

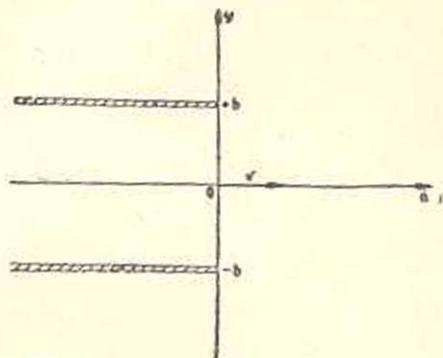
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. М. АИВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ,  
 ПРОЛЕТАЮЩЕЙ ПО ОСИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО  
 ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

В последнее время появилось много работ, в которых рассматривается излучение заряженных источников, пролетающих мимо разных оптических неоднородностей [1-4]. Во всех этих задачах применяем разных модификаций метода Винера-Хопфа удается получить точное решение поставленной задачи [5]. К классу этих задач относится задача об излучении точечной заряженной частицы при пролете мимо открытого конца полубесконечного плоского идеально проводящего волновода, к решению которой мы перейдем ниже.

Плоский волновод состоит из двух полубесконечных тонких пластины  $x < 0, y = \pm b$ . Ось  $z$  направлена по нормали к плоскости рисунка (фиг. 1). Пучок из волновода вылетает точечная заряженная частица, движущаяся по оси  $x$  со скоростью  $v_x = v$ .



Фиг. 1.

Для нахождения полей рассматриваемой задачи мы должны решить уравнения Максвелла с граничными условиями, накладываемыми наличием двух полубесконечных идеально проводящих полуплоскостей. Следовательно, к решению неоднородного уравнения мы должны прибавить такие решения уравнения Даламбера, чтобы на граничных условиях удовлетворялись. Как решение неоднородного волнового уравнения мы выберем поле заряженной частицы, пролетающей по оси плоского бесконечного волновода

$$E_{x,z}^0(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{x,z}^0(\omega, q, y) e^{i \frac{\omega}{v} x - i q z - i \omega t} dq d\omega$$

$$E_{x,z}^0(\omega, q, y) = R_{x,z} \left[ e^{-\eta |y|} - \frac{\text{ch } \eta y}{\text{ch } \eta b} e^{-\eta b} \right], \quad (1)$$

где

$$R_x = -\frac{i\omega e\gamma^2}{2\pi l c^2}, \quad R_z = \frac{ieq}{2\pi l v}, \quad l = \sqrt{k^2 \gamma^2 + q^2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Здесь  $E_{x,z}^0$  — тангенциальные компоненты электрического поля. Остальные компоненты электромагнитного поля можно выразить через них. Решение уравнения Даламбера для этих же компонент полей будем искать в виде

$$E_{x,z} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y) e^{-i\alpha x - iqz - i\omega t} d\alpha dq d\omega. \quad (2)$$

Тогда для функции  $\Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y)$  получим соответствующие решения

$$\begin{aligned} \Phi_{x,z}^{(n)}(\alpha, q, \omega, y) &= A_{x,z}(\alpha) e^{-\lambda y} \quad \text{при } y \geq b \\ \Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y) &= B_{x,z}(\alpha) e^{-\lambda y} + C_{x,z}(\alpha) e^{\lambda y} \quad \text{при } |y| \leq b \\ \Phi_{x,z}^{(n)}(\alpha, q, \omega, y) &= D_{x,z}(\alpha) e^{\lambda y} \quad \text{при } y \leq -b. \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\lambda = (\alpha^2 - p^2)^{1/2}, \quad p^2 = k^2 - q^2, \quad \text{Im } k = \delta > 0, \quad \text{Re } \lambda > 0 \quad \text{при } |\text{Im } \alpha| < \delta.$$

Неизвестные функции  $A_{x,z}$ ,  $B_{x,z}$ ,  $C_{x,z}$ ,  $D_{x,z}$  определяются из шивки решения (2)–(3) с решением (1). Шивка должна быть произведена так, чтобы на полубесконечных полуплоскостях удовлетворялись граничные условия

$$E_{x,z} = 0 \quad x < 0, \quad y = \pm b. \quad (4)$$

Из условий непрерывности  $E_{x,z}$  мы получаем связь между  $A_{x,z}$ ,  $B_{x,z}$ ,  $C_{x,z}$ ,  $D_{x,z}$

$$\begin{aligned} A_{x,z}(\alpha) &= B_{x,z}(\alpha) + C_{x,z}(\alpha) e^{2\lambda b} \\ D_{x,z}(\alpha) &= B_{x,z}(\alpha) e^{2\lambda b} + C_{x,z}(\alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения функций  $B_{x,z}$  и  $C_{x,z}$ , следуя методу, изложенному в книге [5, § 3.3], мы получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} P_{x,z}^- &= \sigma_{x,z} - \tau_{x,z} - \frac{\lambda S_{x,z}^+}{K(\alpha)} \\ S_{x,z}^- &= \sigma_{x,z} + \tau_{x,z} - \frac{P_{x,z}^+}{bL(\alpha)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$K(\alpha) = e^{-\lambda b} \text{ch } \lambda b, \quad L(\alpha) = \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda b} \text{sh } \lambda b.$$

Функции  $P_{x,z}^-$  и  $S_{x,z}^-$  — некоторые функции от комплексного переменного  $\alpha$ , соответственно голоморфные в нижней полуплоскости  $\alpha$

( $\text{Im } \alpha < k_2$ , где  $k_2 = \text{Im } k$ ), а  $P_{x,z}^+$  и  $S_{x,z}^+$  соответственно голоморфны в верхней полуплоскости  $\alpha$  ( $\text{Im } \alpha > -k_2$ ). Искомые функции  $B_{x,z}$  и  $C_{x,z}$  выражаются через  $S_{x,z}^+$  и  $P_{x,z}^+$  следующими соотношениями

$$B_{x,z}(\alpha) + C_{x,z}(\alpha) = \frac{S_{x,z}^+}{\text{ch } \lambda b} \quad (7)$$

$$B_{x,z}(\alpha) - C_{x,z}(\alpha) = -\frac{P_{x,z}^+}{\text{sh } \lambda b}$$

Функции  $\sigma_{x,z}$  и  $\tau_{x,z}$  находим из условий непрерывности на продолжении двух пластин дифференциалов (по  $y$ ) полных полей: так, например,  $\sigma_{x,z}$  определяется из формулы

$$\sigma_{x,z} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial E_{x,z}^0(q, \omega, y)}{\partial y} \right]_{y=b} e^{i \frac{\omega}{v} x + i \alpha x} dx \quad (8)$$

Используя формулу (1), получаем

$$\tau_{x,z} = -\sigma_{x,z} \\ \sigma_{x,z} = -\frac{R_{x,z}}{4\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \quad (9)$$

При учете (9) уравнения (6) переходят в

$$S_{x,z}^- = -\frac{P_{x,z}^+}{bL(\alpha)} \quad (10')$$

$$P_{x,z}^- = -\frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} - \frac{\lambda S_{x,z}^+}{K(\alpha)} \quad (10'')$$

Решение функционального уравнения (10') дает  $P_{x,z}^+ = 0$ , следовательно, из (7) получаем

$$B_{x,z}(\alpha) = C_{x,z}(\alpha), \quad A_{x,z}(\alpha) = D_{x,z}(\alpha).$$

Последнее соотношение физически ясно, так как из симметрии задачи видно, что поле в пространстве  $y > 0$  и  $y < 0$  должно быть одинаково. Поэтому при дальнейшем рассмотрении мы ограничимся пространством  $y > 0$ . Для решения (10'') мы должны факторизировать функцию  $K(\alpha)$ . (Факторизация  $K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha)$  приведена в книге [5]). Тогда уравнение (10'') примет вид

$$\frac{P_{x,z}^- K(\alpha)}{\sqrt{\alpha - p}} + \frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \left[ \frac{K^-(\alpha)}{\sqrt{\alpha - p}} - \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{\sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}} \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha+p} S_{x,z}^+}{K^+(x)} - \frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}}. \quad (11)$$

Решение этого уравнения при учете условий на ребре [4] запишется следующим образом

$$S_z^+ = -\frac{R_z}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(x)}{\sqrt{\alpha+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}},$$

$$S_x^+ = -\frac{R_x}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(x)}{\sqrt{\alpha+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}} + \frac{CK^+(x)}{\sqrt{\alpha+p}}, \quad (12)$$

где  $C$  — пока неизвестный постоянный коэффициент. Зная функции  $S_z^+$  и  $S_x^+$ , мы можем с учетом (2), (3), (5), (7) определить тангенциальные компоненты электрического поля следующими формулами

$$E_{x,z} = E_{x,z}^0 + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x,z}^+ \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} e^{-i\alpha x - i q z - i\omega t} d\alpha d q d\omega \quad \text{при } |y| \leq b \quad (13)$$

$$E_{x,z} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x,z}^+ e^{\lambda b} e^{-i\alpha x - \lambda y - i q z - i\omega t} d\alpha d q d\omega \quad y \geq b. \quad (13')$$

Нормальная к стенкам волновода компонента электрического поля  $E_y$  определяется из уравнения  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ , откуда получаем

$$E_y = E_y^0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [i\alpha S_x^+ + i q S_z^+] \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} e^{-i\alpha x - i q z - i\omega t} d\alpha d q d\omega \quad |y| \leq b \quad (14)$$

$$E_y = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [i\alpha S_x^+ + i q S_z^+] e^{\lambda b} e^{-i\alpha x - \lambda y - i q z - i\omega t} d\alpha d q d\omega \quad y \geq b. \quad (14')$$

Компоненты магнитного вектора  $\vec{H}$  находим из уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{,\omega} = \frac{i\omega}{c} \vec{H}_{,\omega}.$$

Неизвестный коэффициент  $C$  мы определим из требования, чтобы скачок нормальной компоненты электрического поля равнялся нулю на продолжении плоскостей волновода. Это требование дает следующее условие

$$pS_x^+(-p) = qS_z^+(-p). \quad (15')$$

Из условия (15) получаем

$$C = \frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{\sqrt{-\frac{\omega}{v}-p} \left(\frac{\omega}{v}-p\right)} \left[ R_x - \frac{q}{p} R_z \right]. \quad (15'')$$

Таким образом, для  $S_x^+$  и  $S_z^+$  окончательно получим

$$S_z^+ = -\frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(z)}{\sqrt{z+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v}-p}} \frac{R_z}{z + \frac{\omega}{v}} \quad (16'')$$

$$S_x^+ = \frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(z)}{\sqrt{z+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v}-p}} \left[ -\frac{R_x}{z + \frac{\omega}{v}} + \frac{R_x - \frac{q}{p} R_z}{-p + \frac{\omega}{v}} \right].$$

Для вычисления полей внутри волновода нужно знать поведение подынтегрального выражения формул (13) и (14) в верхней полуплоскости комплексного переменного  $z$ . Легко заметить, что единственными особенностями подынтегральных функций в верхней полуплоскости являются нули функции  $\operatorname{ch} \lambda b$ . Поэтому интегралы (13) и

$$(14) \text{ сводятся к сумме вычетов в полюсах } z_{2m+1} = \sqrt{p^2 - \frac{\pi^2 (2m+1)^2}{4b^2}}.$$

Физически это соответствует возбуждению собственных волноводных волн, как при влете, так и при вылете частицы.

Подынтегральные выражения имеют полюс также в точке  $z = -\frac{\omega}{v}$ , которая лежит в нижней полуплоскости  $z$ . Для нахождения полей в пространстве продолжения волновода  $x > 0$  контур интегрирования нужно замкнуть снизу, тогда вычет в этом полюсе вместе с  $\vec{E}^+$  даст поле частицы в пустоте.

Рассмотрим теперь поле, возбужденное в пространстве вне волновода. Формулы (13'') и (14'') дают возможность вычислить поля излучения на больших расстояниях от открытого конца волновода. Введем сферические координаты  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = R \cos \psi$ ,  $r = R \sin \psi$ . Тогда для нахождения полей на больших расстояниях\* можем пользоваться формулой

$$\int f(x, y, z) e^{-ikx - iy - iqz} dx dy dz =$$

\* Под большими расстояниями мы понимаем  $R \gg \frac{\lambda}{\sin^2 \psi}$ .

$$= - (2\pi ik) \frac{e^{ikR}}{R} \sin \varphi \sin \psi f(-k \sin \psi \cos \varphi, -k \cos \psi, -ik \sin \psi \sin \varphi) \quad (17)$$

Угловое распределение интенсивности излучения на частоте  $\omega$  найдем из формулы [6]

$$I_{\omega}(\psi, \varphi) = c |\vec{E}_{\omega}|^2 R^2 d\omega = 4\pi^2 k^3 c \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \left\{ |S_x^+|^2 + |S_z^+|^2 + \left| \frac{\alpha S_x^+ + \rho S_z^+}{\lambda} \right|^2 \right\}, \quad (18)$$

где в аргументы функций  $S_x^+$ ,  $S_z^+$  и  $\lambda$  подставлены соответствующие выражения по формуле (17). После довольно долгих преобразований окончательно получаем

$$I_{\omega}(\psi, \varphi) = \frac{e^{2\beta}}{2\pi^2 c} \frac{\cos^2(kb \sin \varphi \sin \psi)}{\operatorname{ch}^2 lb} \left| \frac{K^- \left( -\frac{\omega}{v} \right)}{K^-(-k \cos \varphi \sin \psi)} \right| \times \\ \times \frac{\cos^2 \psi \cos^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \beta \sin \psi) + \alpha_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 + \beta \sin \psi)}{\alpha_0^2 (1 - \beta \sin \psi \cos \varphi)^2} d\psi d\varphi, \quad (19)$$

где

$$\alpha_0^2 = 1 - \beta^2 \sin^2 \psi, \quad l = \frac{k}{\beta} \alpha_0.$$

Учитывая, что при больших частотах функции  $\left| \frac{K^- \left( -\frac{\omega}{v} \right)}{K^-(-k \cos \varphi \sin \psi)} \right|^2$  и  $|K^-(-k \cos \varphi \sin \psi)|^2$  стремятся к единице и усредняя по быстрым колебаниям  $\cos^2(kb \sin \varphi \sin \psi)$ , получаем угловую зависимость, характерную для излучения заряженной частицы, пролетающей мимо идеально проводящей полуплоскости [2, 3]. Распределение излучения при  $\psi = \frac{\pi}{2}$  переходит в формулу для излучения заряженной частицы

пролетающей по оси плоского волновода [1]. В заключение авторы приносят благодарность Б. М. Болотовскому за полезные обсуждения.

ЦИИ Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 9 I 1965

ՅՈՒ. Մ. ԱԻՎԱԶՅԱՆ, Գ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱՆ ՄԱՍՆԻԿԻ ՀԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ, ԵՐԲ  
ՆԱ ԱՆՑՆՈՒՄ Է ՀԱՐԹ ԿԻՍԱՆՆՎԵՐՁ ԱԼԻԲԱՏԱՐԻ ԱՌԱՆՑՔՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում ղիտարկված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը  
երբ նա անցնում է հարթ կիսամյակերջ ալիքատարի առանցքով: Գտնված է

ճառագայթման դաշտերը ինչպես ալիքատարի ներսում, այնպես էլ նրանից դուրս՝ մեծ հեռավորությունների դրառ չափված է ճառագայթման ինտենսիվության անկյունային բաշխումը: Յուրյ է որված, որ մեծ հաճախականությունների դեպքում ճառագայթման ինտենսիվության անկյունային բաշխումն ունի նույն տեսքը, ինչ որ մեկ կիսաանվերջ հարթության դեպքում:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение нити с током и заряженной нити, пролетающих вблизи открытого конца плоского волновода. ЖТФ, 34, № 4, 1964, 704.
2. Казанцев А. П., Сурдутович Г. И. Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана. ДАН СССР, 147, 1962, 74.
3. Седракян Д. М. Дифракционное излучение точечной заряженной частицы. Известия АН АрмССР, 17, № 4, 1964, 103.
4. Айвазян Ю. М., Седракян Д. М. Возбуждение электромагнитных волн в плоском полубесконечном волноводе заряженной частицей. ДАН АрмССР, 39, № 2, 1964, 81.
5. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. ИЛ, М., 1962.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1960.