3.1) и (3.2) тождественно удовлетворяли уравнению (2.10). Подставляя в уравнение (2.10) для f его выражение согласно (3.1) и для K_x, K_y и K_z их значения согласно (3.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы соответственно получаем

$$\frac{D_0 f_0}{D_0 t} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{D_0 f_1}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_0 c) + q_0 \nabla_c^2 f_0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{D_0 f_2}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial w} +$$

$$+ K_x^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_1 c) + q_0 \nabla_c^2 f_1, \tag{3.5}$$

. . . .

. . . . ,

где

$$\frac{D_0}{D_0 t} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + K_x^{(0)} \frac{\partial}{\partial u} + K_y^{(0)} \frac{\partial}{\partial v} + K_z^{(0)} \frac{\partial}{\partial w}. \tag{3.6}$$

Функция f_0 определяется из уравнения (3.3), функции f_1, f_2, $f_3, \cdots$ находятся затем последовательно из уравнений (3.4), (3.5), $\cdots$. Если уравнение (3.3) решено, то уравнение (3.4) содержит только одну неизвестную функцию f_1 и т. д. Уравнение (3.3) определяет изменение функции распределения скоростей и координат вследствие регулярных сил и является основным уравнением звездной динамики без учета сближений. Общее решение уравнения (3.3) в случае сферической симметрии зависит от двух интегралов движения звезды: интеграла энергии и величины интеграла угловых моментов

$$f_0 = f_0 (E, I^2),$$

где E и I — соответственно вышеуказанные интегралы. В случае сферической симметрии системы E и I имеют вид

$$E = u^2 + v^2 + w^2 - 2\Phi_0(r). \tag{3.7}$$

$$I^2 = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2, \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= xv - yu, \\ I_3 &= yw - zv, \\ I_4 &= zu - xw, \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

где $\Phi_0(r)$ — потенциальная энергия, а I_2, I_3 и I_4 — проекции интеграла угловых моментов на координатные плоскости.

Для конкретности рассмотрим частный случай, когда решение уравнения (3.3) имеет вид

$$f_0 = f_0^{(0)}(E)\, Q_0(E) = Ae^{-\alpha E} Q_0(E), \tag{3.10}$$

где A, α — постоянные величины, а $Q_0(E)$ — функция, обращающаяся в нуль при $E = E_{+\infty}$, энергии ухода, и учитывающая усеченность распределения для энергии, превышающей энергию ухода. Подставляя в уравнение (3.3) $f_0 = f_0^{(0)} Q_0$ и учитывая, что Q_0 тоже является интегралом движения, получим

$$\frac{D_0 Q_0}{D_0 t} = 0. \tag{3.11}$$

При решении уравнения (3.11) используем граничные условия

$$Q_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{при } E = 0, \\ 0 & \text{при } E = E_{+\infty}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Итак, решение уравнения (3.11) при (3.12) возьмем в виде

$$\left.\begin{aligned} Q_0(E) &= \sigma_1 - \sigma_2 e^{\alpha E} & E &< E_{+\infty} \\ Q_0(E) &= 0 & E &\geqslant E_{+\infty} \end{aligned}\right\}, \tag{3.13}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}}, \qquad \sigma_2 = \frac{e^{-\alpha E_{+\infty}}}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}}.$$

Следовательно, для f_0 мы имеем

$$f_0(E) = Ae^{-\alpha E}(\sigma_1 - \sigma_2 e^{\alpha E}). \tag{3.14}$$

В предыдущем параграфе мы условились, что при решении уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа будем рассматривать случай сферической симметрии системы, а состояние системы как последовательность стационарных состояний. Так как за промежуток времени Δt первоначальное стационарное состояние системы заменяется другим стационарным состоянием и т. д., то функции f_1, f_2, $f_3, \cdots$, для системы, обладающей сферической симметрией, должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{D_0 f_1}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{D_0 f_2}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial w} +$$

$$+ K_x^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0. \tag{3.16}$$

. . . .

. . . .

Таким образом, принимая во внимание (3.15), (3.16),$\cdots$, из (3.4), (3.5),$\cdots$ получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_0 c) + q_0 \nabla_c^2 f_0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_1 c) + q_0 \nabla_c^2 f_1, \tag{3.18}$$

. . . .

. . . .

Если рассматриваются скопления сферически симметричные, приблизительно стационарные и состоящие из очень большого числа гравитирующих частиц, то члены (3.1) быстро убывают при малом промежутке времени Δt и поэтому для таких скоплений $f_0 + \mu f_1$ являются достаточно хорошим приближением. При меньшем числе частиц следует использовать приближение $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$ и т. д.

В наше исследование входят скопления сферически симметричные, приблизительно стационарные и состоящие из очень большого числа гравитирующих частиц, поэтому мы можем ограничиться приближениями $f_0 + \mu f_1$ и $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$.

Итак, имея ввиду распределение (3.10), мы можем написать уравнение (3.17) в более удобном виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [\eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) + q_0 \nabla_c^2 Q_0]\, f_0^{(0)} + [\eta_0 \operatorname{div}_c (f_0^{(0)} c) + q_0 \nabla_c^2 f_0^{(0)}]\, Q_0. \tag{3.19}$$

Известно, что случайные сближения не могут изменить максвелловского распределения скоростей и координат. Математически это означает, что правая часть кинетического уравнения Больцмана обращается в нуль при подстановке в него максвелловского распределения. С другой стороны, хотя правая часть уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа является достаточно точным приближением к правой части уравнения Больцмана, она уже не обращается тождественно в нуль при подстановке в нее распределения Максвелла. Это происходит только из-за того, что уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа является лишь приближением и содержит некоторые неточности. Поэтому, приняв

$$\eta_0 \operatorname{div}_c (f^{(0)} c) + q_0 \nabla_c^2 f_0^{(0)} = 0 \tag{3.20}$$

(хотя формально это равенство строго не выполняется), мы частично уменьшим ошибку, уже имеющуюся в правой части уравнения (3.19). Таким образом, приняв (3.20), можно вместо (3.19) написать

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [\eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) + q_0 \nabla_c^2 Q_0] f_0^{(0)}. \tag{3.21}$$

Итак, имея ввиду (3.13) и учитывая (3.7), мы можем вычислить левую часть уравнения (3.21)

$$\begin{aligned} \eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) &= \eta_0 (3Q_0 - 2\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}), \\ q_0 \nabla_c^2 Q_0 &= -2q_0 \alpha\sigma_2 (3 + 2\alpha c^2)\, e^{\alpha E}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Следовательно, имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [3\eta_0 Q_0 - 2\alpha\eta_0 \sigma_2 c^2 e^{\alpha E} - 2q_0 \alpha\sigma_2 (3 + 2\alpha c^2)\, e^{\alpha E}]\, f_0^{(0)}. \tag{3.23}$$

Введем в это выражение вместо q_0 его значение $2\alpha q_0 = \eta_0$ (С. Чандрасекар [10]), тогда получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 3\eta_0 (2Q_0 - \sigma_1)\, f_0^{(0)} - 4\alpha\eta_0\sigma_2 c^2 e^{\alpha E} f_0^{(0)}. \tag{3.24}$$

Таким образом, учитывая (3.24), мы можем в первом приближении определить функции распределения скоростей и координат f из решения уравнения Фоккера-Планка (3.1) в форме

$$f = [Q_0 + 3\eta t\, (2Q_0 - \sigma_1) - 4\alpha\eta\sigma_2 c^2 e^{\alpha E} t]\, f_0^{(0)}. \tag{3.25}$$

Из этого выражения видно, что для эволюции нашей звездной системы величины Q_0, η и σ_1 играют весьма важную роль. Это обстоятельство будет показано в параграфе 6.

Чтобы полностью охарактеризовать эволюцию звездных скоплений, необходимо было определить изменение функции распределения скоростей и координат с течением времени. Выполняя эту задачу, в первом приближении мы получили (3.25). Физически этот результат может быть интерпретирован следующим образом: в процессе сближения между членами скопления непрерывно происходит обмен кинетическими энергиями и изменение угловых моментов, что сказывается в (3.25). Из (3.25) видно, как влияет фактор сближения между звездами скопления на функции распределения скоростей и координат, и важность сближений между членами скопления становится очевидной.

Зная функцию распределения скоростей и координат (3.25), мы можем определить изменения пространственной плотности в скоплении и время релаксации.

§ 4. Изменение пространственной плотности звездного скопления с течением времени

Найденное нами приращение функции распределения скоростей и координат позволяет определить изменение пространственной плотности в первом приближении.

Интегрируя функцию распределения скоростей и координат $f_1(r, c, t)$ при фиксированных x, y, z, t по всем скоростям от нуля до критической скорости, найдем приращение пространственной плотности $\rho_1(r, t)$

$$\rho_1(r, t) = \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} f_1(r, c, t)\, dc. \tag{4.1}$$

Дифференцируя выражение (4.1) по времени и принимая во внимание (3.24), получаем

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 3\eta_0 \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} \left[(2Q_0 - \sigma_1) - \frac{4}{3}\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}\right] f_0^{(0)}\, dc. \tag{4.2}$$

Далее, принимая во внимание (3.13), (3.14) и учитывая (3.7), из (4.2) получим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \eta_0 A \left(3\sigma_2 e^{2\alpha\Phi_0} \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} e^{-\alpha c^2} dc - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\right). \tag{4.3}$$

Итак, для приращения $\Delta\rho$ имеем

$$\Delta\rho = \eta A \left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}} \sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0}\, G\left(\sqrt{\alpha\overline{c^2_{+\infty}}}\right) - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\right] \Delta t, \tag{4.4}$$

где

$$G\left(\sqrt{\alpha\overline{c^2_{+\infty}}}\right) = \int\limits_0^{\sqrt{\alpha\overline{c^2_{+\infty}}}} e^{-t^2} dt. \tag{4.5}$$

Рассмотрение уравнения (4.4) показывает, что в центральной части скопления первый член в этом уравнении в несколько раз больше, чем второй член. Иными словами в центральных частях скопления плотность возрастает. Вместе с тем в периферических частях скопления выражение (4.4) отрицательно, т. е. плотность с течением времени убывает.

Итак, можно сделать следующий вывод: в результате сближений между частицами, скопление в первом приближении сжимается.

§ 5. Изменение пространственной плотности и потенциальной энергии звездного скопления во втором приближении

Для вычисления потенциала гравитационного поля используем уравнение Пуассона, которое в случае сферической симметрии системы, может быть написано в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi(r,\ t)}{dr}\right]=-4\pi G\rho(r,\ t),\tag{5.1}$$

где G — гравитационная постоянная. Функции $\Phi(r, t)$ и $\rho(r, t)$ представим в виде рядов:

$$\begin{aligned}\Phi(r,\ t)&=\Phi_0+\mu\Phi_1+\mu^2\Phi_2+\cdots\\ \rho(r,\ t)&=\rho_0+\mu\rho_1+\mu^2\rho_2+\cdots\end{aligned}\tag{5.2}$$

Из уравнений (3.1), (4.1), (5.1) и (5.2) получим

$$\rho_2(r,\ t)=\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}}f_2(r,\ c,\ t)\,dc,\tag{5.3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi_2(r,\ t)}{dr}\right]=-4\pi G\rho_2(r,\ t).\tag{5.4}$$

Дифференцируя (5.3) по времени и учитывая (3.18), получим

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}=\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}}\left[\eta_0\operatorname{div}_c(f_1c)+q_0\nabla_c^2f_1\right]dc.\tag{5.5}$$

Теперь, принимая во внимание (3.25), из (5.5) находим

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}=\eta_0t\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}}\left[3\eta_0(3\sigma_1-6\sigma_2e^{\alpha E}-4\alpha\sigma_2c^2e^{\alpha E})-2\eta_0\alpha c^2(3\sigma_1+4\sigma_2e^{\alpha E})-\right.$$

$$\left.-6q_0\alpha(3\sigma_1+4\sigma_2e^{\alpha E}-2\alpha\sigma_1c^2)\right]f_0^{(0)}dc.\tag{5.6}$$

Учитывая, что $2q_0\alpha=\eta_0$, из (5.6) имеем

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}=-10\eta_0^2t\sigma_2\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}}(3+2\alpha c^2)\,e^{\alpha E}f_0^{(0)}dc\tag{5.7}$$

или

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}=-10\eta_0^2t\sigma_2A\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\left(3+\frac{2}{3}\alpha\overline{c^2_{+\infty}}\right).\tag{5.8}$$

Известно, что $\alpha\overline{c^2_{+\infty}}=6$. Следовательно, для приращения $\Delta\rho$ будем иметь

$$\Delta\rho = \eta A\left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}}\sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0} G(\sqrt{6}) - 14\sigma_2\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}} - 70\,\eta t\sigma_2\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\right]\Delta t. \quad (5.9)$$

Далее, из (5.1), учитывая (5.9), получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}(\Delta\Phi)\right] =$$

$$= -4\pi G\eta A\left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}}\sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0} G(\sqrt{6}) - 14\sigma_2\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}(1+\eta t)\right]\Delta t. \quad (5.10)$$

Из (5.9) легко видеть, что в центральных частях $\Delta\rho > 0$. Следовательно, звездные скопления и во втором приближении с течением времени сжимаются. Необходимо отметить, что изменение пространственной плотности, вычисленное нами аналитическим методом, совпадает качественно с результатами работы Р. Миши [8], которые получены им при помощи счетной машины IBM650.

§ 6. Время релаксации звездных скоплений

Под временем релаксации понимается тот промежуток времени, в течение которого изменение начальной функции распределения скоростей и координат становится сравнимым с величиной самой функции распределения. Для того чтобы оценить время релаксации количественно, мы можем обратиться к решению уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа—(3.1), точнее к приращению функции распределения скоростей и координат, которое может быть написано в виде

$$\Delta f = 3\eta\left[\left(2 - \frac{\sigma_1}{Q_0}\right) - \frac{4}{3Q_0}\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}\right] f_0\Delta t. \quad (6.1)$$

Выражение в квадратной скобке есть безразмерная величина, поэтому мы ее обозначим

$$|B| = \left|2 - \frac{\sigma_1}{Q_0} - \frac{4}{3Q_0}\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}\right|.$$

Отметим, что $|B|$ должно быть отлично от нуля там, где функция распределения меняется со временем вследствие сближений.

Итак, приращение (6.1) принимает вид

$$|\Delta f| = f_0\frac{\Delta t}{\tau},$$

где

$$\tau = \frac{1}{3\eta|B|}, \qquad \tau_{|E=0} = \frac{1}{3\eta(2-1{,}1\sigma_1)}. \quad (6.2)$$

Если безразмерная величина $\frac{\Delta t}{\tau}$ близка к единице, то изменение начальной функции распределения скоростей и координат становится сравнимым с величиной самой функции распределения. Поэтому величину τ, определяемую выражением (6.2), можно принять за время релаксации звездной системы. Следует подчеркнуть, что важность дисперсий интеграла энергии, значения энергии ухода и коэффициента динамического трения для эволюции звездных скоплений была отмечена нами выше. Теперь эти величины в явном виде фигурируют в формуле времени релаксации (6.2), и эта важность становится очевидной.

В выражении (6.2) от величин η и σ_1 удобно перейти к величинам m, N и R. Известно, что коэффициент динамического трения η определяется формулой (Линдблад, [22])

$$\eta = 8\pi n (Gm)^2 \left(\ln \frac{D_0 |\bar{c}|^2}{2mG} \right)^2 \frac{1}{|\bar{c}|^3} [\Phi(x_0) - x_0 \Phi'(x_0)], \tag{6.3}$$

где $\Phi(x_0)$ — функция распределения случайных ошибок, $\Phi'(x_0)$ — ее производная, D_0 — параметр сближения, G — гравитационная постоянная, n — число звезд в единице объема, а x_0 — определяется формулой

$$x_0 = \alpha |\bar{c}|^2.$$

Выражение (6.3) после некоторого очевидного преобразования примет вид

$$\eta = 26 \frac{\alpha \sqrt{NG^3 m^3}\, G(x_0)}{R^{3/2}} \lg (N/2^{3/2}), \tag{6.4}$$

где N — число звезд скопления, R — его радиус, а $G(x_0)$ — определяется формулой

$$G(x_0) = \frac{1}{2x_0^2} [\Phi(x_0) - x_0 \Phi'(x_0)].$$

Функция $G(x_0)$ дана в работе [7], согласно которой мы можем взять ее среднее значение

$$\overline{G(x_0)} \simeq 0{,}2 \qquad (0{,}6 \leqslant x_0 < 1{,}6). \tag{6.5}$$

Для σ_1 имеем

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}} \tag{6.6}$$

или

$$\sigma_1 \approx 1. \tag{6.7}$$

Следует отметить, что $|B| \neq 0$, так как в случае $|B| = 0$ отсутствует сближение. Таким образом, для времени релаксации мы получаем окончательно следующую формулу:

$$\tau = \frac{1}{46{,}8} \sqrt{\frac{NR^3}{Gm}} \frac{1}{\lg N - 0{,}45}. \tag{6.8}$$

Если мы выразим массу, расстояние и время соответственно в единицах солнечной массы, парсеках и годах, то в этих единицах $G = 4{,}5 \cdot 10^{-15}$. Тогда из (6.8) получим

$$\tau = 6{,}3 \cdot 10^{5} \sqrt{NR^{3}}\, \frac{1}{\lg N - 0{,}45}. \tag{6.9}$$

По Б. Е. Маркаряну [25] скопления Гиад, М11, и т. д. находятся в стационарном состоянии и относятся к типу A. Применяя формулу (6.9) для типичного скопления $N = 400$, $R = 2$ *пс*, найдем

$$\tau = 1{,}2 \cdot 10^{7} \text{ лет.} \tag{6.10}$$

Для τ мы можем составить нижеследующую таблицу при различных значениях N и R.

Таблица

Время релаксации скоплений*

N \ R	1	2	4	6	10	50	100
50	$2{,}6 \cdot 10^{6}$	$7{,}3 \cdot 10^{6}$	$2{,}1 \cdot 10^{7}$	$3{,}8 \cdot 10^{7}$	$8{,}3 \cdot 10^{7}$	$9{,}2 \cdot 10^{8}$	$2{,}6 \cdot 10^{9}$
100	$2{,}9 \cdot 10^{6}$	$8{,}1 \cdot 10^{6}$	$2{,}3 \cdot 10^{7}$	$4{,}3 \cdot 10^{7}$	$9{,}3 \cdot 10^{7}$	$1{,}0 \cdot 10^{9}$	$2{,}9 \cdot 10^{9}$
150	$3{,}2 \cdot 10^{6}$	$9{,}0 \cdot 10^{6}$	$2{,}6 \cdot 10^{7}$	$4{,}7 \cdot 10^{7}$	$1{,}0 \cdot 10^{8}$	$1{,}2 \cdot 10^{9}$	$3{,}2 \cdot 10^{9}$
200	$8{,}4 \cdot 10^{6}$	$9{,}5 \cdot 10^{6}$	$2{,}7 \cdot 10^{7}$	$5{,}0 \cdot 10^{7}$	$1{,}1 \cdot 10^{8}$	$1{,}3 \cdot 10^{9}$	$3{,}4 \cdot 10^{9}$
250	$3{,}7 \cdot 10^{6}$	$1{,}0 \cdot 10^{6}$	$3{,}0 \cdot 10^{7}$	$5{,}4 \cdot 10^{7}$	$1{,}2 \cdot 10^{8}$	$1{,}3 \cdot 10^{9}$	$3{,}7 \cdot 10^{9}$
300	$3{,}9 \cdot 10^{6}$	$1{,}1 \cdot 10^{9}$	$3{,}1 \cdot 10^{7}$	$5{,}7 \cdot 10^{7}$	$1{,}3 \cdot 10^{8}$	$1{,}4 \cdot 10^{9}$	$3{,}9 \cdot 10^{9}$
350	$4{,}0 \cdot 10^{6}$	$1{,}1 \cdot 10^{6}$	$3{,}2 \cdot 10^{7}$	$5{,}9 \cdot 10^{7}$	$1{,}3 \cdot 10^{8}$	$1{,}4 \cdot 10^{9}$	$4{,}0 \cdot 10^{9}$
400	$4{,}2 \cdot 10^{6}$	$1{,}2 \cdot 10^{6}$	$3{,}3 \cdot 10^{7}$	$6{,}2 \cdot 10^{7}$	$1{,}4 \cdot 10^{8}$	$1{,}5 \cdot 10^{9}$	$4{,}2 \cdot 10^{9}$
450	$4{,}3 \cdot 10^{6}$	$1{,}2 \cdot 10^{6}$	$3{,}4 \cdot 10^{7}$	$6{,}3 \cdot 10^{7}$	$1{,}4 \cdot 10^{8}$	$1{,}6 \cdot 10^{9}$	$4{,}3 \cdot 10^{9}$
500	$4{,}4 \cdot 10^{6}$	$1{,}2 \cdot 10^{6}$	$3{,}5 \cdot 10^{7}$	$6{,}5 \cdot 10^{7}$	$1{,}5 \cdot 10^{8}$	$1{,}6 \cdot 10^{9}$	$4{,}4 \cdot 10^{9}$
10^{3}	$5{,}7 \cdot 10^{6}$	$1{,}6 \cdot 10^{7}$	$4{,}6 \cdot 10^{7}$	$8{,}4 \cdot 10^{7}$	$1{,}7 \cdot 10^{8}$	$2{,}0 \cdot 10^{9}$	$5{,}7 \cdot 10^{9}$
10^{4}	$1{,}3 \cdot 10^{7}$	$3{,}6 \cdot 10^{7}$	$1{,}0 \cdot 10^{8}$	$1{,}9 \cdot 10^{8}$	$4{,}1 \cdot 10^{8}$	$2{,}7 \cdot 10^{9}$	$1{,}3 \cdot 10^{10}$
10^{5}	$3{,}2 \cdot 10^{7}$	$8{,}9 \cdot 10^{7}$	$2{,}5 \cdot 10^{8}$	$4{,}7 \cdot 10^{8}$	$1{,}0 \cdot 10^{9}$	$1{,}2 \cdot 10^{10}$	$3{,}2 \cdot 10^{10}$
10^{6}	$8{,}2 \cdot 10^{7}$	$2{,}3 \cdot 10^{8}$	$6{,}5 \cdot 10^{8}$	$1{,}9 \cdot 10^{9}$	$2{,}6 \cdot 10^{9}$	$2{,}9 \cdot 10^{10}$	$8{,}2 \cdot 10^{10}$

Необходимо отметить, что время релаксации, вычисленное нами, значительно отличается от времени релаксации в работах [1, 2, 7 и т. д.]. Так, например, для типичного скопления В. А. Амбарцумян [2] получил время релаксации порядка $\tau = 4 \cdot 10^{7}$ лет.

Заключение

Изложенный выше метод решения уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа, позволил нам вычислить изменение функции распределения скоростей и координат для малых t, что необходимо было для описания структуры и эволюции звездных скоплений. Для

* R—в парсеках, τ—в годах.

вычисления изменения функции распределения скоростей и координат нами рассмотрена последовательность стационарных состояний в самом простом случае звездных скоплений, т. е. звездных скоплений, обладающих сферической симметрией.

Применяя результаты решения уравнения (2.10) к звездным скоплениям, мы пришли к слеующим выводам:

1. Пространственная плотность в сферически симметричных скоплениях в первом приближении с течением времени увеличивается. При этом звездные скопления должны разрушаться в сравнительно быстрые сроки.

2. Во втором приближении пространственная плотность и потенциальная энергия изменяются по закону (5.9) и (5.10).

3. Время релаксации для скопления Ясли порядка $1{,}2\cdot 10^7$ лет.

4. Первый из сделанных выводов совпадает качественно с результатами работы Р. Миши [8], которая выполнена посредством машинных вычислений.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство и весьма ценные указания при выполнении данной работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР
Поступила 26 II 1965

Մ. Ձ. ՀԵՅԴԱՐՈՎ

ԱՍՏՂԱԿՈՒՅՏԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԷՎՈԼՅՈՒՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Սֆերիկ աստղակույտերի կառուցվածքի և էվոլյուցիայի նկարագրության համար տրված է Ֆոկկեր-Պլանկի ընդհանրացված հավասարման լուծումը, որը թույլ է տալիս հաշվել արագությունների կոորդինատների բաշխման ֆունկցիայի Δf փոփոխությունը փոքր t-երի համար։ Այդ ֆունկցիայի փոփոխությունը հաշվելու համար արված է այն ենթադրությունը, որ էվոլյուցիոն զարգացման ընթացքը կարելի է դիտել որպես ստացիոնար վիճակների հաջորդականություն։

Քննարկված է աստղակույտերի սֆերիկ սիմետրիայի դեպքը։

Խնդիրը լուծված է 1-ին և 2-րդ մոտավորությամբ։

Առաջին մոտավորությունը տալիս է

$$\Delta f = 3\eta\left(2Q_0 - \sigma_1 - \frac{4}{3}\alpha\sigma_2 c^2 e^{2E}\right) f_0^{(0)}\Delta t$$

որտեղ η-ն դինամիկական շփման գործակիցն է, σ_1-ն, σ_2-ն և α-ն հաստատուն են, $Q_0(E)$-ն խզվող ֆունկցիա է, որը 0 է դառնում, երբ էներգիան հավասար է կրիտիկական էներգիային ($E = E_{+\infty}$), իսկ $f_0^{(0)}(E)$-ն մաքսվելյան բաշխման ֆունկցիան է։

Որոշված է նաև տարածական խտության փոփոխությունը։

Ստացված արդյունքները հաստատում են Վ. Հ. Համբարձումյանի [2] տեսությունը աստղակույտերի քայքայման մասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Росселанд С.* Астрофизика на основе теории атома. Гостехиздат, М.—Л., 1936.
2. *Амбарцумян В. А.* Научные Труды, тт. 1 и 2. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
3. *Spitzer L.* and *Schwarzschild M.* The possible influence of interstellar clouds on stellar velocities. Ap. J., **118**, № 1, 1953, 106.
4. *Амбарцумян В. А.* Об эволюции звездных систем. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961, 163.
5. *King I.* 1. Calculation for a centrally concentrated model. 2. A simple theory of the evolution of an isolated cluster. A. J., **63**, № 4, 1958, 109, 114.
6. *King I.* Expansion versus contraction in the evolution of an star cluster. A. J., **63**, № 11, 1958, 465.
7. *Чандрасекар С.* Принципы звездной динамики. ИЛ., М., 1948.
8. *Michie R. W.* Structure and evolution of globular clusters. Ap. J. **133**, № 3, 1960, 781.
9. *Spitzer L.* The stability of isolated clusters. M. N., **100**, № 5, 1940, 396.
10. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ., М., 1947.
11. *Скабицкий И. Н.* Применение кинетического уравнения к звездным системам. Ученые записки ЛГУ, серия мат. наук, астрономия, **15**, вып. 22, 1950, 10.
12. *Кузмин Г. Г.* Эффект сближений звезд и эволюция звездных скоплений. Публикации Тартуской астрон. обсерв., **33**, № 2, 1957, 75.
13. *Kurth R.* Introduction to the mechanics of stellar systems. London—New York—Paris, 1957.
14. *Michie R. W.* 1. On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems. M. N., **125**, № 2, 1963, 127. 2. The relative loss of stars with different mass. M. N., **126**, № 4. 1963, 331.
15. *Chandrasekhar S.* 1. General considerations: The coefficient of dinamical friction. 2. The rote of escape of stars from clusters and the evidence for the operation of dinamical fraction. Ap. J., **97**, № 2, 1943, 255, 263.
16. *Chandrasekhar S.* A more exact theory of the rate of excape of stars from clusters. A. J., **98**, № 1, 1943, 54.
17. *Spitzer L.* and *Härm R.* Evaporation of stars form isolated clusters. Ap. J., **127**, 1958, 544.
18. *Агекян Т. А.* Звездные системы, в сб. „Курс астрофизики и звездной астрономии", том. 2. Физматгиз, М., 1962.
19. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. Физматгиз, М., 1958.
20. *Идлис Г. М.* Структура и динамика звездных систем. Изд. АН Казахской ССР, Алма-Ата, 1961.
21. *Паренаго П. П.* Курс звездной астрономии. Гостехтеориздат, М., 1954.
22. *Линдблад Б.* Динамика Галактики, в сб. „Строение звездных систем". ИЛ., М. 1962.
23. *Rosenbluth M. N.* and... Fokker-Planck equation for an inverse-square force. Phys. Rev., **107**, № 1, 1957, 1.
24. *Де Гроот С.* и *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. Изд. „Мир", М., 1964.
25. *Маркарян Б. Е.* Об эволюции открытых звездных скоплений. Сообщения Бюраканской обсерватории, **12**, 1954, 3.