

В. В. ЕГАНЯН

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КРУГЛЫМИ
 ОТВЕРСТИЯМИ, ВДОЛЬ КОТОРЫХ ДЕЙСТВУЮТ ЗАДАННЫЕ
 УСИЛИЯ

В данной статье рассматривается напряженное состояние бесконечной плоскости, ослабленной двумя круглыми отверстиями (фиг. 1), когда на контурах отверстий нагрузки произвольны, а на бесконечности нагрузка отсутствует:

$$\sigma_i|_{x \rightarrow \pm \infty} = \sigma_i(\beta), \quad \tau_{\alpha\beta}|_{x \rightarrow \pm \infty} = \tau_i(\beta) \quad (1)$$

$$(i = 1, 2; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \gamma).$$

Для решения задачи воспользуемся системой биполярных координат (α, β) .

В этих же координатах Я. С. Уфляндом рассмотрена общая задача о растяжении бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями, когда контуры отверстий свободны от усилий, т. е. выполняются условия [1]:

$$\sigma_\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \sigma_\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = 0$$

$$(i = 1, 2; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \gamma).$$

Предположим, что внешние нагрузки статически уравновешиваются на каждом из контуров $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.

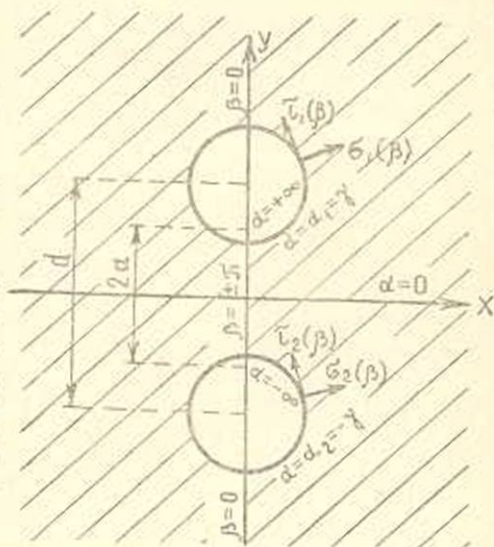
Кроме этого полагаем, что $\sigma_i(\beta)$, $\tau_i(\beta)$ и производные функции $\sigma_i(\beta)$ интегрируемы в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Общие формулы напряжений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\sigma_\alpha = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\text{sh } \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\text{ch } \alpha}{a} \right] (g\Phi),$$

$$\sigma_\beta = \left[g \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\text{sh } \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi),$$

(2)



Фиг. 1.

$$\tau_{\alpha\beta} = -g \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi),$$

где

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{a}. \quad (3)$$

Функция $g\Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения, т. е. $g\Phi$, при условиях (1) разыскиваем аналогично Я. С. Уфлянду

$$g\Phi = a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) I + C_0 (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \ln (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + \\ + a B_0 \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} [f_1(n, \alpha) \cos n\beta + f_2(n, \alpha) \sin n\beta], \quad (4)$$

где

$$f_j(n, \alpha) = A_j(n) \operatorname{ch} (n+1)\alpha + B_j(n) \operatorname{ch} (n-1)\alpha + \\ + C_j(n) \operatorname{sh} (n+1)\alpha + D_j(n) \operatorname{sh} (n-1)\alpha \quad (j=1, 2; n \geq 2), \quad (5)$$

$$f_j(1, \alpha) = A_j(1) \operatorname{ch} 2\alpha + C_j(1) \operatorname{sh} 2\alpha \quad (j=1, 2). \quad (6)$$

Однако, при этом функция $g\Phi$ не должна изменять напряженное состояние на бесконечности, т. е. должно выполняться условие

$$(g\Phi)_{\alpha \rightarrow \infty} = (g\Phi)_{\beta \rightarrow 0} = 0. \quad (7)$$

Обратимся к граничным условиям (1), которые с учетом (2), (3) и (4) можно записать в виде

$$\left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = \\ = a \alpha_i (\beta) + \operatorname{sh} \alpha_i (\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta) I - a B_0 + C_0 (\operatorname{sh}^2 \alpha_i + \cos^2 \beta - \operatorname{ch} \alpha_i \cos \beta), \quad (8) \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = - \frac{a \alpha_i (\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{C_0 \sin \beta \operatorname{sh} \alpha_i}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - I \cdot \sin \beta, \\ (i=1, 2),$$

где

$$g\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [f_1(n, \alpha) \cos n\beta + f_2(n, \alpha) \sin n\beta]. \quad (9)$$

Так как функция $g\Phi_0$ представлена в виде ряда Фурье, то левая часть второго условия (8) будет представлять собой некоторые ряды Фурье. Однако, первое условие (8) непосредственно не представляет собой ряда Фурье, так как перед знаками рядов имеются функции от переменной β . С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду, дифференцируем первое условие (8) по β .

С учетом второго условия (8) получим

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial}{\partial \beta}\right)(\partial \Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = \frac{a z'_i(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{a z_i(\beta) \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} + C_0 \left[\sin \beta - \frac{\sin \beta \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{\sin \beta \operatorname{sh}^2 \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \right] \quad (10)$$

Из второго условия (8) и из (10) с учетом (9) находим

$$\begin{aligned} f_1(n, \alpha_i) &= K_{1,i}(n), & f'_1(n, \alpha_i) &= K_{3,i}(n), \\ f_2(n, \alpha_i) &= K_{2,i}(n), & f'_2(n, \alpha_i) &= K_{4,i}(n), \end{aligned} \quad (11)$$

($i = 1, 2; n \geq 2$)

$$f'_i(1, \alpha_i) = I + K_{3,i}(1) \quad f'_i(1, \alpha_i) = K_{4,i}(1) \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

$$K_{1,i}(n) =$$

$$= \frac{a}{\pi n(n^2 - 1)} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{z'_i(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{z_i \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \right] \sin n \beta d\beta - C_0 (H_1 + H_2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i) \right]$$

$$K_{2,i}(n) = -\frac{a}{\pi n(n^2 - 1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{z'_i(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{z_i \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \right] \cos n \beta d\beta, \quad (n \geq 2)$$

$$K_{3,i}(n) = \frac{a}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z_i(\beta) \sin n \beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta + \frac{a C_0}{\pi n} \operatorname{sh} \alpha_i H_1, \quad (13)$$

$$K_{4,i}(n) = -\frac{a}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z_i(\beta) \cos n \beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta \quad (n \geq 1).$$

$$H_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \beta \cos \beta \sin n \beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-2)\beta - \cos(n+2)\beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta,$$

$$H_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \beta \sin n \beta}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} d\beta = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_i} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

$$H_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \beta \sin n \beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)\beta - \cos(n+1)\beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta.$$

Из таблиц интегралов [6] находим

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos m \beta d\beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \alpha_i} (\operatorname{ch} \alpha_i - \operatorname{sh} \alpha_i)^m.$$

откуда, при $m = n - 2$; $n - 1$; $n + 1$; $n + 2$ вычисляются значения интегралов H_1 , H_2 и H_3 .

Из (15) находим коэффициенты $A_i(n)$, $B_i(n)$, $C_i(n)$ и $D_i(n)$ (при $n \geq 2$), выраженные через C_0 , а из (16) находим $A_1(1)$, $C_1(1)$, $A_2(1)$ и $C_2(1)$, выраженные через I и C_0 . Остается определить коэффициенты C_0 , B_0 и I .

Для их определения требуем, чтобы удовлетворялось условие (7), а также первое условие (8).

Из условия (7) с помощью (4) получим следующее равенство:

$$aB_0 + A_1(1) + \sum_{n=2}^{\infty} [A_1(n) + B_1(n)] = 0. \quad (14)$$

Так как первое условие (8) имеет место для всех β ($-\pi \leq \beta \leq \pi$), то умножая обе части на $d\beta$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, с учетом (9), (11) и (12) получим

$$2aB_0 - I \operatorname{sh} 2\alpha_i - (1 + 2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i) C_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_i(\beta) d\beta \quad (i = 1, 2). \quad (15)$$

Из (18) и (19) находим C_0 , B_0 и I .

Таким образом, при данной внешней нагрузке находятся все коэффициенты $g\Phi$, т. е. поставленная задача полностью решена.

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки, когда на контурах отверстий приложены экспоненциально изменяющиеся нормальные нагрузки, симметричные относительно координат x и β (фиг. 2):

$$\begin{aligned} \tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = & -Q_1 (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta)^2 (\cos \beta_0 - \cos \beta) e^{-k\beta} \\ & \text{при } 0 \leq \beta \leq \beta_0, \\ \tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = & Q_2 (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta)^2 (\cos \beta_0 - \cos \beta) e^{-k(\pi-\beta)} \\ & \text{при } \beta_0 \leq \beta \leq \pi, \end{aligned} \quad (16)$$

Фиг. 2.

$$\tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = 0 \text{ при } -\pi \leq \beta \leq \pi,$$

где k — положительное число, Q_1 и Q_2 — параметры, связь между которыми получается с помощью уравнений статки, а

$$\beta_0 = \arctg \operatorname{sh} \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad r = \frac{a}{\operatorname{sh} \gamma}. \quad (17)$$

Из (16) видно, что такой выбор нагрузки не только облегчает вычисление интегралов (13), но дает возможность совершить предельный переход к сосредоточенной силе (когда $k \rightarrow \infty$).

При таком выборе нагрузки следует брать

$$f_2(n, \alpha) = C_1(n) = D_1(n) = 0 \quad (n \geq 1), \quad (18)$$

$$I = 0.$$

Тогда в этом случае с помощью (5), (6), (11), (12) и (18) получим следующую систему уравнений:

$$A_1(n) \operatorname{ch}(n+1)\gamma + B_1(n) \operatorname{ch}(n-1)\gamma = K_{1,1}(n), \quad (n \geq 2)$$

$$(n+1)A_1(n) \operatorname{sh}(n+1)\gamma + (n-1)B_1(n) \operatorname{sh}(n-1)\gamma = K_{3,1}(n) \quad (19)$$

$$2A_1(1) \operatorname{sh} 2\gamma = K_{3,1}(1) \quad (20)$$

где

$$K_{1,1}(n) = \frac{2a}{\pi n(n^2-1)} \int_0^\pi \frac{\sigma_1(\beta) \sin n\beta}{\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta} d\beta - \frac{aC_0(H_1 + H_2 \operatorname{sh}^2 \gamma)}{\pi n(n^2-1)} \quad (n \geq 2), \quad (21)$$

$$K_{3,1}(n) = \frac{aC_0 H_3 \operatorname{sh} \gamma}{\pi n} \quad (n \geq 1).$$

Решая систему (19) и (20), находим $A_1(n)$, $B_1(n)$ (при $n \geq 2$) и $A_1(1)$, выраженные через C_0 .

Вид уравнений (14) в этом случае не изменяется, а уравнение (15) принимает вид:

$$2aB_0 - (1 + 2 \operatorname{sh} 2\gamma) C_0 + 2A_1(1) \operatorname{ch} 2\gamma = \frac{2a}{\pi} \int_0^\pi \tau_1(\beta) d\beta. \quad (22)$$

Тогда коэффициенты B_0 и C_0 находим из равенств (14) и (22).

Для вычисления σ_β вблизи контуров предварительно определим разность $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$.

Из (2) находим

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right] (g\Phi). \quad (23)$$

С помощью граничных условий (16) из (23) легко вычисляется напряжение σ_β вблизи контуров

$$a\sigma_\beta|_{\alpha=\gamma} = a\sigma_1(\beta) + 2C_0(\operatorname{ch} \gamma \cos \beta - \operatorname{ch} 2\gamma - \cos 2\beta) +$$

$$+ (\operatorname{ch} \gamma - \cos \beta) \left[4A_1(1) \cos \beta \operatorname{ch} 2\gamma + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) K_{1,1}(n) \cos n\beta \right]. \quad (24)$$

Теперь перейдем к сосредоточенной силе.

Если по фиг. 2 подсчитать суммарную нагрузку, приложенную по линиям $\alpha = \gamma$ и $\alpha = -\gamma$ и приравнять каждую из них (при $k \rightarrow \infty$) заданной величине P , т. е.

$$-2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\beta_0} \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial x} \bigg|_{x=\gamma} d\beta = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\beta_0}^{\pi} \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial x} \bigg|_{x=\gamma} d\beta = P, \quad (25)$$

то получим случай действия осевых сосредоточенных сил (фиг. 3).

С помощью (16) из (25) получим

$$(\operatorname{ch} \gamma - 1) (\cos \beta_0 - 1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{k} = -\frac{P}{2a}, \quad (26)$$

$$(\operatorname{ch} \gamma + 1) (\cos \beta_0 + 1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_2}{k} = \frac{P}{2a}.$$

Из (16) и (21) при $k \rightarrow \infty$ с помощью (26) находим

$$K_{1,1}(n) = \frac{P}{\pi(n^2 - 1)} [(-1)^n - 1] - \frac{aC_0(H_1 + H_2 \operatorname{sh}^2 \gamma)}{\pi n(n^2 - 1)} \quad (n \geq 2), \quad (27)$$

$$K_{3,1}(n) = \frac{aC_0}{\pi n} \operatorname{sh} \gamma \cdot H_2 \quad (n \geq 1).$$

В качестве числового примера в случае сосредоточенной силы с помощью формул (4), (6), (9), (10) и (18)–(31), с точностью 10^{-4} , находим значения напряжений в начале координат, т. е. в точке с координатами $x = 0$, $\beta = \pm \pi$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 0 \\ \sigma_x &= -\frac{17}{2\pi} \frac{P}{a} \frac{2 \operatorname{sh} 4\gamma - \operatorname{sh} 2\gamma}{3 \operatorname{sh} 2\gamma + \operatorname{sh} 6\gamma} \\ \sigma_z &= \frac{1}{2\pi} \frac{P}{a} \frac{14 \operatorname{sh} 4\gamma - 31 \operatorname{sh} 2\gamma}{3 \operatorname{sh} 2\gamma + \operatorname{sh} 6\gamma} \end{aligned}$$

где $\operatorname{sh} \gamma = \frac{a}{r}$.

Для разных соотношений $\frac{a}{r}$ значения σ_x и σ_z приведены в таблице.

Таблица

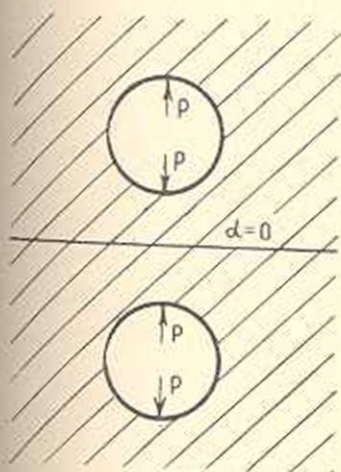
$\frac{a}{r}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\frac{a}{P} \sigma_x$	0,897	0,318	0,142	0,0823	0,053	0,0337	0,0274	0,0212	0,0165	0,0135
$\frac{a}{P} \sigma_z$	0,371	0,131	0,0590	0,0340	0,022	0,0139	0,0113	0,0087	0,0068	0,0056

Из таблицы видно, что σ_x и σ_z уменьшаются при увеличении отношения $\frac{a}{r}$.

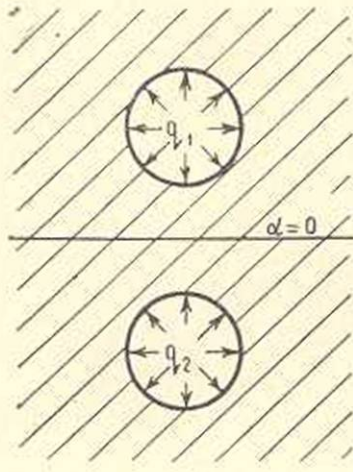
В частности, если принять

$$\tau_i(\beta) = -q_i, \quad \tau_i(\beta) \equiv 0, \quad (i = 1, 2), \quad (28)$$

т.е. рассмотреть случай, когда по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное давление, равное q_1 , а по контуру $\alpha = \alpha_2$ давление, равное q_2 (рис. 4), то с помощью (28) из (5), (6), (11), (12), (13) и (15) получим



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$A_2(n) = B_2(n) = C_2(n) = D_2(n) = 0 \quad (n \geq 2),$$

$$A_2(1) = C_2(1) = 0,$$

$$f_1(n, \alpha_i) = K_{1,i}(n) = -\frac{aC_0}{\pi n(n^2 - 1)} (H_1 + H_2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i),$$

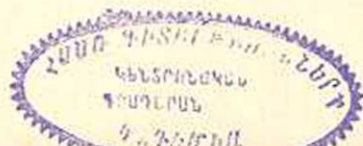
$$f_1(n, \alpha_i) = K_{3,i}(n) = \frac{aC_0}{\pi n} \operatorname{sh} \alpha_i \cdot H_3 \quad (n \geq 2), \quad (29)$$

$$f_1(1, \alpha_i) = I + K_{3,i}(1) = I + \frac{aC_0}{\pi} \operatorname{sh} \alpha_i \cdot H_3.$$

$$2aB_0 - I \cdot \operatorname{sh} 2\alpha_i - (1 + 2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i) C_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = -2aq_i.$$

С помощью (5), (6) и (14) из (29) находим $A_1(n)$, $B_1(n)$, $C_1(n)$, $D_1(n)$ (при $n \geq 2$), а также $A_1(1)$, $C_1(1)$, I , C_0 и B_0 .

Если в предельном случае $\alpha_1 = \infty$ принять $\tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) \equiv 0$, то будем иметь плоскость с одним круглым отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия.



Վ. Վ. ԵԳԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽԵԴՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒՅՈՒՄԸ
ԵՐԿՈՒ ԿՈՐ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ, ԵՐԲ ԱՆՑՔԵՐԻ
ԵԶՐԱԳԾԵՐՈՎ ԱԶԴՈՒՄ ԵՆ ՏՎԱԾ ԲԵՌԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում զիտարկվում է երկու կլոր անցքերով անվերջ հարթության առաձգականության տեսության ընդհանուր խնդիրը, երբ անցքերի կլոր դժերով աղգում են աված բևեռեր:

Քնդիրը զիտարկված է երկրակետային կոորդինատներով, որի լուծումը լարումների ճՓ ֆունկցիան որոնվում է (4) տեսքով, որտեղ մտնող գործակիցները որոշվում են (11), (12), (14) և (15) պարզ հավասարումներից:

Զիտարկված է բևեռ աչնային մասնավոր դեպք, որը ոչ միայն հեշտապես է Ֆուրիեի ինտեգրալի գործակիցները որոշող (13) ինտեգրալների հավելումը, այլև հնարավորություն է ապրիս սահմանային անցումով զիտարկվող կենտրոնացած ուժի դեպքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1938.
2. Еганян В. В. К плоской задаче теории упругости для полукруга. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 6, 1958.
3. Еганян В. В. К плоской задаче теории упругости для круговой „дуочки“. Сборник научных трудов, Ереванский политехнический институт, № 20, 1959.
4. Еганян В. В. Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 1, 1964.
5. Еганян В. В. Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с дуоночным отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 1964.
6. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.