

Б. С. РАДОВСКИЙ

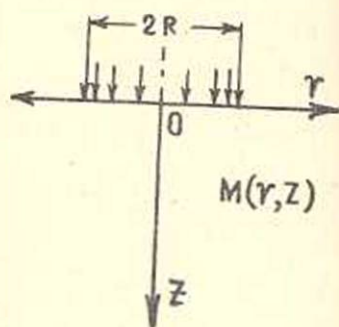
О НАПРЯЖЕНИЯХ В ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАГРУЗКЕ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПЛОЩАДИ КРУГА

В работах И. И. Кандаурова, Р. А. Муллера и других исследователей [1—5] успешно развивается статистическая теория напряженного и деформативного состояния зернистых сред, представляющих агрегат из бесконечного количества соприкасающихся твердых частиц произвольных размеров и формы. В статье [1] опубликован ряд решений для различных случаев загрузки массива.

В настоящей работе исследуется распределение напряжений в полупространстве, состоящем из зернистого материала, при нагрузке, равномерно распределенной по площади круга на поверхности (фиг. 1).

Поставленная задача представляет практический интерес при расчете оснований сооружений с круглой подошвой.

§ 1. Вертикальные нормальные напряжения в произвольной точке $M(r, z)$ полупространства могут быть определены путем интегрирования по площади круга решения И. И. Кандаурова [1] для сосредоточенной силы



Фиг. 1.

$$\sigma_z(r, z) = \frac{4pQ}{\pi z^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{4z}{z^2}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi)} \rho d\rho d\varphi, \quad (1.1)$$

где r, z — координаты рассматриваемой точки.

R — радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка интенсивности p .

Q — коэффициент распределительной способности среды.

Для точек, расположенных под центром штампа ($r = 0$), интеграл (1.1) значительно упрощается и может быть вычислен в элементарном виде [1]

$$\sigma_z(0, z) = p \left(1 - e^{-\frac{4QR^2}{z^2}} \right). \quad (1.2)$$

Однако, вследствие трудностей интегрирования (1.1), для произвольной точки массива отсутствует выражение для определения напряжений.

Р. А. Муллер, исходя из математической аналогии между процессом распределения вертикальных нормальных напряжений в зернистой среде и процессом блуждания броуновской частицы [3], показал, что распределение вертикальных нормальных напряжений описывается дифференциальным уравнением параболического типа. Это уравнение для осесимметричной задачи в цилиндрических координатах имеет вид [5]

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \xi z \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \right), \quad (1.3)$$

где ξ — коэффициент бокового давления, определяемый при лабораторных испытаниях материала и связанный с коэффициентом распределительной способности

$$\xi = \frac{1}{8\Omega}. \quad (1.4)$$

Чтобы получить выражение $\sigma_z(r, z)$ для произвольной точки массива, проинтегрируем уравнение (1.3). Для приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений параболического типа заменим переменную по формуле $u = \frac{z^2}{2}$. Тогда получим

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial u} = \xi \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \right). \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) подлежит решению при следующих условиях, определяемых внешней нагрузкой

$$\sigma_z|_{u=0} = f(r) = \begin{cases} p & \text{при } 0 < r < R, \\ 0 & \text{при } r > R, \end{cases} \quad (1.6)$$

а также при условии

$$\sigma_z|_{r \rightarrow \infty} \neq \infty. \quad (1.7)$$

Роль краевого играет также условие

$$\sigma_z \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Для решения уравнения (1.5) применяем преобразование Лапласа

$$F(r, s) = \int_0^\infty \sigma_z(r, u) e^{-su} du.$$

Преобразованное уравнение (1.5) имеет вид

$$\frac{d^2 F(r, s)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r, s)}{dr} - \frac{s}{\xi} \left[F(r, s) - \frac{f(r)}{s} \right] = 0$$

и представляет модифицированное уравнение Бесселя. Его общее решение

$$F(r, s) - \frac{f(r)}{s} = A I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right) + B K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right), \quad (1.9)$$

где $I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right)$ и $K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от чисто мнимого аргумента,

A и B — постоянные.

Определяя постоянные из условия (1.6) и преобразованных условий (1.7) и (1.8) с учетом некоторых соотношений, известных из теории бесселевых функций [6], получим лапласово изображение искомой функции $\sigma_z(r, z)$:

при $0 \leq r < R$

$$F(r, s) = \frac{P}{s} \left[1 - R \sqrt{\frac{s}{\xi}} I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right) \cdot K_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} R \right) \right], \quad (1.10)$$

при $r > R$

$$F(r, s) = \frac{P}{s} R \sqrt{\frac{s}{\xi}} I_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} R \right) \cdot K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right), \quad (1.11)$$

где $I_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} R \right)$ и $K_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} R \right)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода первого порядка от чисто мнимого аргумента.

Оригинал полученного изображения отсутствует в каталогах; поэтому для обратного преобразования используем общую формулу обращения Меллина

$$\sigma_z(r, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{su} F(r, s) ds.$$

Имеем

$$\sigma_z(r, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{P}{s} \left[1 - R \sqrt{\frac{s}{\xi}} I_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} r \right) \cdot K_1 \left(\sqrt{\frac{s}{\xi}} R \right) \right] e^{su} du. \quad (1.12)$$

В соответствии с правилами операционного исчисления [7, 8] заменим путь интегрирования в комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси, замкнутым контуром, имеющим разрез вдоль всей отрицательной части вещественной оси; тогда получим

$$\sigma_z(r, u) = \frac{pR}{2\xi} \int_0^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}\right) J_1\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}\right) \frac{e^{-\rho u}}{\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}} d\rho$$

или

$$\sigma_z(r, u) = pR \int_0^\infty J_0(rx) J_1(Rx) e^{-\xi u x^2} dx, \quad (1.13)$$

где $J_0(rx)$ и $J_1(Rx)$ — функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядка.

При $r=0$ имеем

$$\sigma_z(0, u) = pR \int_0^\infty J_1(Rx) e^{-\xi u x^2} dx.$$

Так как непосредственно вычислить последний интеграл затруднительно, дифференцируя, получим

$$\frac{d\sigma_z(0, u)}{du} = -pR\xi \int_0^\infty J_1(Rx) e^{-\xi u x^2} x^2 dx. \quad (1.14)$$

Правая часть (1.14) содержит первый экспоненциальный интеграл Вебера, выражающийся через соответствующую экспоненциальную функцию [6]. Подставив эту функцию в (1.14), получим после интегрирования

$$\sigma_z(0, u) = p \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\xi u}} \right). \quad (1.15)$$

Возвращаясь в выражениях (1.13) и (1.15) к переменной z по формуле $u = \frac{z^2}{2}$, получим искомую формулу для определения вертикальных нормальных напряжений в произвольной точке массива

$$\sigma_z(r, z) = pR \int_0^\infty J_0(rx) J_1(Rx) e^{-\frac{\xi z^2 x^2}{2}} dx, \quad (1.16)$$

для точек, принадлежащих оси симметрии,

$$\sigma_z(0, z) = p \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2\xi z^2}} \right). \quad (1.17)$$

Последняя формула совпадает с выражением (1.2), полученным И. И. Кандауровым, если учесть (1.4).

По формуле (1.16) построены изолинии вертикальных нормальных напряжений (фиг. 2). При вычислениях принималось $\xi = \frac{1}{3}$.

Можно показать, что выражение для вертикальных нормальных напряжений, предложенное К. С. Теренецким [9] и имеющее хорошую сходимость с экспериментальными данными различных исследователей при $z > R$ [10], с достаточно высокой точностью аппроксимирует решение (1.16) при том же условии. Это обстоятельство указывает, что решение (1.16) хорошо согласуется с экспериментальными данными.

§ 2. Используя полученное выражение (1.16), можно найти формулы для остальных компонентов напряжений путем дифференцирования и элементарных операций.

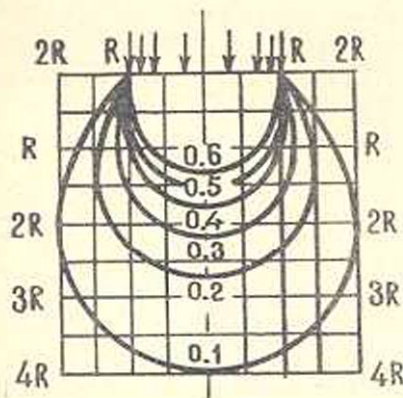
Так, согласно [5], для касательного напряжения имеем

$$\tau_{rz} = -\xi z \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \quad (2.1)$$

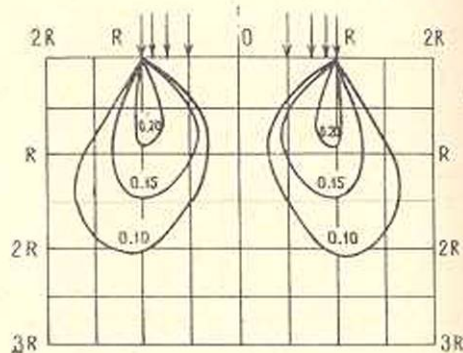
Дифференцируя (1.16) и подставляя результат в (2.1), получим

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{pR}{z} e^{-\frac{R^2+r^2}{2\xi z^2}} I_1\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right) \quad (2.2)$$

причем для точек, лежащих на оси давления, $\tau_{rz}(0, z) = 0$. По формуле (2.2) построены изолинии касательных напряжений (фиг. 3).



Фиг. 2. Линии равных напряжений σ_z .



Фиг. 3. Линии равных напряжений τ_{rz} .

Приводим выражения для определения остальных компонентов напряжений, полученные аналогично (2.2). Для произвольной точки массива

$$\sigma_{\theta}(r, z) = \xi \sigma_z - \frac{\xi z}{r} \tau_{rz} \quad (2.3)$$

$$\sigma_r(r, z) = \xi \sigma_z - \frac{pR}{z^2} e^{-\frac{R^2+r^2}{2\xi z^2}} \left[R I_0\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right) - \left(r + \frac{\xi z^2}{r}\right) \cdot I_1\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right) \right] \quad (2.4)$$

Для точек, лежащих под центром штампа,

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_z(0, z) = \frac{pR^2}{2z^2} e^{-\frac{R^2}{2z^2}}. \quad (2.5)$$

Следует отметить, что выражение (2.4) позволяет вычислить величину σ_0 при нагрузке, распределенной по площади круга, в то время, как непосредственное интегрирование по площади круга решения И. И. Кандаурова для сосредоточенной силы не приводит к искомому результату, поскольку при действии сосредоточенной силы $\sigma_0 = 0$.

Осуществление расчетов по формуле (1.16), в отличие от (1.1), не требует большого вычислительного труда, т. к. в выражении (1.16) подинтегральная функция быстро затухает. Таким образом, σ_z можно вычислить при помощи однократного численного интегрирования, а остальные компоненты напряженного состояния могут быть рассчитаны по формулам (2.2—2.5) без вычисления квадратур.

Ленинградский филиал
Всесоюзного государственного дорожного
научно-исследовательского института
(Совюздорнии)

Поступила 10.XII.1964

Р. В. РАУТОВИЧ

ՀԱՅԿԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ԵՐՔ ԲԵՌՆՎԱՅՔԸ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԲԱՇԵՎԱՅ Է ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐՆՍՈՎ

Ա. Վ. Փ. Ն. Փ. Ն. Վ.

Դիտարկված է հատիկավոր նյութից կազմված կիրառականության լարվածային վիճակի մակերևույթի վրա շրջանի մակերևույթ հավասարաչափ լարված բնակվածքի դեպքում: Օգտվելով լարումների բաշխման ստատիստիկական տեսությունից, գտնված են կիրառականության կաճախական կետի լարվածային վիճակի բոլոր կոմպոնենտները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кандауров И. И. О распределении напряжений в зернистых (грунтовых) средах. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, 6, 1960.
2. Кандауров И. И. К теории распределения напряжений в зернистом грунтовом основании. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1960.
3. Муллер Р. А. К статистической теории распределения напряжений в зернистом грунтовом основании. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1962.
4. Муллер Р. А. О деформативном состоянии зернистой грунтовой среды. Труды ВНИМИ, сб. I, Л., 1963.
5. Муллер Р. А. Некоторые задачи статистической механики грунтов и горных пород. Труды конференции „Математические методы в горном деле“, Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1963.
6. Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 6.

6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., 1949.
7. *Карлслюу Х. и Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.
8. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М., Л., 1950.
9. *Теренецкий К. С., Гусев В. Н., Радовский Б. С.* Полевые методы оценки прочности дорожных одежд. Труды КАДИ, вып. 8, 1962.
10. *Радовский Б. С.* Математическое описание закона распределения напряжения по дорожной одежде. Сборник научных работ студентов КАДИ, вып. 3, 1962.