

С. М. ТЕР-МИНАСЯНЦ

ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НИЖНЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается автомодельное движение возмущенной части нижнего полупространства, заполненного сжимаемой жидкостью, под действием постоянного давления, распространяющегося вдоль свободной поверхности с постоянной скоростью, значительно большей, чем скорость звука в жидкости, заполняющей нижнее полупространство. Рассматривается плоская задача. Уравнение состояния предполагается представленным произвольной дифференцируемой функцией $p = f(\rho, T)$, удовлетворяющей условию $\partial f / \partial T > 0$ и не нарушающей автомодельности движения. Решение получается путем сведения к краевой задаче Римана-Гильберта. Всестороннее исследование других случаев этой задачи содержится в монографии А. Г. Багдоева [1].

§ 1. Введение

В момент $t = 0$ в какой-либо точке свободной поверхности сжимаемой жидкости возникло давление p_2 и, оставаясь постоянным, стало распространяться вдоль свободной поверхности. Мы будем рассматривать тот случай образующегося движения, когда можно пренебречь влиянием деформации свободной поверхности на поле давлений в верхнем полупространстве. Предположим также, что скорость распространения фронта этого давления вдоль свободной поверхности тоже постоянна и равна $1/\varepsilon$, причем $\varepsilon \ll a_1$, если a_1 — скорость звука в исходной невозмущенной жидкости. Вследствие вышесказанного в глубь сжимаемой жидкости будет распространяться слабо-искривленная ударная волна. Мы рассмотрим плоскую задачу. Возмущенная область состоит из двух периферийных областей постоянного течения ALF и CKD (см. фиг. 1) и центральной области дифракции $ABCDEI$, где локализованы возмущения, порожденные искривленным участком ударной волны. Эти области разделены двумя дугами окружности Маха DC и FA . Систему декартовых координат свяжем с жидкостью, движущейся за ударной волной в нижнем полупространстве, направив ось x перпендикулярно, а ось y — параллельно невозмущенной свободной поверхности жидкости (см. фиг. 1). Изучаемое движение от-

кальной и горизонтальной составляющих скорости в области дифракции, T — температура, C_v — теплоемкость при постоянном объеме, I — механический эквивалент тепла. В уравнениях состояния p , ρ обозначают суммарные величины, однако нет оснований для смешения их с возмущениями p , ρ . В случае уравнения состояния Клапейрона, обозначая через κ показатель адиабаты, будем иметь $\kappa_0 = \frac{1}{\kappa - 1}$.

Систему (2) нетрудно свести к волновому уравнению для давления

$$\square p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Нетрудно получить величины углов наклона периферийных участков ударной волны к оси y

$$\epsilon' = \pm U, \quad (6)$$

для этих участков имеем очевидные равенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \chi(t, y) = \mp \epsilon' y. \quad (7)$$

Подстановка (7) в третье уравнение системы (3) дает

$$v = \pm V \epsilon'. \quad (8)$$

Это третье уравнение и остальные уравнения системы (3) взаимно независимы. Поэтому с учетом (7) для областей постоянного течения из (3) получим

$$p = \rho = u = 0. \quad (9)$$

Условия (3) мы, в силу линейности задачи, считаем выполняющимися на прямой

$$x = (U - V)t. \quad (10)$$

Соотношения (3), (9), (10) вместе с замечанием в начале работы о постоянстве давления в верхнем полупространстве ($p = 0$) определяют условия на границе возмущенной дифракционной области.

§ 3. Сведение к задаче Римана-Гильберта

В силу автомодельности задачи мы можем, введя переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{a_2 t}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a_2 t} \quad (11)$$

и произведя последовательность преобразований

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right); \quad (12)$$

$$r = \frac{2R}{1 + R^2}, \quad (13)$$

$$\mu = R \cos \theta, \quad \nu = R \sin \theta, \quad (14)$$

перейти от (5) к уравнению Лапласа

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} = 0 \quad (15)$$

внутри единичного круга.

Преобразование (11) фиксирует положение и размеры нашей области. Прямая (10) переходит при этом в прямую

$$\bar{x} = \frac{U - V}{a_2} = m, \quad (16)$$

которая в результате преобразования Чаплыгина (13) переходит в окружность

$$2R \cos \theta = m(1 + R^2), \quad (17)$$

ортогональную в единичной окружности — границе дифракционной области в переменных (11), (13) и (14). Центр окружности (17) будет в точке $\mu = 1/m$, $\nu = 0$. Указанное свойство преобразования Чаплыгина позволяет отобразить конформно возмущенную область на прямоугольник

$$-l < z < l, \quad 0 < \tau < \pi; \quad (18)$$

$$z = z + i\tau = \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - l + i \frac{\pi}{2}, \quad l = \frac{1}{4} \ln \frac{1+m}{1-m}, \quad \lambda = \mu + i\nu. \quad (19)$$

Верхняя полуплоскость плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ функцией

$$z = C \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} \quad (20)$$

отображается на прямоугольник (18) с соответствием точек $\omega = 0$, $z = 0$; $\omega = 1$, $z = l$; $\omega = 1/k$, $z = l + i\pi$.

Константы k и C определяются указанным соответствием точек с помощью условий [7]:

$$CK(z) = l, \quad K'(z)/K(z) = \pi/l. \quad (21)$$

Здесь $\sin \alpha = k$, $K(z)$ и $K'(z)$ — полный и дополнительный полный эллиптические интегралы первого рода.

В координатах (11) функция $\chi(t, y)$, входящая в (1), преобразуется следующим образом:

$$\chi(t, y) = a_2 t \bar{\chi}(\bar{y});$$

отметим, еще, что $\partial \chi / \partial y = \partial \bar{\chi} / \partial \bar{y}$.

В работах [3] и [4], взятых вместе, проведено преобразование кривого условия на этом слабо-искривленном ударном фронте к пе-

ременным (19) для случая уравнения состояния Клайперона при $\kappa = 1,4$. Так как в случае рассматриваемого здесь произвольного уравнения состояния соответствующие выкладки аналогичны, мы не приводим их здесь, ограничиваясь выписыванием результатов преобразований и выражений для констант, входящих в получающиеся условия. Условия на ударном фронте приводят к двум соотношениям

$$u = Ap, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (22)$$

которые вместе с уравнениями движения (2) приводят в плоскости λ к условию

$$\frac{\partial p}{\partial n} / \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{A \lg \theta - B \operatorname{ctg} \theta}{V \sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta}}, \quad (23)$$

причем

$$A = \frac{a_2}{U - V} \frac{(x_0 + 1)(U - V)^2 + a_2^2 U (U - V)}{2x_0 a_2^2 - V(U - V)},$$

$$B = \frac{U}{U - V} \frac{a_2^2 (U - V) [(2 + x_0)V - x_0 U]}{2x_0 a_2^2 - V(U - V)}. \quad (24)$$

Из (19) и (17) для образов нашего слабо-искривленного ударного фронта в соответствующих плоскостях, с учетом того, что на дуге окружности (17) $\bar{y} = m \operatorname{tg} \theta$, можно получить

$$\bar{y} = -\sqrt{1 - m^2} \cos \tau = -m_1 \cos \tau. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (23) даст условие в плоскости z на правой вертикальной стороне прямоугольника (18):

$$\frac{\partial p}{\partial n} / \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{D - A \cos 2\tau}{\sin 2\tau} = -\frac{1}{b(\tau)}, \quad (26)$$

$$D = 2B \frac{m}{m_1^2} - A. \quad (27)$$

Для получения граничного условия на образе прямой (16) в плоскости φ необходимо подставить в (26) зависимость

$$\tau = C \int_1^{\varphi} \frac{d\varphi}{V(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)}. \quad (28)$$

Однако, для выписывания решения этого не требуется: ниже мы будем просто писать, что на действительной оси φ плоскости φ

$$\left. \begin{aligned} a_1[\tau(\varphi)] \frac{\partial p}{\partial \varphi} + b_1[\tau(\varphi)] \frac{\partial p}{\partial \psi} &= 0 \\ a_1[\tau(\varphi)] &= D - A \cos 2\tau(\varphi) \text{ при } -\infty < \varphi < \infty \\ b_1[\tau(\varphi)] &= \begin{cases} -\sin 2\tau(\varphi) & \text{при } 1 < \varphi < 1/k \\ 0 & \text{при } \varphi < 1, \varphi > 1/k, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

причем при $1 < \varphi < 1/k$ $b[\tau(\varphi)] = b_1/a_1$ определяется по (27) и (26), а в остальных точках этой оси $b = 0$. Из (24), (26), (27) нетрудно установить, что a_1 и b_1 непрерывны при $-\infty < \varphi < \infty$. Соотношения (15), (29) дают постановку однородной краевой задачи Римана-Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции

$$\Gamma = \frac{dp}{d\varphi} + i \frac{\partial p}{\partial \psi}. \quad (30)$$

§ 4. Решение задачи Римана-Гильберта

Нетрудно установить, что индекс функции $a_1 + ib_1$ равен нулю, а решение задачи (15), (29) представляется в виде [2]:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= i\beta \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \operatorname{Arctg} B[h(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta - \omega}\right) \\ \operatorname{Arctg} b[\tau] &= \operatorname{arctg} b[\tau] + i\pi \quad / = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < \tau_1 \\ 1 & \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2 \\ 2 & \text{при } \tau > \tau_2 \end{cases} \\ \tau_1 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{D}{A}, \quad \tau_2 = \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{D}{A} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь ζ — переменная интегрирования в направлении оси φ . Определим входящую сюда постоянную β и получим формулу, дающую распределение давления вдоль искривленной части ударного фронта. По формуле Сохотского имеем для внутренних предельных значений τ особого на разомкнутом контуре — отрезке $1 < \varphi < 1/k$, интеграла, входящего в (31), который мы обозначим через $F(\varphi)$:

$$\begin{aligned} F^+ &= \frac{1}{C} \int_0^{\tau} \frac{\operatorname{Arctg} b(h) - \operatorname{Arctg} b(\tau)}{\zeta - \varphi} \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \zeta^2)} d\zeta + \\ &+ \operatorname{Arctg} b(\tau) \ln \left| \frac{1 - k\varphi}{k(\varphi - 1)} \right| + i\pi \operatorname{Arctg} b(\tau). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь учтено, что $\arg[(1 - k\varphi)/k(\varphi - 1)] = 0$ и в интеграле произведена замена переменных по (28). Необходимые для подстановки сюда зависимости $\zeta(h)$ или, что одно и то же, $\varphi(\tau)$ образуются из (20) следующим образом [6]:

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{C}, k\right); \quad \varphi = \operatorname{sn}\left(\frac{l}{C} + i \frac{\tau}{C}\right) = \operatorname{sn}\left(K + i \frac{\tau}{C}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{C}, k'\right)}; \quad (33)$$

Здесь дополнительный модуль эллиптического интеграла (20). Из (30) и (31) имеем

$$\frac{1}{\beta} \operatorname{Re} \Gamma^+(\varphi) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \frac{b[\tau(\varphi)]}{\sqrt{b^2[\tau(\varphi)] + 1}} \exp\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} F^+\right). \quad (34)$$

Условия для определения β нам теперь доставит второе соотношение (22), интеграл от правой части которого по отрезку $(-m_1, m_1)$ прямой (18) (или его образу) равен в нашем случае $2v$. Запишем этот интеграл вдоль образа нашего отрезка в плоскости τ . Согласно (6), (8), (25), (28) имеем:

$$\frac{\beta B}{Cm} \int_0^{\pi} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sqrt{(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)} \frac{d\tau}{\cos \tau} = 2UVz; \quad (35)$$

величина $\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ подставляется сюда из (34). Распределение давления вдоль искривленной части ударного фронта получим, интегрируя (34):

$$p = \int_0^{\pi - \arccos(\varphi/m_1)} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sqrt{(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)} d\tau. \quad (36)$$

§ 5. Решение для давления

Из (31) с учетом (30) и уравнений Коши-Римана, интегрируя, находим:

$$p = \operatorname{Im} \left\{ \beta \int_{-1}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_1^{j/k} \operatorname{Arctg} b[\tau(\varphi)] \frac{d\tau}{z - \tau} \right] d\omega \right\}, \quad (37)$$

здесь нижний предел отвечает точке F (см. фиг. 1), в которой $p=0$. Вводя функции

$$\left. \begin{aligned} X &= -\exp \left[\frac{1}{\pi C} \int_0^{\tau} \operatorname{Arctg} b(h) \frac{(\zeta - \varphi) \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \zeta^2)}}{(\zeta - \varphi)^2 + \psi^2} dh \right] \\ Y &= \frac{\psi}{\pi C} \int_0^{\tau} \operatorname{Arctg} b(h) \frac{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \zeta^2)}}{(\zeta - \varphi)^2 + \psi^2} dh \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

разделим действительную и мнимую части (31)

$$\Gamma(\omega) = \beta X \sin Y - i\beta X \cos Y. \quad (39)$$

Величины φ и ψ , входящие в (33), определяются разделением действительной и мнимой частей первого соотношения (33) [6]:

$$\varphi = \frac{\eta \sqrt{1 - k'^2 \eta'^2}}{1 + (k^2 \eta^2 - 1) \eta'^2}, \quad \psi = \frac{\eta' \sqrt{(1 - \eta'^2)(1 - \eta^2)(1 - k^2 \eta^2)}}{1 + (k^2 \eta^2 - 1) \eta'^2}, \quad (40)$$

где

$$\eta(\sigma) = \operatorname{sn}\left(\frac{\sigma}{C}, k\right), \quad \tau'(\tau) = \operatorname{sn}\left(\frac{\tau}{C}, k'\right). \quad (41)$$

Из (13) и (19) имеем зависимость σ и τ от исходных полярных координат

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r \cos \theta}{1-r \cos \theta}, \quad \tau = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (42)$$

В обозначениях (38) решение для давления из (39) и (37) представится в виде

$$p = \beta \int_0^{\bar{\tau}} X \cos Y d\varphi + \beta \int_{-1}^{\bar{\tau}} X \sin Y d\varphi. \quad (43)$$

Для расчета поля давления по заданным U , V и ε необходимо использовать следующие формулы (последовательно): (16), (19), (21), (24), (25), (26), (27), (42), (40), (38), (39), (35), (43).

§ 6. Форма волнового фронта

Из (3), (6), (8) и (22) имеем для функции $\bar{\chi}$ следующую задачу Коши

$$\frac{d^2 \bar{\chi}}{dy^2} = -\frac{B}{V} \frac{1}{y} \frac{\partial p}{\partial y}$$

при

$$\bar{y} = -m_1, \quad \bar{\chi} = -\varepsilon U m_1, \quad \frac{d\bar{\chi}}{dy} = \varepsilon U,$$

а ее решение

$$\begin{aligned} \bar{\chi} = & \frac{B}{C^2 m_1} \int_0^{\pi - \arccos(\bar{y}/m_1)} \int_0^{\pi - \arccos(y/m_1)} \operatorname{Re} \Gamma(\tau) \times \\ & \times \frac{V(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2) \sqrt{(\Phi^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}}{\cos \tau} d\bar{\tau} d\tau + \varepsilon U m_1. \end{aligned}$$

В последнем соотношении символ Φ употреблен для выделения величин, переменных при интегрировании по τ , тогда как φ в этом соотношении зависит от $\bar{\tau}$, причем $\Phi(\tau) = \varphi(\bar{\tau})$ при $\tau = \bar{\tau}$. Такой же смысл имеет и величина $\bar{y}$: $\bar{y}(\bar{\tau}) = y(\tau)$ при $\tau = \bar{\tau}$.

Вычислительный центр
Московского государственного университета

Поступила 15.11.1965

Ս. Մ. ՏԵՐ-ՄԻՆԱՍՅԱՆԶ

ՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՅՎԱԾ ՍՏՈՐԻՆ ԿԻՍԱՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ
ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Ստորին կիսատարածությունն զրադեցնող սեղմելի հեղուկի հորիզոնական ազատ մակերևույթի մի մասին հաստատուն ճնշում է կիրառված ալիպեն, որ նրա ճակատը ալի մակերևույթի երկայնությամբ շարժվում է հաստատուն մեծ արագությամբ (տես պատկեր 1), որի հակադարձ մեծությունը հանդիսանում է հարթ ալտոմոդելային խնդրի փոքր պարամետրը: Թույլատրվում է ուսումնասիրել շարժման ալտոմոդելայնությունը չխախտող վիճակի հալասարույթների լայն դաս: Դիֆրակցիայի տիրույթի արտապատկերումը վերին կիսահարթության վրա, Չալլիդիլիի ձևափոխումը, հալասարույթների եզրային պայմանների գծայնացումը հարվածային ճակատում թույլ են տալիս ստանալ Ռիման-Գիլբերտի համասեռ եզրային խնդրի անալիտիկ ֆունկցիայի համար, որի կեղծ ու իրական մասերը հանդիսանում են որոնելի ճնշման մասնավոր ածանցյալները ըստ ալտոմոդելային կոորդինատների: Լուծումը ճնշման համար տրվում է սեղուլյար քառակուսային հավասարումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. ГИФМЛ, М., 1958.
3. Lighthill M. J. The diffraction of blast I. Proceedings of the Royal society, A198, 1949.
4. Lighthill M. J. The diffraction of blast II. Proceedings of the Royal society, A200, 1950.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИТТЛ, 1948.
6. Сикроский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ, М.—Л., 1936.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. ГИТТЛ, 1948.