ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

М. С. ГАБРИЕЛЯН

О СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОДНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ КООРДИНАТЕ

В статье рассматривается задача об управляющих воздействиях, стабилизирующих движение голономной механической системы, при одной циклической координате, когда управляющее воздействие — скалярная величина.

§ 1. Рассмотрим голономную, механическую систему, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q_1,\cdots,q_n,u,t)\quad (i=1,\cdots,n). \tag{1.1}$$

Здесь q_i — обобщенные координаты, T — кинетическая энергия, Q_i — обобщенная сила, соответствующая координате q_i, u — внешнее управляющее воздействие.

Пусть система (1.1) обладает решением $q_i=0$ при $u\equiv 0$.

Предположим, что линейное приближение стационарное и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}q_j+b_iu\quad (i=1,\cdots,n), \tag{1.2}$$

где a_{ij}, b_{ij}, b_i — постоянные, причем $\sum a_{ij}q_iq_j$ — определенно-положительная форма, $b_{ij}=b_{ji}$ и, при $u\equiv 0$, $Q_i=\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\cdot$ Пусть координата q_1 циклическая [1], т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0\quad \text{при}\quad u\equiv 0. \tag{1.3}$$

Тогда система (1.2) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\ddot{q}_j=b_1u,\qquad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot{q}_j=\sum_{j=2}^{n}b_{ij}q_j+b_iu\qquad (i=2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

Если в уравнениях (1.4) отлична от нуля лишь координата b_k вектора $\{b_i\}$, то будем говорить, что система (1.4) управляется по координате q_k.

Задача 1.1. Найти функцию

$$u=\sum_{i=1}^{n} p_{2i-1} q_i+\sum_{i=1}^{n} p_{2i} q_i^{\cdot} \tag{1.5}$$

такую, чтобы движение $q_i=0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений движения (1.4), (1.5) и чтобы при этом на движениях $q_i(t)$, $u(t)$ системы минимизировался функционал

$$I=\int_0^{T} \omega\,[q(t),\; q'(t),\; u(t)]\,dt, \tag{1.6}$$

где $\omega(q, q', u)$ — определенно-положительная квадратичная форма.

Приведем систему (1.2) к нормальным координатам [2]

$$x_i^{\cdot}=\lambda_i x_i+\alpha_i u \quad (i=1,\cdots, n). \tag{1.7}$$

Уравнения, определяющие числа λ_i и α_i, при (1.3) принимают вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{21}\lambda & \cdots & a_{n1}\lambda \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n}\lambda & a_{2n}\lambda-b_{2n} & \cdots & a_{nn}\lambda-b_{nn} \end{vmatrix}=0, \tag{1.8}$$

$$a_{1k}\lambda_i \alpha_{1i}+\sum_{j=2}^{n}(a_{jk}\lambda_i-b_{jk})\,\alpha_{ji}=0, \tag{1.9}$$

$$\alpha_i=\sum_{j=2}^{n}\alpha_{ji} b_j \quad (i,\ k=1,\cdots, n).$$

$\lambda=0$ удовлетворяет уравнению (1.8), и мы можем принять $\lambda_1=0$, тогда α_{k1} $(k=2,\cdots, n)$ определяются из уравнений

$$\sum_{j=2}^{n} b_{ij}\alpha_{j1}=0 \quad (i=2,\cdots, n). \tag{1.10}$$

Предположим, что ранг матрицы $B=\|b_{ij}\|$, $r(B)=n-1$, т. е. имеется только одна циклическая координата. Это предположение необходимое, так как при $r(B)<n-1$ уравнение (1.8) будет иметь $n-r(B)$ нулевых корней. Но такие системы мы не рассматриваем [3], потому что они не могут быть вполне управляемыми одним управляющим воздействием.

Следовательно, из (1.9), (1.10) $\alpha_{k1}=0$ $(k=2,\cdots, n)$ $\alpha_{11}\neq 0$, так как в противном случае собственный вектор матрицы A^{0} был бы нулевым.

Таким образом, при $\alpha_{11}=1$, $x_1=\sum_{i=1}^{n} a_{1i} q_i$ — нормальная координата и $\alpha_1=b_1$.

Следовательно, задача 1.1 разрешима только тогда, когда $b_1 \neq 0$ [3].

Для разрешимости задачи 1.1 необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$b_1 \neq 0, \quad \alpha_i \neq 0, \quad \lambda_i \neq 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 2, \cdots, n, \ i \neq j). \tag{1.11}$$

При $r(B) = n - 1$ числа $\alpha_i (i = 2, \cdots, n)$ не зависят от b_1, следовательно, условия (1.11) выполняются только тогда, когда $b_k \neq 0$ хотя бы для одного $k (k = 2, \cdots, n)$. Т. е. система (1.4) не вполне управляема только по одной координате. Для управляемости системы необходимо, чтобы управляющее воздействие было приложено к первой и к какой-то другой координате системы (1.4). При выполнении условий (1.11) [4] решение задачи 1.1 приводится к решению системы алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля.

Если уравнения (1.1) отличаются от (1.4) лишь членами высшего порядка малости в окрестности $q_i = 0$, $u = 0$ равномерно по t и $\omega[q, q', u]$ в (1.6) определенно положительная, аналитическая функция, то подобная задача для системы (1.1) также разрешима [5—6] при условиях (1.11).

Система (1.4) [3, 7] не управляема также импульсным управлением.

§ 2. Обсудим вопрос о наблюдении системы (1.4).

Задача 2.1. Найти $2n \times 2$ матрицу $V(\nu)$ такую, что

$$\int_{t-\tau}^{t} V(\nu) \begin{Vmatrix} \xi(\nu) \\ u(\nu) \end{Vmatrix} d\nu = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_n'(t) \end{Vmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\xi(\nu) = \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i' + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad (\tau \leq \nu \leq 0).$$

Здесь $x_i(t)$, $u(t)$ являются решением системы (1.4), (1.5).

Пусть $c_i = 0$, $c_i' \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, что соответствует наблюдению системы по некоторой обобщенной скорости. Так как для системы (1.4) $\lambda_1 = 0$, то [3] система не наблюдаема по одной скорости.

Пусть $c_i' = 0$, $c_i \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, что соответствует наблюдению по некоторой обобщенной координате. При выполнении условий (1.11) система (1.4), (1.5) наблюдаема по величине $\xi = \sum d_i q_i$, если только

$d_1 \neq 0$ $c_1 \neq 0$ и хотя бы одно из чисел $d_k \neq 0$ $(k = 2, \cdots, n)$. Очевидно, что система (1.4), (1.5) не наблюдаема, если наблюдение ведется по одной координате. При выполнении указанных условий определение матрицы $V(\nu)$ приводится к решению алгебраических уравнений [8] с определителем, отличным от нуля. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Линейная система* (1.4), (1.5) *при наличии одной циклической координаты не наблюдаема по любой обобщенной скорости. Она при* (1.11) *наблюдаема по величине* $\sum d_i q_i$, *если* $d_1 \neq 0$ *и* $d_k \neq 0$ *хотя бы для одного* k $(k = 2, \cdots, n)$.

§ 3. Обсудим вопрос о стабилизации системы (1.1), когда управляющее воздействие u явно не входит в первое уравнение. Тогда система (1.1) не вполне управляема и не стабилизируема, так как она при этом допускает хотя бы один первый независимый от u интеграл вида

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = c. \tag{3.1}$$

Пусть линейное приближение данной системы имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \ddot{q}_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} q_j + b_i u, \qquad (i = 2, \cdots, n). \tag{3.2}$$

Напишем уравнения движения в канонических координатах [9]

$$\begin{gathered} \frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} q_j + b_i u \quad (i = 2, \cdots, n), \\ \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j \quad (i = 1, \cdots, n), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где матрица $C = \|c_{ij}\| = A^{-1} = \|a_{ij}\|^{-1}$.

Допустим, что система (3.3) при $u = 0$ допускает решение

$$p_1 = c = \text{const}, \quad p_i = f_i(t) \quad (i = 2, \cdots, n),$$
$$q_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Составим уравнения возмущенного движения при возмущении $p_i = f_i(t) + x_i$ $(i = 2, \cdots, n)$ $q_i(t) = \varphi_i(t) + y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ (p_1 не возмущается)

$$\begin{gathered} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} y_j + b_i u \quad (i = 2, \cdots, n), \\ \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} c_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Предположим, что система

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_j + b_i u,$$
$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=2}^{n} c_{ij}x_j \qquad (i=2,\cdots,n). \tag{3.5}$$

вполне управляема управляющим воздействием u. Если при этом минимизировать J (1.4), зависящий только от x_i, y_i $(i=2,\cdots,n)$, то при стабилизации движения $x_2=\cdots=x_n=y_2=\cdots=y_n=0$ u определится единственным образом [4]. y_1 определяется из $\frac{dy_1}{dt}=$ $=\sum_{j=2}^{n} c_{1j}x_j$, где x (t) — известные функции.

Так как система (3.5) вполне управляема и линейная, то при стабилизации [10] имеет место экспоненциальная устойчивость, следовательно, $y_1(t)$ при $t\to\infty$ будет стремиться к конечному пределу.

Если вполне управляемая система нелинейная, то при увеличении t $y_1(t)$ может неограниченно возрастать.

§ 4. Пример. Рассмотрим материальную точку массы 1, притягиваемую неподвижным центром 0 пропорционально n-ой степени расстояния

$$F=-\mu r^n, \quad \mu>0. \tag{4.1}$$

Пусть на точку, кроме силы F, действует управляющее воздействие u, находящееся в плоскости движения точки. (Известно, что траектория точки—плоская кривая).

Уравнения движения в полярных координатах r, φ будут

$$r''-r\varphi'^2=-\mu r^n+\alpha u \quad \frac{d}{dt}(r^2\varphi')=\beta u, \tag{4.2}$$

допускающие при $u=0$ частное решение

$$r=r_0, \quad r'=0, \quad \varphi'=\sqrt{\mu r_0^{n-1}}, \quad \varphi=\sqrt{\mu r_0^{n-1}}\,t. \tag{4.3}$$

Выясним, можно ли подобрать управляющее воздействие u так, чтобы движение (4.3) стало асимптотически устойчивым. Для этого запишем линейное приближение уравнений возмущенного движения при возмущении движения (4.3)

$$x_1'=x_2, \quad x_2'=-\frac{2\omega}{r_0}x_4+b_1u,$$

$$x_3'=x_4, \quad x_4'=2\omega r_0x_2+(1-n)\omega^2x_3+b_2u. \tag{4.4}$$

Здесь

$$b_1 = \frac{\beta}{r_0}, \quad b_2 = \alpha, \quad \omega^2 = \mu r_0^{n-1}.$$

Система (4.4) вполне управляема, если

$$\Delta = b_1^2 (n-1)\, \omega^4 \left[4 r_0^2 b_1 + (n+3)\, b_2^2\right] \neq 0. \tag{4.5}$$

Полярный угол φ при $u \equiv 0$ циклический, следовательно, во второе уравнение системы (4.4) x_1 явно не входит, т. е. $\lambda_1 = 0$ [3], поэтому при $b_1 = 0$ система (4.4) не вполне управляема.

Пусть $b_1 = 0$. Напишем (4.2) в канонических координатах

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= 0, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{p_1^2}{r^3} - \mu r^n + b_2 u, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{p_1}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= p_2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $p_1 = r^2 \dfrac{d\varphi}{dt}$, $p_2 = \dfrac{dr}{dt}$.

Система (4.6) при $u \equiv 0$ допускает решение

$$p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}, \quad p_2 = 0, \quad \varphi = \sqrt{\mu r_0^{n-1}}\, t, \quad r = r_0. \tag{4.7}$$

Составим линейное приближение уравнений возмущенного движения при возмущении

$$p_2 = x_1, \quad \varphi = \sqrt{\mu r_0^{n-1}}\, t + x_2, \quad r = r_0 + x_3,$$

(циклический импульс $p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}$ не возмущается)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(n+3)\, \omega^2 x_3 + b_2 u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{2\omega}{r_0} x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Система (4.8) вполне управляема при $\Delta = \dfrac{2\omega}{r_0} b_2^3 \neq 0$.

Это объясняется тем, что имеется гироскопическая сила [11].

Из (4.5) следует, что при $b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, $n \neq 1$ система (4.4) вполне управляема, а при $b_1 = 0$ всегда не вполне управляема. Это значит, что если управляющее воздействие u действует по радиальному направлению, то движение (4.7) можно стабилизировать, если всегда $p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}$.

Если же управляющее воздействие действует по направлению φ, то при известных условиях можно стабилизировать движение (4.3) системы (4.2), когда p_1 тоже возмущается.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 III 1965

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՄԵԿ ՑԻԿԼԻԿ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատության մեջ դիտարկվում է ցիկլիկ մեկ կոորդինատ ունեցող հոլոնոմ մեխանիկական սիստեմ: Քննարկվում են սիստեմի շարժման կայունացման և դիտելիության հարցերը, երբ կայունացնող և դիտվող մեծությունները սկալյար են:

Որպես ցուցադրական օրինակ դիտարկվում է կենտրոնական ազդեցության ենթարկվող նյութական կետի շարժման կայունացման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. Физматгиз, М., 1960.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1955.
3. *Габриелян М. С.* О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, **28**, вып. 3, 1964.
4. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, **22**, вып. 4, 1961.
5. *Альбрехт Э. Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, **25**, вып. 5, 1961.
6. *Альбрехт Э. Г.* К теории аналитического конструирования регуляторов. Тезисы докладов межвуз. конф. по устойчивости движения и аналитической механике, Изд. Казанск. авиац. ин-та, Казань, 1962.
7. *Красовский Н. Н.* К теории оптимального регулирования. ПММ, **22**, вып. 4, 1959.
8. *Красовский Н. Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, **27**, вып. 4, 1963.
9. *Аппель П.* Теоретическая механика, том II. Физматгиз, М., 1960.
10. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
11. *Габриелян М. С., Красовский Н. Н.* К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, **28**, вып. 5, 1964.