

Р. М. АРУТЮНЯН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО  
 СОСТОЯНИЯ ПЛЕНКИ С ТОКОМ

Рассматривается вопрос устойчивости сверхпроводящего состояния идеальной пленки без краев толщиной  $2d \ll \delta_0(T)$ , где  $\delta_0(T)$  — Лондоновская глубина проникновения, с током и с током при наличии магнитного поля.

Найдем термодинамический потенциал  $\Phi_s$  тонкой пленки в сверхпроводящем состоянии и, исследуя его, покажем, что пленка в присутствии тока вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Как известно, плотность свободной энергии вещества в сверхпроводящем состоянии выражается следующим образом [1]:

$$F_s = F_n + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| -\frac{i\hbar}{2\pi} \nabla \Psi - \frac{e}{c} \bar{A} \Psi \right|^2, \quad (1)$$

где

$$F_n = F_n - a(T) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\Psi|^4.$$

Здесь  $\Psi$  — эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов  $n_s$ , а  $F_n$  — плотность свободной энергии вещества в нормальном состоянии.

Из (1) получаются уравнения Гинзбурга-Ландау [1], с помощью которых можно определить равновесные значения  $\Psi$  и  $\bar{A}$ :

$$\frac{1}{2m} \left( -\frac{i\hbar}{2\pi} \nabla - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 \Psi + \frac{\partial F_s(\Psi \Psi^*)}{\partial \Psi^*} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{j} = -\frac{ie\hbar}{4m\pi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^2}{mc} \bar{A} \Psi \Psi^*. \quad (3)$$

Из совместного решения этих уравнений вытекает, что для пленки с толщиной  $2d \ll \delta_0(T)$ ,  $\Psi$  можно принять постоянной по всей пленке [1]. Уравнение (3) есть выражение для плотности тока. В рассмотренном случае, как нетрудно убедиться, оно эквивалентно уравнению Лондона:

$$\text{rot } \bar{j}_s = -\frac{1}{c} \bar{H}, \quad (4)$$

где  $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \frac{m}{e^2 \nu^2}$ ; отличие заключается лишь в том, что в (4)  $\Lambda$  зависит от температуры, внешнего магнитного поля и тока.

Из уравнения (4) следует [2];

$$\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} = \bar{E}. \quad (5)$$

С помощью соотношений (1), (4), (5) определим выражение термодинамического потенциала  $\Phi_s$  для пленки при условиях  $T = \text{const}$  и  $\bar{j}_0 = \text{const}$  (где  $\bar{j}_0$  — плотность тока через пленку).

Для этого рассмотрим начальный процесс перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное.

Первое начало термодинамики для процессов в электромагнитном поле имеет вид [6]

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s}, \quad (6)$$

где последний член  $W = \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s}$  — количество электромагнитной энергии, втекающей в пленку за время  $\Delta t$ .

Предполагаем, что пленка является частью замкнутой цепи с внешней ЭДС, причем ЭДС меняется таким образом, что общий ток  $I_0$  в цепи остается постоянным в течение всего процесса перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное [5]. При этом, плотность сверхпроводящего тока  $\bar{j}_s$  меняется от значения  $\bar{j}_0$  в сверхпроводящем состоянии до 0 в нормальном. Постоянство  $I_0$  еще не означает, что распределение тока по толщине пленки во время перехода не меняется, так что под  $\bar{j}_0$  в дальнейшем везде мы понимаем среднюю по толщине плотность тока.

При этом учтем, что в течение всего процесса перехода соблюдается соотношение  $\bar{j}_n + \bar{j}_s = \bar{j}_0 = \text{const}$ , где  $\bar{j}_n$  — плотность нормального тока.

Рассмотрим теперь член  $W$  в уравнении (6). Для этого возьмем на пленке (фиг. 1) участок длиной  $l$  и шириной  $m$ . Допустим, что  $l$  направлен по оси  $x$ , а ток по оси  $y$ . На каждой из поверхностей этого участка (обозначенных на рисунке цифрами 1 и 2 и параллельных плоскости  $xoy$ ) вектор Пойтинга постоянен по величине и направлению, перпендикулярен к поверхности и направлен внутрь объема.

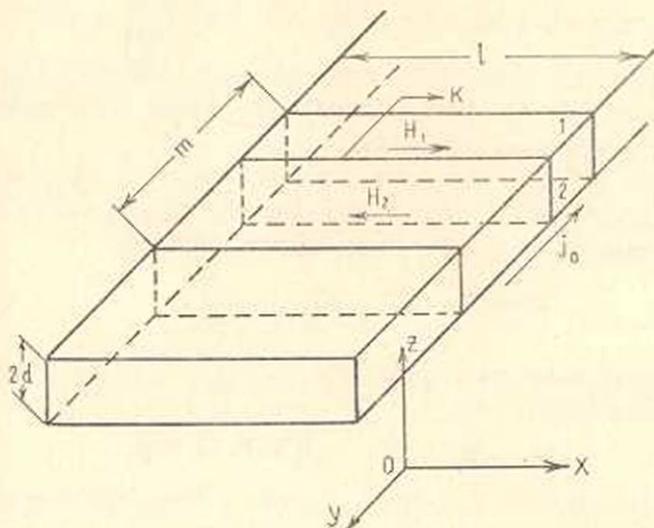
Произведем вычисление  $W$  методом, аналогичным приведенному в [2]. Используя соотношение (5), получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_1 - \left( \frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_2 \right\}.$$

Учитывая, что  $\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t}$  перпендикулярен  $\bar{H}$ , а векторные произведения

скобках направлены внутрь выделенного объема пленки, для  $W$  получаем следующее выражение:

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} 2lm \bar{H}. \quad (7)$$



Фиг. 1. Схема условий задачи.

В нашем участке возьмем контур  $k$ , находящийся в плоскости перпендикулярного сечения пленки. Циркуляция вектора магнитного поля по этому контуру равна

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = 2lH.$$

Используя это соотношение, из (7) получаем

$$W = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \int \text{rot} \bar{H} d\bar{s}. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что  $\text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ , из (8) получаем

$$W = j_0 \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} (2ldm) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \frac{\partial D}{\partial t} (m \cdot 2ld). \quad (9)$$

Произведение  $2mld$  есть объем выделенного участка. Для плотности электромагнитной энергии, втекающей в единицу времени в пленку, из (9) получаем

$$\omega = j_0 \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{\partial D^2}{\partial t}. \quad (10)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная ( $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ). При помощи (10) уравнение (6) выразится в виде

$$\Delta E = \Delta Q + j_0 \Delta \Lambda j_s + \frac{1}{\varepsilon} \Delta \frac{D^2}{8\pi}. \quad (11)$$

В выражениях (10) и (11) потерями на джоулево тепло можно пренебречь.

Действительно, джоулево тепло  $\bar{j}_n \bar{E} = j_n \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t}$  в начале перехода намного меньше по сравнению с  $\omega$ , так как вблизи сверхпроводящего состояния  $j_n \ll j_0$ . Итак, процесс перехода в начальной стадии можно считать квазиравновесным.

Учитывая это обстоятельство, из (11) получим, что при  $T = \text{const}$  и  $j_0 = \text{const}$  (ввиду того, что теперь можно принять  $\Delta Q = T\Delta S$ ), должна быть минимальна термодинамическая функция

$$\Phi = E - ST - \Lambda j_0 j_s - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \quad (12)$$

В сверхпроводящем состоянии  $j_s = j_0$  и  $D = 0$ , так что (12) принимает следующий вид:

$$\Phi_s = E - ST - \Lambda j_0^2 = F_s - \Lambda j_0^2. \quad (13)$$

В (13)  $F_s$  — плотность свободной энергии в сверхпроводящем состоянии, определяемая выражением (1).

Перейдем теперь к исследованию  $\Phi_s$ .

Рассмотрим сначала пленку с током. В этом случае, как нетрудно убедиться из (1),  $F_s$  имеет вид

$$F_{sl} = F_{n_0} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{2} \Lambda j_0^2, \quad (14)$$

где второй член — плотность энергии магнитного поля тока, последний член —  $\frac{1}{2} \Lambda j_0^2$  — кинетическая энергия сверхпроводящего тока.

В дальнейшем будем придерживаться обозначений, приведенных в статье [3]. Так,

$$\Psi^2 = \frac{n_s}{n_{s^*}} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda}, \quad (15)$$

где  $n_{s^*}$  — плотность сверхпроводящих электронов при  $T=0$  в отсутствие тока и магнитного поля, а  $n_s$  — плотность при температуре  $T$  при наличии тока и магнитного поля. Коэффициенты  $a$  и  $b$  при данной нормировке имеют значения

$$a = \frac{H_{cn}^2}{4\pi} \left[ \frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \quad b = a(T) \left[ \frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \quad (15a)$$

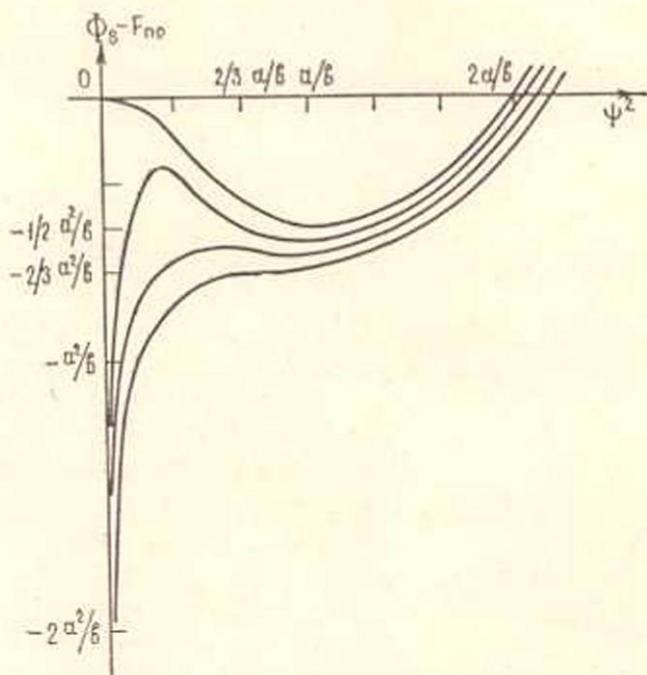
где  $\Lambda_e(T)$  — глубина проникновения слабого магнитного поля при температуре  $T$  (т. е. то же самое, что и  $\delta_0(T)$ ), а  $\Lambda_e(0)$  — при  $T=0$ , а  $H_{cn}$  — термодинамическое критическое магнитное поле. Учитывая (13), (14), (15), для  $\Phi_s$  получаем следующее выражение

$$\Phi_{st} = F_{st} - a(T) \Psi^2 + \frac{1}{2} b(T) \Psi^4 + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 a^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2 \quad (16)$$

Условие равновесия пленки в сверхпроводящем состоянии:

$$\frac{\partial \Phi_{st}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \quad (17)$$

На фиг. 2 представлен ход кривых  $\Phi_{st}$ , где  $j_0$  рассматривается как параметр.



Фиг. 2. Зависимость термодинамического потенциала  $\Phi_s$  от квадрата волновой функции  $\Psi$ .

При  $j_0 = 0$   $\Phi_s = F_s$  и система находится в равновесии при  $\Psi^2 = \frac{a}{b}$ . При  $j_0 \neq 0$  ход кривых уже отличается от  $F_s$ . Кроме точки минимума на кривых появляется еще точка максимума. Устойчивое равновесие соответствует  $\Psi_{min}$ . С увеличением  $j_0$  высота пика максимумов уменьшается, а  $\Psi_{min}$  передвигается в сторону меньших значений.

При определенном значении  $j_{кр}$  на кривой появляется точка перегиба, где  $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} = 0$ , которая и соответствует переходу пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное. Таким образом, значения  $j_{кр}$  и  $\Psi_{кр}^2$  получаются из совместного решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_{s1}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2 = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{s1}}{\partial \Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} j_0^2 = 0.$$

В точке перехода волновая функция и плотность критического тока удовлетворяют следующему соотношению:

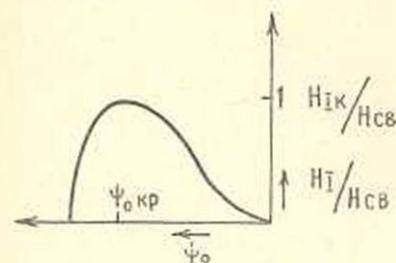
$$\Psi_{кр}^2 = \frac{\Lambda_0^{1/2}}{b^{1/2}} j_{0кр}^2.$$

Из решения (18) для  $j_{0кр}$  получается выражение, выведенное в [1] другим путем,

$$j_{0кр} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{св} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\delta_0(T)},$$

$$\Psi_{кр}^2 = \frac{2a}{3b} = \frac{2}{3} \frac{\Lambda_c^2(0)}{\Lambda_c^2(T)} = \frac{2}{3} \frac{c^2 \Lambda_0}{4\pi \delta_0^2(T)}.$$

Интересно сравнить ход кривой зависимости  $H_1$  от  $\Psi$  (где  $H_1$  — магнитное поле тока на поверхности пленки) (фиг. 3) [4] с фиг. 2.



Фиг. 3. Зависимость магнитного поля тока на поверхности пленки от волновой функции  $\Psi_s$ .

На фиг. 3 в точке максимума происходит переход. Часть кривой, лежащей с левой стороны максимума, соответствует устойчивому равновесию системы, а лежащая справа — неустойчивому. Это означает, что свободная энергия системы  $F_s$  с левой стороны меньше, чем с правой при одном и том же значении  $j_0$ . Нетрудно заметить, что левая часть кривой на фиг. 3 соответствует точкам минимума на фиг. 2, а правая — максимумам. Максимум на фиг. 3 соответствует точке перегиба на фиг. 2, где равны нулю одновременно первая и вторая производные  $\Phi_{s1}$ .

Теперь рассмотрим пленку с током  $j_0$ , помещенную во внешнее магнитное поле  $\bar{H}$ , параллельное ее поверхности. Принимаем, что направление  $\bar{H}$  перпендикулярно току. Так как  $2d \ll \delta_0(T)$ , то магнитное поле можно считать полностью пронизывающим пленку. В этом случае, в выражении свободной энергии пленки в сверхпроводящем состоянии добавляются члены, связанные с магнитным полем. Это

плотность энергии магнитного поля  $\frac{H^2}{8\pi}$  и плотность кинетической энергии мейснеровского тока

$$T = \frac{1}{2} \Lambda j_s^2, \quad (19)$$

Выражение (19) можно преобразовать следующим образом. Условие квантования магнитного потока есть [3]

$$\Phi = \int_S \int \bar{H} d\bar{S} + c \oint \bar{\Lambda} \bar{j}_s d\bar{l} = n\varphi_0, \quad (20)$$

где  $\varphi_0 = \frac{hc}{2l} = 2,07 \cdot 10^{-7} zc/cm^2$ ; контуры интегрирования берем в плоскости сечения пленки перпендикулярно и симметрично относительно средней плоскости пленки.

Так как пленка односвязная, то  $n=0$ . Таким образом, в нашем случае

$$\Phi = \int_S \int \bar{H} d\bar{S} + c \oint \bar{\Lambda} \bar{j}_s d\bar{l} = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим контур длиной  $l$  и шириной  $2x$  и применим к нему уравнение (21). Получаем

$$H \cdot 2lx + c \Lambda j_x \cdot 2l = 0,$$

отсюда

$$j_x = -\frac{H}{c\Lambda} x. \quad (22)$$

С помощью (22) и (15) для плотности кинетической энергии тока Мейснера получаем

$$T = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\Lambda j_x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2. \quad (23)$$

В этом случае, учитывая (23), для свободной энергии имеем

$$F_s = F_{n_s} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2.$$

Отсюда

$$F_s' = F_{n_s} - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2. \quad (24)$$

Используя (24), представим условие равновесия сверхпроводящей пленки при постоянном  $H$  и  $j_0$  в виде

$$\frac{\partial F_s}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \quad (25)$$

Зависимость функции (24) от  $\Psi$  такая же, как на фиг. 2, с тем отличием, что точки минимума, максимума и перегиба смещены в сторону меньших  $\Psi$ .

При  $j_0 = 0$  из (24) получаем, что система находится в равновесии при

$$\Psi_{\text{min}}^2 = \frac{a}{b} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\},$$

где  $H_{11} = \sqrt{6} H_{\text{св}} \delta_0 / d$  есть критическое магнитное поле тонкой пленки в случае, когда ток отсутствует и поле направлено параллельно поверхности пленки.

В точке перегиба, где система переходит в нормальное состояние, значения  $\Psi_{\text{кр}}^2$  и  $J_{0\text{кр}}$  определяются из совместного решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} &= -2a\Psi + 2b\Psi^2 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} J_0^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} &= -2a + 6b\Psi^2 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} J_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Для плотности критического тока  $J_{0\text{кр}}$  получается известное выражение [1]

$$J_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{\text{св}} \frac{1}{\delta_0} \frac{c}{4\pi} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\}^{1/4}.$$

При этом значение  $\Psi_{\text{кр}}^2$  равно

$$\Psi_{\text{кр}}^2 = \frac{2}{3} \frac{a}{b} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\}.$$

Итак, мы показали, что тонкая пленка с током вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Действительно, из исследования хода кривых зависимости термодинамического потенциала  $\Phi_s$  от  $\Psi$  вытекает, что в точке перехода обращаются в нуль одновременно  $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi}$  и  $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2}$ , что соответствует точке перегиба на фиг. 2.

Институт металлургии им. А. А. Байкова, Москва.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 26.III 1965

Բ. Մ. ԱՐՄԻՅԱՆԻԱՆ

ՀՈՍԱՆՔՈՎ, ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ՎԻՃԱԿԻ  
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ն Փ Ն Ի Մ

Թերմոդինամիկական մեթոդով ուսումնասիրված է թաղանթի գերհաղորդականության վիճակի կարևորագույն հարցը, երբ թաղանթի միջով հոսանք

է անցնում, այն դեպքում, երբ թաղանթի հաստությունն ավելի փոքր է, քան լոնդոնյան թափանցելիության խորությունը:

Յույց է արված, որ վիճակները որոշող տիրալիթի այն մասում, որը գտնվում է գերհաղորդականությունից նորմալ վիճակին անցնելու սահմանի մոտ, թաղանթն ունի մետաստաբիլ վիճակ:

Նույնպիսի արդյունք ստացվում է նաև այն դեպքում, երբ հոսանքով թաղանթը գտնվում է արտաքին մագնիսական դաշտում:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 20, 1950, 1064.
2. Гинзбург В. Л. Сверхпроводимость. Изд. АН СССР, 1946.
3. Tinkham M. Effect of fluxoid quantization on transition of superconducting films. Phys. Rev., 129, 1963, 2413.
4. Гинзбург В. Л. Критический ток для сверхпроводящих пленок. ДАН СССР, 118, 1958, 464.
5. Шенберг Д. Сверхпроводимость. ИЛ, М., 1955, стр. 127.
6. Салин В. П. Сверхпроводящий цилиндр и шар в магнитном поле. ЖЭТФ, 21, 1951, 1330.

Р. М. АРУТЮНЯН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО  
 СОСТОЯНИЯ ПЛЕНКИ С ТОКОМ

Рассматривается вопрос устойчивости сверхпроводящего состояния идеальной пленки без краев толщиной  $2d \ll \delta_0(T)$ , где  $\delta_0(T)$  — Лондоновская глубина проникновения, с током и с током при наличии магнитного поля.

Найдем термодинамический потенциал  $\Phi_s$  тонкой пленки в сверхпроводящем состоянии и, исследуя его, покажем, что пленка в присутствии тока вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Как известно, плотность свободной энергии вещества в сверхпроводящем состоянии выражается следующим образом [1]:

$$F_s = F_{s_0} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| -\frac{i\hbar}{2\pi} \nabla \Psi - \frac{e}{c} \bar{A} \Psi \right|^2, \quad (1)$$

где

$$F_{s_0} = F_{n_0} - a(T) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} b(T) |\Psi|^4.$$

Здесь  $\Psi$  — эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов  $n_s$ , а  $F_{n_0}$  — плотность свободной энергии вещества в нормальном состоянии.

Из (1) получаются уравнения Гинзбурга-Ландау [1], с помощью которых можно определить равновесные значения  $\Psi$  и  $\bar{A}$ :

$$\frac{1}{2m} \left( -\frac{i\hbar}{2\pi} \nabla - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 \Psi + \frac{\partial F_{s_0}(\Psi \Psi^*)}{\partial \Psi^*} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{j} = -\frac{ie\hbar}{4m\pi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^2}{mc} \bar{A} \Psi \Psi^*. \quad (3)$$

Из совместного решения этих уравнений вытекает, что для пленки с толщиной  $2d \ll \delta_0(T)$ ,  $\Psi$  можно принять постоянной по всей пленке [1]. Уравнение (3) есть выражение для плотности тока. В рассмотренном случае, как нетрудно убедиться, оно эквивалентно уравнению Лондона:

$$\text{rot } \bar{j}_s = -\frac{1}{c} \bar{H}, \quad (4)$$

где  $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \frac{m}{e^2 \nu^2}$ ; отличие заключается лишь в том, что в (4)  $\Lambda$  зависит от температуры, внешнего магнитного поля и тока.

Из уравнения (4) следует [2];

$$\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} = \bar{E}. \quad (5)$$

С помощью соотношений (1), (4), (5) определим выражение термодинамического потенциала  $\Phi_s$  для пленки при условиях  $T = \text{const}$  и  $\bar{j}_0 = \text{const}$  (где  $\bar{j}_0$  — плотность тока через пленку).

Для этого рассмотрим начальный процесс перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное.

Первое начало термодинамики для процессов в электромагнитном поле имеет вид [6]

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s}, \quad (6)$$

где последний член  $W = \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s}$  — количество электромагнитной энергии, втекающей в пленку за время  $\Delta t$ .

Предполагаем, что пленка является частью замкнутой цепи с внешней ЭДС, причем ЭДС меняется таким образом, что общий ток  $I_0$  в цепи остается постоянным в течение всего процесса перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное [5]. При этом, плотность сверхпроводящего тока  $\bar{j}_s$  меняется от значения  $\bar{j}_0$  в сверхпроводящем состоянии до 0 в нормальном. Постоянство  $I_0$  еще не означает, что распределение тока по толщине пленки во время перехода не меняется, так что под  $\bar{j}_0$  в дальнейшем везде мы понимаем среднюю по толщине плотность тока.

При этом учтем, что в течение всего процесса перехода соблюдается соотношение  $\bar{j}_n + \bar{j}_s = \bar{j}_0 = \text{const}$ , где  $\bar{j}_n$  — плотность нормального тока.

Рассмотрим теперь член  $W$  в уравнении (6). Для этого возьмем на пленке (фиг. 1) участок длиной  $l$  и шириной  $m$ . Допустим, что  $l$  направлен по оси  $x$ , а ток по оси  $y$ . На каждой из поверхностей этого участка (обозначенных на рисунке цифрами 1 и 2 и параллельных плоскости  $xoy$ ) вектор Пойтинга постоянен по величине и направлению, перпендикулярен к поверхности и направлен внутрь объема.

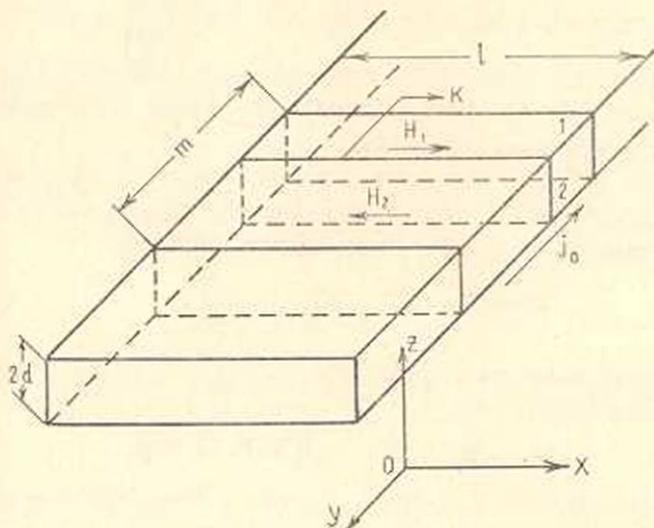
Произведем вычисление  $W$  методом, аналогичным приведенному в [2]. Используя соотношение (5), получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{s} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left( \frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_1 - \left( \frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_2 \right\}.$$

Учитывая, что  $\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t}$  перпендикулярен  $\bar{H}$ , а векторные произведения

скобках направлены внутрь выделенного объема пленки, для  $W$  получаем следующее выражение:

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) d\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} 2lm \bar{H}. \quad (7)$$



Фиг. 1. Схема условий задачи.

В нашем участке возьмем контур  $k$ , находящийся в плоскости перпендикулярного сечения пленки. Циркуляция вектора магнитного поля по этому контуру равна

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = 2lH.$$

Используя это соотношение, из (7) получаем

$$W = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \int \text{rot} \bar{H} d\bar{s}. \quad (8)$$

Принимая во внимание, что  $\text{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ , из (8) получаем

$$W = j_0 \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} (2ldm) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} \frac{\partial D}{\partial t} (m \cdot 2ld). \quad (9)$$

Произведение  $2mld$  есть объем выделенного участка. Для плотности электромагнитной энергии, втекающей в единицу времени в пленку, из (9) получаем

$$\omega = j_0 \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{\partial D^2}{\partial t}. \quad (10)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная ( $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ). При помощи (10) уравнение (6) выразится в виде

$$\Delta E = \Delta Q + j_0 \Delta \Lambda j_s + \frac{1}{\varepsilon} \Delta \frac{D^2}{8\pi}. \quad (11)$$

В выражениях (10) и (11) потерями на джоулево тепло можно пренебречь.

Действительно, джоулево тепло  $\bar{j}_n \bar{E} = j_n \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t}$  в начале перехода намного меньше по сравнению с  $\omega$ , так как вблизи сверхпроводящего состояния  $j_n \ll j_0$ . Итак, процесс перехода в начальной стадии можно считать квазиравновесным.

Учитывая это обстоятельство, из (11) получим, что при  $T = \text{const}$  и  $j_0 = \text{const}$  (ввиду того, что теперь можно принять  $\Delta Q = T \Delta S$ ), должна быть минимальна термодинамическая функция

$$\Phi = E - ST - \Lambda j_0 j_s - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \quad (12)$$

В сверхпроводящем состоянии  $j_s = j_0$  и  $D = 0$ , так что (12) принимает следующий вид:

$$\Phi_s = E - ST - \Lambda j_0^2 = F_s - \Lambda j_0^2. \quad (13)$$

В (13)  $F_s$  — плотность свободной энергии в сверхпроводящем состоянии, определяемая выражением (1).

Перейдем теперь к исследованию  $\Phi_s$ .

Рассмотрим сначала пленку с током. В этом случае, как нетрудно убедиться из (1),  $F_s$  имеет вид

$$F_{sl} = F_{n_0} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a \Psi^2 + \frac{1}{2} b \Psi^4 + \frac{1}{2} \Lambda j_0^2, \quad (14)$$

где второй член — плотность энергии магнитного поля тока, последний член —  $\frac{1}{2} \Lambda j_0^2$  — кинетическая энергия сверхпроводящего тока.

В дальнейшем будем придерживаться обозначений, приведенных в статье [3]. Так,

$$\Psi^2 = \frac{n_s}{n_{s0}} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda}, \quad (15)$$

где  $n_{s0}$  — плотность сверхпроводящих электронов при  $T=0$  в отсутствие тока и магнитного поля, а  $n_s$  — плотность при температуре  $T$  при наличии тока и магнитного поля. Коэффициенты  $a$  и  $b$  при данной нормировке имеют значения

$$a = \frac{H_{cn}^2}{4\pi} \left[ \frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \quad b = a(T) \left[ \frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \quad (15a)$$

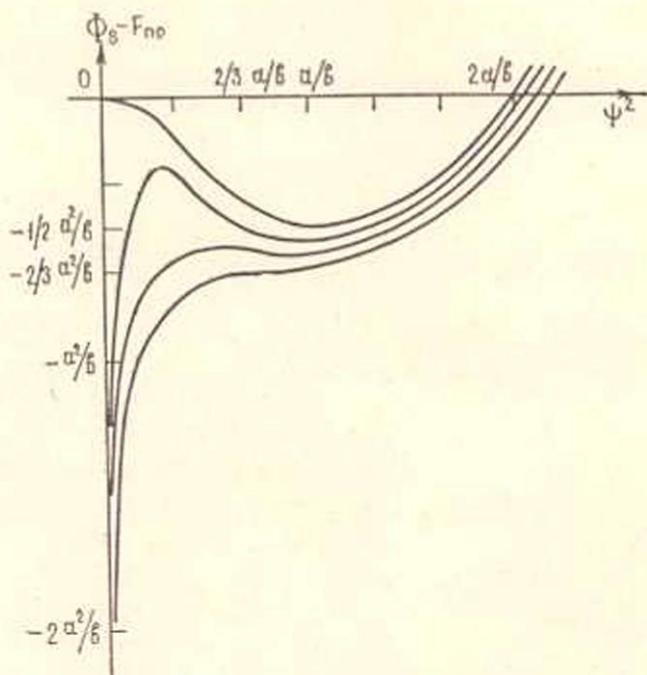
где  $\Lambda_e(T)$  — глубина проникновения слабого магнитного поля при температуре  $T$  (т. е. то же самое, что и  $\delta_0(T)$ ), а  $\Lambda_e(0)$  — при  $T=0$ , а  $H_{cn}$  — термодинамическое критическое магнитное поле. Учитывая (13), (14), (15), для  $\Phi_s$  получаем следующее выражение

$$\Phi_{st} = F_{st} - a(T) \Psi^2 + \frac{1}{2} b(T) \Psi^4 + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 a^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2 \quad (16)$$

Условие равновесия пленки в сверхпроводящем состоянии:

$$\frac{\partial \Phi_{st}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \quad (17)$$

На фиг. 2 представлен ход кривых  $\Phi_{st}$ , где  $j_0$  рассматривается как параметр.



Фиг. 2. Зависимость термодинамического потенциала  $\Phi_s$  от квадрата волновой функции  $\Psi$ .

При  $j_0 = 0$   $\Phi_s = F_s$  и система находится в равновесии при  $\Psi^2 = \frac{a}{b}$ . При  $j_0 \neq 0$  ход кривых уже отличается от  $F_s$ . Кроме точки минимума на кривых появляется еще точка максимума. Устойчивое равновесие соответствует  $\Psi_{min}$ . С увеличением  $j_0$  высота пика максимумов уменьшается, а  $\Psi_{min}$  передвигается в сторону меньших значений.

При определенном значении  $j_{кр}$  на кривой появляется точка перегиба, где  $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} = 0$ , которая и соответствует переходу пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное. Таким образом, значения  $j_{кр}$  и  $\Psi_{кр}^2$  получаются из совместного решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_{s1}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2 = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{s1}}{\partial \Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} j_0^2 = 0.$$

В точке перехода волновая функция и плотность критического тока удовлетворяют следующему соотношению:

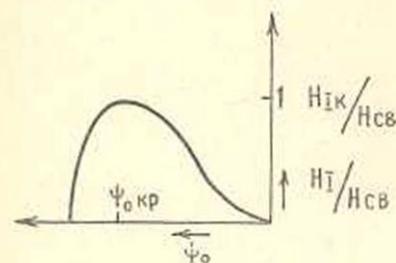
$$\Psi_{кр}^2 = \frac{\Lambda_0^{1/2}}{b^{1/2}} j_{0кр}^2.$$

Из решения (18) для  $j_{0кр}$  получается выражение, выведенное в [1] другим путем,

$$j_{0кр} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{св} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\delta_0(T)},$$

$$\Psi_{кр}^2 = \frac{2a}{3b} = \frac{2}{3} \frac{\Lambda_s^2(0)}{\Lambda_s^2(T)} = \frac{2}{3} \frac{c^2 \Lambda_0}{4\pi} \frac{1}{\delta_0^2(T)}.$$

Интересно сравнить ход кривой зависимости  $H_1$  от  $\Psi$  (где  $H_1$  — магнитное поле тока на поверхности пленки) (фиг. 3) [4] с фиг. 2.



Фиг. 3. Зависимость магнитного поля тока на поверхности пленки от волновой функции  $\Psi_s$ .

На фиг. 3 в точке максимума происходит переход. Часть кривой, лежащей с левой стороны максимума, соответствует устойчивому равновесию системы, а лежащая справа — неустойчивому. Это означает, что свободная энергия системы  $F_s$  с левой стороны меньше, чем с правой при одном и том же значении  $j_0$ . Нетрудно заметить, что левая часть кривой на фиг. 3 соответствует точкам минимума на фиг. 2, а правая — максимумам. Максимум на фиг. 3 соответствует точке перегиба на фиг. 2, где равны нулю одновременно первая и вторая производные  $\Phi_{s1}$ .

Теперь рассмотрим пленку с током  $j_0$ , помещенную во внешнее магнитное поле  $\bar{H}$ , параллельное ее поверхности. Принимаем, что направление  $\bar{H}$  перпендикулярно току. Так как  $2d \ll \delta_0(T)$ , то магнитное поле можно считать полностью пронизывающим пленку. В этом случае, в выражении свободной энергии пленки в сверхпроводящем состоянии добавляются члены, связанные с магнитным полем. Это

плотность энергии магнитного поля  $\frac{H^2}{8\pi}$  и плотность кинетической энергии мейснеровского тока

$$T = \frac{1}{2} \Lambda j_s^2, \quad (19)$$

Выражение (19) можно преобразовать следующим образом. Условие квантования магнитного потока есть [3]

$$\Phi = \int_S \int \bar{H} d\bar{S} + c \oint \bar{\Lambda} \bar{j}_s d\bar{l} = n\varphi_0, \quad (20)$$

где  $\varphi_0 = \frac{hc}{2l} = 2,07 \cdot 10^{-7} zc/cm^2$ ; контуры интегрирования берем в плоскости сечения пленки перпендикулярно и симметрично относительно средней плоскости пленки.

Так как пленка односвязная, то  $n=0$ . Таким образом, в нашем случае

$$\Phi = \int_S \int \bar{H} d\bar{S} + c \oint \bar{\Lambda} \bar{j}_s d\bar{l} = 0. \quad (21)$$

Рассмотрим контур длиной  $l$  и шириной  $2x$  и применим к нему уравнение (21). Получаем

$$H \cdot 2lx + c \Lambda j_x \cdot 2l = 0,$$

отсюда

$$j_x = -\frac{H}{c\Lambda} x. \quad (22)$$

С помощью (22) и (15) для плотности кинетической энергии тока Мейснера получаем

$$T = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\Lambda j_x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2. \quad (23)$$

В этом случае, учитывая (23), для свободной энергии имеем

$$F_s = F_{n_s} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2.$$

Отсюда

$$F_s' = F_{n_s} - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2. \quad (24)$$

Используя (24), представим условие равновесия сверхпроводящей пленки при постоянном  $H$  и  $j_0$  в виде

$$\frac{\partial F_s}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \quad (25)$$

Зависимость функции (24) от  $\Psi$  такая же, как на фиг. 2, с тем отличием, что точки минимума, максимума и перегиба смещены в сторону меньших  $\Psi$ .

При  $j_0 = 0$  из (24) получаем, что система находится в равновесии при

$$\Psi_{\text{min}}^2 = \frac{a}{b} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\},$$

где  $H_{11} = \sqrt{6} H_{\text{св}} \delta_0 / d$  есть критическое магнитное поле тонкой пленки в случае, когда ток отсутствует и поле направлено параллельно поверхности пленки.

В точке перегиба, где система переходит в нормальное состояние, значения  $\Psi_{\text{кр}}^2$  и  $J_{0\text{кр}}$  определяются из совместного решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} &= -2a\Psi + 2b\Psi^2 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} J_0^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} &= -2a + 6b\Psi^2 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} J_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Для плотности критического тока  $J_{0\text{кр}}$  получается известное выражение [1]

$$J_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{\text{св}} \frac{1}{\delta_0} \frac{c}{4\pi} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\}^{1/4}.$$

При этом значение  $\Psi_{\text{кр}}^2$  равно

$$\Psi_{\text{кр}}^2 = \frac{2}{3} \frac{a}{b} \left\{ 1 - \left( \frac{H}{H_{11\text{кр}}} \right)^2 \right\}.$$

Итак, мы показали, что тонкая пленка с током вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Действительно, из исследования хода кривых зависимости термодинамического потенциала  $\Phi_s$  от  $\Psi$  вытекает, что в точке перехода обращаются в нуль одновременно  $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi}$  и  $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2}$ , что соответствует точке перегиба на фиг. 2.

Институт металлургии им. А. А. Байкова, Москва.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 26.III 1965

Բ. Մ. ԱՐՄԻՅԱՆԻԱՆ

ՀՈՍԱՆՔՈՎ, ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ՎԻՃԱԿԻ  
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ն Փ Ն Ի Մ

Թերմոդինամիկական մեթոդով ուսումնասիրված է թաղանթի զերհաղորդականության վիճակի կարևորության հարցը, երբ թաղանթի միջով հոսանք

է անցնում, այն դեպքում, երբ թաղանթի հաստությունն ավելի փոքր է, քան լոնդոնյան թափանցելիության խորությունը:

Յույց է արված, որ վիճակները որոշող տիրալիթի այն մասում, որը գտնվում է գերհաղորդականությունից նորմալ վիճակին անցնելու սահմանի մոտ, թաղանթն ունի մետաստաբիլ վիճակ:

Նույնպիսի արդյունք ստացվում է նաև այն դեպքում, երբ հոսանքով թաղանթը գտնվում է արտաքին մագնիսական դաշտում:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 20, 1950, 1064.
2. Гинзбург В. Л. Сверхпроводимость. Изд. АН СССР, 1946.
3. Tinkham M. Effect of fluxoid quantization on transition of superconducting films. Phys. Rev., 129, 1963, 2413.
4. Гинзбург В. Л. Критический ток для сверхпроводящих пленок. ДАН СССР, 118, 1958, 464.
5. Шенберг Д. Сверхпроводимость. ИЛ, М., 1955, стр. 127.
6. Салин В. П. Сверхпроводящий цилиндр и шар в магнитном поле. ЖЭТФ, 21, 1951, 1330.