

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. МОВСИСЯН

О КОЛЕБАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Вопросу колебания упругой струны (шахтный подъемный канат) посвящены работы [1—4] и др., где исследуется движение струны при различных законах изменения ее длины. В нашей работе [5] рассматривались колебания балки с периодически изменяющейся длиной отличным от [1—4] методом.

В настоящей работе даются решения задач колебания балки, когда первоначальная длина балки с постоянной скоростью укорачивается, и устойчивости балки, когда длина ее периодически изменяется.

§ 1. Колебания балки с линейно укорачивающейся длиной

Пусть имеется балка с первоначальной длиной l и с постоянной жесткостью на изгиб, которая приводится в движение вследствие начального отклонения и начальной скорости, сообщаемых ей в момент $t = 0$. Принимается, что одна из опор балки неподвижна ($x = l$), а вторая с постоянной скоростью c движется в сторону первой, не создавая при этом сжимающих напряжений.

Исследуется поведение части балки, находящейся между опорами, в предположении, что скорость движения опоры мала по сравнению со скоростью распространения продольных упругих волн на протяжении.

Нетрудно видеть, что уравнение движения элемента балки, а также начальные условия будут обычными

$$a^2 r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x),$$

где $a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ — скорость распространения продольных волн,

$r = \sqrt{\frac{I}{F}}$ — радиус инерции поперечного сечения балки.

Краевые условия будут*

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = ct \quad \text{и} \quad x = l. \quad (1.2)$$

Введя безразмерные координаты

$$y = \frac{x}{l} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{a}{l} t, \quad (1.3)$$

уравнение движения (1.1) мы приводим к виду

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1.4)$$

где $\lambda = \frac{r}{l}$ — величина, обратная гибкости балки.

Переход к новому переменному

$$z = \frac{y - 1}{\mu\tau - 1}, \quad (1.5)$$

где $\mu = \frac{c}{a}$, приводит к уравнению движения

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (\mu\tau - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2\mu z (\mu\tau - 1)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \tau} + \\ + \mu^2 z^2 (\mu\tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\mu^2 z (\mu\tau - 1) \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые и начальные условия при этом будут

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1, \quad (1.7)$$

$$w(z, 0) = f(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(z) - \mu z \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z}. \quad (1.8)$$

По предположению, коэффициент μ [из (1.5)] меньше единицы, поэтому решение (1.6) с условиями (1.7) и (1.8) представляется в виде ряда по степеням μ

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(z, \tau). \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.6)–(1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , будем иметь

* Для конкретности рассматривается случай шарнирно-опертой балки. Опора движется, прогиб при этом остается равным нулю, однако на этой опоре возникает изгибающий момент-влияние части балки, находящейся между $x=0$ и $x=ct$. Введением новой функции можно на $x=ct$ получить однородные условия (1.2), при этом уравнение движения будет иметь правую часть. Найти частное решение такого уравнения нетрудно, поэтому для краткости приняты однородные условия (1.2).

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = 0, \\
& \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = 4\tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \tau}, \\
& \dots \dots \dots \\
& \lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \tau^2} = 4\tau \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial \tau^2} - 6z^2 \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial \tau^2} + \\
& + 4z^3 \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial \tau^2} - z^4 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial \tau^2} - 2z \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial z \partial \tau} + 6z\tau \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial z \partial \tau} - \\
& - 6z\tau^2 \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial z \partial \tau} + 2z^2 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial z \partial \tau} - z^2 \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial z^2} + 2z^2 \tau \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial z^2} - \\
& - z^2 \tau^2 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} + 4z\tau \frac{\partial w_{k-3}}{\partial z} - 2z\tau^2 \frac{\partial w_{k-4}}{\partial z};
\end{aligned} \quad (1.10)$$

$$w_k = \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z=0 \text{ и } z=1, \quad (1.11)$$

$$w_0(z, 0) = f(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(z), \quad (1.12)$$

$$w_k(z, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_k(z, 0)}{\partial \tau} = -z \frac{\partial w_{k-1}(z, 0)}{\partial z}.$$

При этом, как и следовало ожидать, нулевое приближение соответствует колебанию свободно опертой балки с первоначальной длиной l с начальными условиями (1.1). Оно будет иметь вид

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n \tau + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau \right) \sin n\pi z, \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned}
a_n &= 2 \int_0^1 f(z) \sin n\pi z dz, \\
b_n &= \frac{2l}{a} \int_0^1 \varphi(z) \sin n\pi z dz.
\end{aligned} \quad (1.14)$$

Подстановка (1.13) в правую часть второго уравнения (1.10)

даст

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} &= -4\tau \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (b_n \sin \omega_n \tau + a_n \omega_n \cos \omega_n \tau) \sin n\pi z - \\
&- 2z \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (b_n \cos \omega_n \tau - a_n \omega_n \sin \omega_n \tau) \cos n\pi z.
\end{aligned} \quad (1.15)$$

Решение (1.15) ищем в виде

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi z, \quad (1.16)$$

которое заранее удовлетворяет краевым условиям. При этом для неизвестных $f_m(\tau)$ получается

$$f_m''(\tau) + \omega_m^2 f_m(\tau) = \left(\frac{b_m}{m\pi} - 4a_m \omega_m^2 \tau \right) \cos \omega_m \tau - \left(\frac{a_m \omega_m}{m\pi} + 4b_m \omega_m \tau \right) \sin \omega_m \tau + 4 \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{(m^2 - n^2)} (b_n \cos \omega_n \tau - a_n \omega_n \sin \omega_n \tau). \quad (1.17)$$

Решение (1.17) будет

$$f_m(\tau) = C_{1m} \cos \omega_m \tau + C_{2m} \sin \omega_m \tau - a_m \omega_m \tau^2 \sin \omega_m \tau + b_m \tau^2 \cos \omega_m \tau + \frac{b_m}{\omega_m} \left(\frac{1}{2m\pi} - 1 \right) \tau \sin \omega_m \tau + a_m \left(\frac{1}{2m\pi} - 1 \right) \tau \cos \omega_m \tau + 4 \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{(m^2 - n^2)(\omega_m^2 - \omega_n^2)} (b_n \cos \omega_n \tau - a_n \omega_n \sin \omega_n \tau). \quad (1.18)$$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{2m} определяются из еще неиспользованных начальных условий, которые приводят к следующим уравнениям

$$C_{2m} + 4 \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn b_n}{(m^2 - n^2)(\omega_m^2 - \omega_n^2)} = 0, \quad (1.19)$$

$$C_{1m} + a_m \left(\frac{1}{2m\pi} - 1 \right) - 4 \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn a_n \omega_n^2}{(m^2 - n^2)(\omega_m^2 - \omega_n^2)} =$$

$$= -\frac{a_m}{4} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn a_n}{m^2 - n^2}.$$

Аналогичным образом строится второе приближение и т. д.

Для очень малых λ первые два найденных члена достаточно точно будут описывать процесс колебания.

В заключение следует отметить, что подобным же образом можно было рассмотреть случай, когда опоры балки отодвигаются друг от друга с постоянной скоростью.

§ 2. Динамическая устойчивость балки с периодически изменяющейся длиной

Здесь предполагается, что в продольном направлении балки действует постоянная по длине балки сила P , одна из опор неподвижна, а вторая совершает гармонические колебания в продольном направлении, т. е. имеются следующие краевые условия:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = A \sin \alpha t \quad \text{и} \quad x = l, \quad (2.1)$$

где A — амплитуда, а α — частота колебаний продольно движущейся опоры. Предполагается, что A во много раз меньше, чем первоначальная длина балки l .

Уравнение движения и начальные условия при этом в переменных y, τ (1.3) будут

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0^*, \quad (2.2)$$

$$w(y, 0) = f(y), \quad \frac{\partial w(y, 0)}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(y). \quad (2.3)$$

$$\text{где } \sigma = \frac{P}{F}$$

Нашей задачей является определение значений P и α , при которых балка теряет устойчивость, т. е. возникнут бесконечные прогибы.

Введя вместо y новое переменное z

$$z = \frac{y - 1}{\mu \sin \beta \tau - 1}, \quad (2.4)$$

$$\mu = \frac{A}{l}, \quad \beta = \frac{\alpha l}{a}. \quad (2.5)$$

Преобразуем уравнения (2.1)–(2.3) к виду

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1; \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E} (\mu \sin \beta \tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\mu \sin \beta \tau - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2\mu \beta \tau \cos \beta \tau (\mu \sin \beta \tau - \\ & - 1)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \tau} + \mu^2 \beta^2 \tau^2 \cos^2 \beta \tau (\mu \sin \beta \tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \beta^2 \tau (\mu - \sin \beta \tau + \\ & + \mu \cos^2 \beta \tau) (\mu \sin \beta \tau - 1)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

* В работе [5] исследуется (2.2) без второго члена.

$$w(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z} = \frac{l}{a} \varphi(z) - \mu \beta z \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z}. \quad (2.8)$$

По предположению параметр μ из (2.5) меньше единицы, поэтому решение уравнения (2.7) с условиями (2.6) и (2.8) представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(z, \tau). \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получим

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E} \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} &= \frac{2\sigma}{E} \sin \beta \tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \\ + 4 \sin \beta \tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - 2\beta z \cos \beta \tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \tau} &+ \beta^2 z \sin \beta \tau \frac{\partial w_0}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

Краевые условия для системы (2.10) ничем не отличаются по виду от (1.11). Остаются без изменения и начальные условия нулевого приближения. Единственное изменение претерпевает последнее условие (1.12), вместо z в правой части как множитель должно стоять βz .

Система (2.10) решается последовательно, как в § 1.

Для нулевого приближения имеется следующее решение

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n \tau + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau \right) \sin n\pi z, \quad (2.11)$$

где a_n и b_n выражаются формулами вида (1.14), а

$$\omega_n^2 = \lambda^2 n^4 \pi^4 - \frac{\sigma}{E} n^2 \pi^2. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в правую часть второго уравнения (2.10), будем искать его решение в виде

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi z. \quad (2.13)$$

Для определения неизвестных $f_m(\tau)$ приходим к следующему уравнению

$$\begin{aligned} f_m''(\tau) + \omega_m^2 f_m(\tau) &= - \left(\frac{2\sigma}{E} m^2 \pi^2 + 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) a_m \sin \beta \tau \cos \omega_m \tau - \\ - \left(\frac{2\sigma}{E} \frac{m^2 \pi^2}{\omega_m} + 4\omega_m + \frac{\beta^2}{2\omega_m} \right) b_m \sin \beta \tau \sin \omega_m \tau &+ \beta b_m \cos \beta \tau \cos \omega_m \tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta a_m \omega_m \cos \beta \tau \sin \omega_m \tau + 2\beta \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2 - m^2} \left[\beta a_n \sin \beta \tau \cos \omega_n \tau + \right. \\
& \left. + \frac{b_n \beta}{\omega_n} \sin \beta \tau \sin \omega_n \tau + 2a_n \omega_n \cos \beta \tau \sin \omega_n \tau - 2b_n \cos \beta \tau \cos \omega_n \tau \right]. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (2.14) будет

$$\begin{aligned}
f_m(\tau) = & C_{1m} \cos \omega_m \tau + C_{2m} \sin \omega_m \tau - M_m \cos (\beta + \omega_m) \tau + \\
& + P_m \sin (\beta + \omega_m) \tau + N_m \cos (\beta - \omega_m) \tau + Q_m \sin (\beta - \omega_m) \tau + \\
& + \beta \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2 - m^2} [-M_n \cos (\beta + \omega_n) \tau + P_n \sin (\beta + \omega_n) \tau + \\
& + N_n \cos (\beta - \omega_n) \tau + Q_n \sin (\beta - \omega_n) \tau], \quad (2.15)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_m &= \frac{b_m \left(\Omega_m^{(1)} + \frac{2\sigma}{E} m^2 \pi^2 \omega_m \right)}{2\beta \omega_m (\beta + 2\omega_m)}, & P_m &= \frac{a_m \left(\Omega_m^{(1)} + \frac{2\sigma}{E} m^2 \pi^2 \right)}{2\beta (\beta + 2\omega_m)}, \\
N_m &= \frac{b_m \left(\Omega_m^{(2)} + \frac{2\sigma}{E} m^2 \pi^2 \right)}{2\beta \omega_m (\beta - 2\omega_m)}, & Q_m &= \frac{a_m \left(\Omega_m^{(2)} + \frac{2\sigma}{E} m^2 \pi^2 \right)}{2\beta (\beta - 2\omega_m)}, \\
M_n &= \frac{b_n (\beta + 2\omega_n)}{\omega_n [\omega_m^2 - (\beta + \omega_n)^2]}, & P_n &= \frac{a_n (\beta + 2\omega_n)}{\omega_n^2 - (\beta + \omega_n)^2}, \\
N_n &= \frac{b_n (\beta - 2\omega_n)}{\omega_n [\omega_m^2 - (\beta - \omega_n)^2]}, & Q_n &= \frac{a_n (\beta - 2\omega_n)}{\omega_n^2 - (\beta - \omega_n)^2}, \\
\Omega_m^{(1)} &= 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} + \beta \omega_m, & \Omega_m^{(2)} &= 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} - \beta \omega_m.
\end{aligned} \quad (2.16)$$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{2m} находятся из начальных условий

$$w_1(z, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial \tau} = -\beta z \frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial z}, \quad (2.17)$$

которые дают

$$\begin{aligned}
C_{1m} - M_m + N_m + \beta \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2 - m^2} [-M_n + N_n] &= 0, \\
\omega_m C_{2m} + (\beta + \omega_m) P_m + (\beta - \omega_m) Q_m - \beta \sum_{\substack{n=1 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2 - m^2} [(\beta + \omega_n) P_n +
\end{aligned}$$

$$+ (\beta - \omega_n) Q_n] = \frac{\rho a_m}{2} + 2\beta \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} a_n. \quad (2.18)$$

Довольствуясь первыми двумя членами ряда (2.9), можно судить об устойчивости рассматриваемой балки. Заметим, во-первых, что при нулевом приближении, как видно из (2.11) и (2.12), влияние продольно движущейся опоры не входит в выражение прогиба и балка теряет устойчивость при силе, равной эйлеровой критической.

Как видно из (2.13), (2.15) и (2.16), при определенных значениях β , ω_m и ω_n прогибы балки неограниченно возрастают. Рассматриваемая задача по характеру похожа на задачу о параметрических колебаниях балки [6] и, по-видимому, здесь также должны существовать сплошные зоны собственных значений, при которых балка теряет устойчивость. При полученном приближении возможные значения β и ω , при которых балка теряет устойчивость, следующие

$$\beta = \omega_m \pm \omega_n \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

Условие (2.19) в раскрытом виде будет

$$\alpha = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EgI}{\gamma F}} \left[m^2 \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{EI m^2 \pi^2}} \pm n^2 \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{EI n^2 \pi^2}} \right]. \quad (2.20)$$

Из (2.20), в частности, при $m = n = 1$ для положительного знака скобки получается такая зависимость между α и P , которая соответствует главному параметрическому резонансу.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 III 1965

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հողվածում դիտարկված են երկու խնդիր՝ ա) հեծանի տատանումները, երբ նրա երկարությունը կարճանում է ժամանակի ղծային օրենքով, և բ) հեծանի կայունությունը, երբ նրա մի հենարանը կատարում է հարմոնիկ տատանումներ երկայնական ուղղությամբ: Առաջին դեպքում ենթադրվում է, որ շարժվող եզրի արագությունը փոքր է առաձգական ալիքի տարածման արագությունից, իսկ երկրորդ դեպքում՝ որ եզրի տատանման ամպլիտուդը փոքր է հեծանի նախնական երկարությունից: Երկու դեպքում էլ խնդիրների լուծումը ներկայացված է շարքերի տեսքով ըստ փոքր պարամետրերի աստիճանների: Ստացված է հեծանի կայունությունը կորցնելու (2. 20) պայմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Савин Г. Н. Динамическая теория расчета шахтных подъемных канатов. Изд. АН УССР, 1949.
2. Савин Г. М., Постольник Ю. С., Шевело В. М. Про рівняння динаміки пружної або пружко-в'язкої нитки змінної довжини. Прикладна механіка, т. 1, в. 1, 1955.
3. Савин Г. Н. и Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Изд. АН УССР, 1962.
4. Горошко О. О. і Красильников К. В. Поперечні коливання струни (каната) змінної довжини. ДАН УРСР, № 3, 1964.
5. Мовисли Л. А. Колебания балки с периодически изменяющейся длиной. ДАН АрмССР, 41, № 1, 1965.
6. Бодотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.