

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. БАРЕГАМЯН, О. А. ТРЕТЬЯКОВ, Э. И. ЧЕРНЯКОВ, В. П. ШЕСТОПАЛОВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ
ПАРАЛЛЕЛЬНО МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, ПОМЕЩЕННОЙ
НА ГРАНИЦЕ ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА КОНЕЧНОЙ
ТОЛЩИНЫ

Излучение заряженной частицы при движении в анизотропной среде подробно рассматривалось в ряде работ (см., например, библиографический указатель [1]). В работе [2] впервые высказана идея использования черенковского излучения для генерации радиоволн. Практическое использование этого способа генерации затруднено, в частности, из-за появления поверхностного заряда, возникающего при оседании электронов пучка на диэлектрик. Нанесение металлической решетки на поверхность кристалла позволяет избавиться от этого нежелательного явления. Решетка оказывает также существенное влияние на генерацию электромагнитных колебаний.

В настоящей работе приводится строгое решение задачи об излучении пучка, движущегося над поверхностью анизотропного диэлектрика конечной толщины с решеткой.

1. Решетка из металлических лент нанесена на одну из поверхностей плоскопараллельного слоя анизотропного диэлектрика (одноосного кристалла) с проницаемостью $\hat{\epsilon}$. Период решетки l , ширина лент d и толщина слоя h — произвольны. На расстоянии a от решетки перпендикулярно ее образующим со скоростью $\vec{v} = j\beta c$ движется электронный пучок, плотность заряда которого задается в следующем виде:

$$\rho = \rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}. \quad (1)$$

Здесь: ρ_0 — амплитуда модуляции, ω — частота модуляции; c — скорость света; $k = \frac{\omega}{v}$; $\delta(z)$ — дельта-функция; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты прямоугольной системы координат, выбранной таким образом, что ось oy проходит через середину ленты, а ось ox параллельна образующим лент. Будем рассматривать кристалл, ось которого параллельна оси oz , т. е. в нашей системе координат тензор диэлектрической проницаемости кристалла запишется в следующем виде

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Следует отметить, что полученное ниже решение можно использовать в случае, когда ось кристалла параллельна ou . Для этого в последующих выкладках следует ε_0 заменить на ε_c и ε_c — на ε_0 .

Собственное поле пучка можно получить из решения неоднородного волнового уравнения для векторного и скалярного потенциалов в виде поверхностной волны

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{i} \beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} \\ \vec{E} &= \left(-\vec{j} i b + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right) F e^{-q|z|} e^{iky},\end{aligned}\quad (3)$$

где $q = k_0 = k\sqrt{1-\beta^2}$ и $F = 2\pi\rho_0$.

(Зависимость от времени $\exp[-i\omega t]$ здесь и далее подразумевается). Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на плоскопараллельном слое с решеткой.

Будем считать пространство над решеткой ($z > -a$) областью 1, пространство, занимаемое кристаллом ($-a > z > -a-h$), областью 2, и пространство под кристаллом ($z < -a-h$) — областью 3. Искомое поле в первой области является суперпозицией падающего (3) и отраженного полей: во второй области поле представляет суперпозицию волн, распространяющихся или затухающих в направлении от одной стенки кристалла к другой; в третьей области будут возбуждаться уходящие от слоя волны. Так как падающая волна (3) является H -поляризованной волной, то при данном выборе ориентации оси кристалла она возбуждает в нем только необыкновенные волны [3]. Вследствие периодичности структуры слой-решетка дифрагированное поле будет периодичным и его удобно представить в виде ряда Фурье. Легко убедиться, что поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}z &> -a \\ \vec{H}_1 &= \vec{i} \left(\beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y} \right) \\ \vec{E}_1 &= \left(-\vec{j} i b + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\vec{j} \frac{q_n}{k_0} + \vec{k} \frac{q_n + n}{z} \right) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y} \\ -a &> z > -a-h \\ \vec{H}_2 &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n e^{-iq_{ne}(z+a)} + C_n e^{iq_{ne}(z+a+h)} \right) e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y}\end{aligned}\quad (4)$$

$$\vec{E}_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(j \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 k_0} + k \frac{\eta + n}{\varepsilon_c z} \right) B_n e^{-iq_n(z+a)} + \left(-j \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 k_0} + k \frac{\eta + n}{\varepsilon_c z} \right) C_n e^{iq_n(z+a+h)} \right] e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} \quad (5)$$

$$z < -a - h$$

$$\vec{H}_2 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-iq_n(z+a+h)} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y}$$

$$\vec{E}_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(j \frac{q_n}{k_0} + k \frac{\eta + n}{z} \right) D_n e^{-iq_n(z+a+h)} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y}, \quad (6)$$

где

$$q_n = k_0 n = k \sqrt{\beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{z} \right)^2},$$

$$q_{ne} = k_0 n_e = k \sqrt{\varepsilon_0 \beta^2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \left(1 + n \frac{\beta}{z} \right)^2},$$

$$\eta = \frac{x}{\beta}, \quad x = \frac{l}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad k_0 = k_F = \frac{\omega}{c}. \quad (7)$$

2. Для отыскания неизвестных коэффициентов A_n , B_n , C_n , D_n воспользуемся точными граничными условиями

$$z = -a, \quad E_{1y} = E_{2y} = 0 \quad (\text{на лентах})$$

$$E_{1y} = E_{2y}, \quad H_{1x} = H_{2x} \quad (\text{на щелях}) \quad (8)$$

$$z = -(a+h), \quad E_{2y} = E_{3y}, \quad H_{2x} = H_{3x}.$$

Поскольку электромагнитное поле (4)–(6) представлено в виде ряда Фурье, то достаточно подчинить его условиям (8) только на одном из периодов структуры, например, $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$. Это приводит к системе функциональных уравнений относительно W_n

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} = 0 \quad (\text{щель}) \quad (9, a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \frac{\eta_n}{r_n} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} = -i \frac{\beta F}{r_0} e^{-qa} e^{iky} \quad (\text{металл}) \quad (9, b)$$

и обнаруживает связь между коэффициентами отражения и прохождения во всех трех областях

$$2W_n = -B_n \left[(1 + \alpha_n) \frac{\theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n} + (1 - \alpha_n) \right] - \delta_{0n} 2\beta F e^{-qa},$$

$$A_n = -B_n \frac{\theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n} (1 + \alpha_n) - \delta_{0n} \beta F e^{-qa},$$

$$C_n = -B_n \alpha_n e^{-iq_n e h}$$

$$D_n = B_n (e^{iq_n e h} - \alpha_n e^{-iq_n e h}),$$

где для простоты записи введены обозначения

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_0 \theta_n - \theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n + \theta_{ne}} e^{2iq_n e h}, \quad r_n = 1 + \frac{1 - \alpha_n}{1 + \alpha_n} \frac{\varepsilon_0 \theta_n}{\theta_{ne}},$$

$$\delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначим

$$x_n = W_n \frac{\eta + n}{z}, \quad G = \frac{\theta F}{r_0} (1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) e^{-qa},$$

$$\xi_n = \frac{|\eta + n|}{\eta + n} \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e})}{\eta_1} \sqrt{\frac{z^2}{(\eta + n)^2} - 1}, \quad \zeta_n = 1 + i \frac{|n|}{n} g_n. \quad (11)$$

Существенно, что $\zeta_n = 0 \left(\frac{1}{n^2} \right)$ при $|n| \gg 1$ (α и β всегда ограничены).

С учетом (11) система уравнений (9) после некоторых преобразований принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad (\delta < |\varphi| < \pi) \quad (12, a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} (1 - \zeta_n) e^{in\varphi} = -G_n, \quad (|\varphi| < \delta) \quad (12, b)$$

$$\left(\varphi = 2\pi \frac{y}{l}, \quad \delta = \pi \frac{d}{l} \right).$$

Так как при образовании (9, a) в (12, a) использовалась операция дифференцирования по переменной y , то систему (12) следует дополнить равенством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{(-1)^n}{\eta + n} = 0, \quad (13)$$

которое получается в результате подстановки в (9, a) значения $y = \frac{l}{2}$.

Система уравнений (12) образует задачу Римана-Гильберта [4] для аналитической функции $x(z)$ от переменной $z = |z|e^{i\varphi}$

$$x(z) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} x_n z^n, & |z| < 1 \\ - \sum_{n < 0} x_n z^n, & |z| > 1, \end{cases}$$

которая непрерывна на дуге единичной окружности $|z| = 1$ $\delta < |\varphi| < \pi$ и терпит разрыв на дуге $|\varphi| < \delta$. Решение последней приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной x_n и некоторой промежуточной константы b

$$\begin{aligned} 2bR_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \frac{|n|}{u} \zeta_n V_m^n &= GV_n^0 \\ 2bR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\frac{|n|}{n} \zeta_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= GV_m^0, \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{2} P_m(u), \quad R_n = \frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} P_{\eta-1}(u), \\ V_n^n &= \frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} \frac{\eta-1}{\eta+n} [P_{\eta-1}(u) P_{n+1}(u) - P_{\eta-2}(u) P_n(u)] \\ V_m^n &= \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} p_{n+1-p}(u) P_{p-m-1}(u) & n \geq 0 \\ \frac{1}{2} [P_m(u) - P_{m+1}(u)] & n = -1 \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} p_{-n-1-p}(u) P_{p+m+1}(u) & n < -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_0(u) = 1, \quad p_1(u) = -u, \quad p_n = P_n - 2uP_{n-1} + P_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

$P_m(u)$ и $P_\eta(u)$ — полиномы и функции Лежандра соответственно (см. формулы (23), (25) работы [4]).

Бесконечная система уравнений (14) квазирегулярна и, следовательно, допускает решение методом редукции. Для отыскания численных значений x_n целесообразно использовать ЭВМ. По полученным значениям x_n легко находятся с учетом (10) коэффициенты B_n , а также A_n , C_n , D_n .

3. Электромагнитное поле (4)–(6) представляет собой суперпозицию распространяющихся и затухающих волн; та часть поля, которая представлена распространяющимися гармониками, соответствует излученному пучком электромагнитному полю.

Определим условия, при которых излучение будет существовать в кристалле и свободном пространстве.

В свободном пространстве (первая и третья область) будут распространяться те гармоники, для которых величина q_n — вещественна, т. е., когда

$$\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2. \quad (16)$$

Это может иметь место только при $n < 0$.

Внутри диэлектрического слоя условие излучения будет выполняться для тех пространственных гармоник, у которых вещественна величина q_{ne} , т. е.

$$\epsilon_e \beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2. \quad (17)$$

Следует отметить, что, в отличие от свободного пространства, излучение в диэлектрик может наблюдаться не только при $n < 0$, но и в случае $n \geq 0$.

Найдем среднее значение вектора Умова—Пойнтинга $\vec{S}$ на единичной площадке произвольной плоскости $z = \text{const}$. Для n -ой пространственной гармоники $\vec{S}$ в свободном пространстве (области 1 и 3) и диэлектрическом слое определяется следующими выражениями

$$\vec{S}_n^1 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{x} + \vec{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{x}\right)^2} \right| |A_n|^2, \quad (z > -a) \quad (18)$$

$$\vec{S}_n^3 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{x} - \vec{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{x}\right)^2} \right| |D_n|^2, \quad (z < -a - h) \quad (19)$$

$$\vec{S}_n^2 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{\sqrt{\epsilon_e} x} \right| (|B_n|^2 + |C_n|^2) - \vec{k} \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{\sqrt{\epsilon_e} x}\right)^2} (|B_n|^2 - |C_n|^2), \quad (-a > z > -a - h). \quad (20)$$

Таким образом, излучение монохроматического пучка образует дискретный спектр, и направление излучения для n -ой пространственной гармоники, как видно из (18)–(20), составляет с направлением движения пучка угол γ_n в свободном пространстве и угол γ_{ne} в кристалле

$$\gamma_n = \arctg \sqrt{\left(\frac{x}{\eta + n}\right)^2 - 1} \quad (21)$$

$$\gamma_{ne} = \arctg \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\epsilon_e} x}{\eta + n}\right)^2 - 1}. \quad (22)$$

4. В заключение заметим, что при выполнении условия излучения (17) только для нулевой пространственной гармоники из (20) можно получить выражение для мощности, которое аналогично найденному в работе [5], формула (29).

Для этого необходимо положить $u = 1$ (решетка отсутствует), $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_e$ и толщину h устремить к бесконечности. Если $l \rightarrow 0$ (сплошной экран), то $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ и в длинноволновом приближении $|A_0| = 1$.

В качестве примера приведем аналитическое выражение для нулевой амплитуды поля над решеткой

$$A_0 = \frac{\beta F e^{-q a}}{\eta r_0} \left\{ \gamma (2 - r_0) + \right. \\ \left. + \frac{\theta}{r_0^2} (1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - P_\gamma(u)] \right. \\ \left. + \frac{(u-1) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u) + i g_0 [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u)]}{(u-1) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u) + i g_0 [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u)]} \right\},$$

которое получается из (14) при $m = 0$ и $\zeta_n = 0$ при $n \neq 0$.

Ереванский государственный университет

Харьковский институт горного машиностроения,

автоматики и вычислительной техники

Поступила 15 II 1965

Վ. Ա. ԲԱՐԵԳԱՄՅԱՆ, Օ. Ա. ՏՐԵՏՅԱԿՈՎ, Է. Ի. ՉԵՐՆԱԿՈՎ, Վ. Պ. ՇԵՍՏՈՎԱԼՈՎ

ՎԵՐՉԱՎՈՐ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻԱՌԱՆՅՔԱՆԻ ԲՅՈՒՐԵՂԻ
ՍԱՀՄԱՆԻ ՎՐԱ ՏՆՂԱՎՈՐՎԱԾ ՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ՑԱՆՑԻՆ ԶՈՒԳԱԶՆՈՒ
ՇԱՐՔՎՈՂ, ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է միաաղական ցանցով անիզոտրոպ դիէլեկտրիկ (միաանցքանի բյուրեղ) հարթ զուգահեռ շերտի վերևով շարժվող փնչի ճառագայթման խնդիրը: Սահմանափին էլեկտրոդինամիկ խնդիրը բերվում է Ռիման-Գիլերտի խնդրին, որի լուծումը բերվում է հանրահաշվական համարումների գծային անվերջ սխեմանի:

Քանի որ սխեմանը քվադր-կարգավորող է, ուստի այն թույլ է տալիս ցանկացած ճշտությամբ լուծում: Որոշված են ճառագայթման պայմանները, գտնված են բյուրեղի մեջ և աղյուս տարածությունում Ումով-Պոլյուինգի վեկտորի համար արտահայտություններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова—Черенкова. УФН, 62, 3, 1957, 201. Теория эффекта Вавилова—Черенкова. УФН, 2, 1961, 295.
2. Гичзбург В. Л. Об использовании эффекта Черенкова для излучения радиоволн. ДАН СССР, 56, 1947, 253.
3. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, Минск, 1958.
4. Агранович Э. С., Марченко В. А., Шестовалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, 32, 4, 1962, 381.
5. Danos M. Čerenkov Radiation from Extended Electron Beams, Journal of applied Physics, 26, 1, 1955, 2.