

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. АГАЛОВЯН

ОБ УТОЧНЕНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА
АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН*

В работе делается попытка построить теорию изгиба анизотропной пластинки малой толщины без какого-либо предположения, обычно принимаемого в классической теории. Применяя метод асимптотического интегрирования [1, 2], доказываем, что, исходя из уравнений трехмерной задачи теории упругости, можно представить изгибное состояние в пластинке в виде суммы трех напряженных состояний. Первое из напряженных состояний определяется построенным основным итерационным процессом и распространяется на всю пластинку, при этом исходным приближением этого итерационного процесса определяется напряженное состояние, эквивалентное классической теории [3, 4].

Дважды вспомогательными процессами определяются напряженные состояния, быстро затухающие при удалении от краев пластинки. Этими процессами учитываются краевые эффекты.

Интегралы, определяемые этими процессами, в сумме содержат столько произволов, сколько необходимо, чтобы удовлетворить различным граничным условиям.

§ 1. Основной итерационный процесс

Рассмотрим ортотропную пластинку толщиной $2h$, которая принимается малой величиной по сравнению с двумя другими размерами. Выберем оси x, y декартовой системы координат в срединной плоскости пластинки, ось z — перпендикулярной к ней и потребуем, чтобы положительные направления этих осей совпадали с главными направлениями упругости. Основные уравнения теории упругости для ортотропного тела имеют вид [3, 4]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (x, y, z), \quad (1.1)$$

соотношения деформация — напряжение

* Работа была доложена автором на V Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Москва, 3–6 февраля 1965 года).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\tau_x + a_{12}\tau_y + a_{13}\tau_z \quad (x, y, z) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44}\tau_{yz}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a_{66}\tau_{xy}.$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что (x, y, z) означает, что существуют еще два соотношения вида (1.1), (1.2), получающиеся из этих циклической перестановкой (x, y, z) , (u, v, w) , индексов (1, 2, 3).

Граничные условия: пусть на наружной и внутренней плоскостях пластинки ($z = \pm h$) заданы

$$\tau_z = \pm \frac{1}{2} p(x, y), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (1.3)$$

где $p(x, y)$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

Учитывая (1.3), из (1.1) можно написать

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (1.4)$$

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3) и условиями закрепления на боковых поверхностях пластинки применим метод, развитый Гольден-аейзером А. Л. [1].

Назовем основным итерационный процесс, позволяющий находить напряженные состояния, не обладающие свойством быстрого затухания при удалении от бокового края пластинки. При построении этого процесса принимается, что напряжения и перемещения не слишком быстро меняются по переменным (x, y) , тогда как в направлении z эти величины меняются быстро. Произведя замену перемен- ной по формуле

$$z = h\zeta, \quad (1.5)$$

будем считать, что по переменным (x, y, ζ) быстрота изменения напряжений и перемещений будет не слишком велика. В силу (1.5) соотношения (1.1), (1.2) примут вид

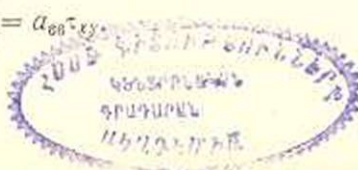
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} = 0 \quad (x, y), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_z}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\tau_x + a_{12}\tau_y + a_{13}\tau_z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\tau_x + a_{22}\tau_y + a_{23}\tau_z,$$

$$h^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = a_{13}\tau_x + a_{23}\tau_y + a_{33}\tau_z, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + h^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = a_{55}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = a_{44}\tau_{yz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}.$$



Решение системы (1.6) будем искать в виде

$$Q = h^{-r} \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} Q^{(s)}, \quad (1.7)$$

где Q — любое из напряжений или перемещений.

Принимается, что $Q^{(s)} = 0$ при $s < 1$.

r — целое число, различное для различных напряжений и перемещений, которое нужно подобрать так, чтобы после подстановки (1.7) в (1.6) и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициентов при всех степенях h , начиная с нижней, получалась непротиворечивая последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (1.7). Такие значения r называются непротиворечивыми. Величину r выберем следующим образом

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \rightarrow r = z + 2, \quad (\tau_{yz}, \tau_{xz}) \rightarrow r = z + 1, \quad \sigma_z \rightarrow r = z, \\ (u, v) \rightarrow r = z + 2, \quad w \rightarrow r = z + 3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив (1.7) в (1.6) и учитывая (1.8), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial z} &= 0 \quad (x, y), \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s)} + a_{13}\sigma_z^{(s-2)}, \\ \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x^{(s)} + a_{22}\sigma_y^{(s)} + a_{23}\sigma_z^{(s-2)}, \\ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial z} &= a_{13}\sigma_x^{(s-2)} + a_{23}\sigma_y^{(s-2)} + a_{33}\sigma_z^{(s-4)}, \\ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial z} &= a_{55}\tau_{xz}^{(s-2)}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial z} = a_{44}\tau_{yz}^{(s-2)}, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} &= a_{66}\tau_{xy}^{(s)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение неоднородной системы (1.9) будем искать как сумму общего интеграла однородной системы, получающейся, если в (1.9) отбросить величины с индексом, меньшим s , и частного интеграла системы (1.9), в котором все величины с верхним индексом, меньшим s , рассматриваются как известные, т. е. представим

$$Q^{(s)} = Q_i^{(s)} + Q^*(s). \quad (1.10)$$

Основной итерационный процесс теперь заключается в последовательном определении величин $Q^{(s)}$ в порядке возрастания индекса s . Интегрируя получаемую из (1.9) однородную систему по ζ , получим

$$\begin{aligned}
 w_l^{(s)} &= w_0^{(s)}, \quad u^{(s)} = \zeta u_1^{(s)}, \quad (x, y), \\
 \sigma_{xi}^{(s)} &= \tau_{xi}^{(s)} \quad (x, y), \quad \tau_{xyi}^{(s)} = \tau_{xyi}^{(s)}, \\
 \tau_{xz}^{(s)} &= \tau_{xz}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} \quad (x, y), \quad \sigma_{zi}^{(s)} = \tau_{zi}^{(s)} + \tau_{zi}^{(s)},
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}
 u_1^{(s)} &= -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x} \quad (x, y), \quad \sigma_{xi}^{(s)} = \frac{1}{a} \left[-a_{22} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial y^2} \right] \quad (x, y), \\
 \tau_{xy}^{(s)} &= -\frac{2}{a_{66}} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} \right) \quad (x, y), \\
 \sigma_{zi}^{(s)} &= -\left[\frac{\partial \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} \right], \\
 \sigma_{zi}^{(s)} &= -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^2 \tau_{xi}^{(s)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(s)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y^2} \right], \\
 a &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отметим, что в (1.11) принято, что величины, имеющие внизу дополнительный числовой индекс, умножаются на ζ в степени, равной этому числу, и являются функциями двух переменных x и y .

Частный интеграл системы (1.9) можно найти следующим образом

$$\begin{aligned}
 w^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} [a_{12} \tau_{xz}^{(s-2)} + a_{23} \tau_{yz}^{(s-2)} + a_{33} \tau_{zz}^{(s-4)}] d\zeta, \\
 u^{*(s)} &= a_{55} \int_0^{\zeta} \tau_{xz}^{(s-2)} d\zeta - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta} w^{*(s)} d\zeta, \\
 v^{*(s)} &= a_{44} \int_0^{\zeta} \tau_{yz}^{(s-2)} d\zeta - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta} w^{*(s)} d\zeta, \\
 \tau_{xy}^{*(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left[\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial x} \right], \\
 \sigma_{xi}^{*(s)} &= \frac{1}{a} \left[a_{22} \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial y} \right] + B_{12} \tau_{zz}^{(s-2)} \quad (x, y, 1, 2), \\
 \tau_{xz}^{*(s)} &= -\int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \tau_{xi}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{*(s)}}{\partial y} \right] d\zeta, \quad (x, y) \\
 \tau_{yz}^{*(s)} &= -\int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \tau_{yz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{*(s)}}{\partial y} \right] d\zeta,
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$B_{12} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a}.$$

Очевидно, что величины, отмеченные звездочкой, будут являться функциями от x, y, ζ , более того, по ζ они представляют собой полиномы. При $s=1$ и $s=2$, как видно из (1.13), эти величины равны нулю, так как $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$.

Теперь потребуем, чтобы напряжения, вычисляемые при помощи основного итерационного процесса, удовлетворяли граничным условиям (1.3) и (1.4), более того, потребуем, чтобы

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} p, \quad \sigma_z^{(s)} = 0 \quad (s > 1),$$

$$\frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial z} = 0, \quad \tau_{xz}^{(s)} = 0, \quad \tau_{yz}^{(s)} = 0 \quad (s \geq 1) \quad \text{при } z = h \quad (\zeta = 1). \quad (1.14)$$

Так как задача об изгибе пластинки обратно симметрична, т. е. принимается, что искомое напряженное и деформированное состояние пластинки обратно симметрично относительно плоскости xoy , то аналогичные условия будут автоматически выполняться при $z = -h$.

Учитывая (1.7), (1.8) и (1.11), представим (1.14) в виде

$$h^{s-1} (\sigma_{23}^{(s)} + \sigma_{21}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}) = \frac{1}{2} p_s, \quad \text{где } p_1 = p, \quad p_s = 0 \quad \text{при } s > 1, \quad (1.15)$$

$$h^{s-2} \left(3\sigma_{23}^{(s)} + \sigma_{21}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial x} \right) = 0, \quad h^{s-2} (\tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} + \tau_{xz}^{*(s)}) = 0, \quad (x, y)$$

Решим эту систему относительно $\sigma_{21}^{(s)}$, $\sigma_{23}^{(s)}$, $\tau_{xz0}^{(s)}$, $\tau_{y20}^{(s)}$, принимая, что внешняя нагрузка $p(x, y)$ не зависит от h , величины $Q^{(s)}$ и $Q^{*(s)}$ также не должны зависеть от h . Учитывая, что величины, отмеченные звездочкой, отличны от нуля лишь при $s > 2$ и положив $x = 0$, получим

$$\sigma_{23}^{(1)} = -\frac{1}{4} p, \quad \sigma_{21}^{(1)} = \frac{3}{4} p, \quad \sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial x} \right), \quad (s > 1),$$

$$\sigma_{21}^{(s)} = -\frac{1}{2} \left(3\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial x} \right) \quad (s > 1), \quad (1.16)$$

$$\tau_{xz0}^{(s)} = -\tau_{xz2}^{(s)} - \tau_{xz}^{*(s)} \quad (x, y).$$

Как видно из (1.16), $\sigma_{23}^{(1)}$ — известная величина, так как $p(x, y)$ — заданная функция; $\sigma_{23}^{(2)} = 0$. Подставив значения $\sigma_{23}^{(1)}$ и $\sigma_{23}^{(2)}$ в уравнения (1.12), можно из них найти остальные $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$, а учитывая эти значения, из (1.13) определяются величины со звездочкой. При $s > 2$ $\sigma_{23}^{(s)}$ выражается через величины со звездочкой, это значит, что при

любых s можно считать $\sigma_{23}^{(s)}$ известной величиной, если уже построены $(s-2)$ первых приближений и, следовательно, (1.12) образуют систему, из которой можно определить

$$u_1^{(s)}, v_1^{(s)}, w_0^{(s)}, \sigma_{x1}^{(s)}, \sigma_{y1}^{(s)}, \tau_{xy1}^{(s)}, \tau_{xz2}^{(s)}, \tau_{yz2}^{(s)}.$$

Решение этой системы приводится к следующему неоднородному уравнению четвертого порядка относительно $w_0^{(s)}$

$$D_1 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial y^4} = -\frac{\sigma_{23}^{(s)}}{2}, \quad (1.17)$$

где

$$D_1 = \frac{a_{22}}{12a}, \quad D_2 = \frac{a_{11}}{12a}, \quad D_3 = \frac{1}{12} \left(\frac{2a}{a_{66}} - a_{11} \right) = D_1 \nu_{12} + \frac{G_{12}}{6}.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение при $s=1$ совпадает с уравнением изгиба анизотропной пластинки по классической теории [4], для этого нужно учитывать, что $w_0^{(1)} = h^3 w^*$.

Таким образом, исходное приближение основного итерационного процесса совпадает с классической теорией изгиба анизотропной пластинки. Легко проверить, что уравнение (1.17) для изотропного тела превращается в неоднородное бигармоническое уравнение. Из этого уравнения, как частный случай, можно еще получить соответствующее уравнение для изгиба трансверсально изотропной пластинки.

В заключение этого раздела заметим, что если определить $\tau_{xz0}^{(s)}$, $\tau_{yz0}^{(s)}$ и $\sigma_{z1}^{(s)}$ из уравнений (1.16), то последнее соотношение (1.12) для $\sigma_{23}^{(s)}$ удовлетворится тождественно, так что это уравнение не является независимым уравнением и не будет влиять на ход получения (1.17).

§ 2. Вспомогательный итерационный процесс

Вследствие особенностей загрузки краев пластинки у этих краев возникают дополнительные краевые напряжения, которые, будучи локальными, могут быть соизмеримы с главными напряжениями основного напряженного состояния, поэтому их учет имеет особенно важное значение, однако учет этих напряженных состояний невозможно описывать уравнениями основного итерационного процесса так как этими уравнениями описываются вообще напряженные состояния, не затухающие по удалении от краев пластинки, между тем напряжения краевого эффекта быстро затухают по удалении от краев. Для учета этих напряжений, следуя А. Л. Гольденвейзеру [1], будем строить вспомогательный итерационный процесс для анизотропных пластинок, при помощи которого можно находить напряженные состояния, сколь угодно быстро затухающие при удалении от некоторой фиксированной линии плоскости xoy . Для простоты примем, что эта линия есть $x=0$, а затухание происходит в сторону $x < 0$.

* У Лехницкого толщина пластинки принята за h , у нас эта толщина $-2h$.

В уравнениях (1.1) и (1.2) перейдем к новым переменным по формулам

$$x = h\xi, \quad z = h\zeta. \quad (2.1)$$

Эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} h^{-1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} &= 0, & h^{-1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial z_y}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} &= 0, \\ h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_z}{\partial \zeta} &= 0, \\ h^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$h^{-1} \frac{\partial w}{\partial \xi} = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; \quad h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}\tau_{yz}.$$

$$h^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = a_{35}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \xi} = a_{36}\tau_{xy}.$$

Будем предполагать, что скорость изменения искомых величин по переменным ξ , y , ζ не слишком велика. Решение системы (2.2) представим в виде

$$R = h^q \sum_{s=1}^{s=S} h^{(s-1)} R^{(s)}, \quad (2.3)$$

где R — любое из напряжений и перемещений.

Считаем, что $R^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$, q — целое число, различное для различных напряжений и перемещений и выбирается так, как выбирается число r в основном итерационном процессе. Для вспомогательного итерационного процесса существуют два варианта непротиворечивых значений q .

Первый вариант

$$\begin{aligned} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q &= -x, & (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}) \rightarrow q &= -x + 1, \\ (u, w) \rightarrow q &= -x + 2, & v \rightarrow q &= -x + 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

второй вариант

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}) \rightarrow q &= -\lambda + 1, & (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q &= -\lambda + 2, \\ (u, w) \rightarrow q &= -\lambda + 2, & v \rightarrow q &= -\lambda + 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(x, λ — пока произвольные числа).

Этим двум вариантам непротиворечивых значений q соответствуют следующие два варианта вспомогательного итерационного процесса, получающиеся из уравнений (2.2).

Первый вариант

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial y} = a_{44} \tau_{yz}^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial y} = a_{66} \tau_{xy}^{(s)}, \quad (2.6) \\
& \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{13} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} = a_{12} \sigma_x^{(s)} + a_{22} \sigma_y^{(s)} + a_{23} \sigma_z^{(s)}, \quad (2.7) \\
& \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_x^{(s)} + a_{23} \sigma_y^{(s)} + a_{33} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{55} \tau_{xz}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Второй вариант

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{13} \sigma_z^{(s)}, \\
& \frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial y} = a_{12} \sigma_x^{(s)} + a_{22} \sigma_y^{(s)} + a_{23} \sigma_z^{(s)}, \quad (2.8) \\
& \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_x^{(s)} + a_{23} \sigma_y^{(s)} + a_{33} \sigma_z^{(s)}, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{55} \tau_{xz}^{(s)}, \\
& \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.9) \\
& \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial y} = a_{44} \tau_{yz}^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} = a_{66} \tau_{xy}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первый вариант вспомогательного итерационного процесса. Система (2.6) при пренебрежении членами с индексом $(s-2)$ составляет полную систему относительно неизвестных $\tau_{xy}^{(s)}$, $\tau_{yz}^{(s)}$, $v^{(s)}$. Поэтому общее решение (2.6) представим в виде

$$R^{(s)} = R_1^{(s)} + R_1^{*(s)}, \quad (2.10)$$

где $R_1^{(s)}$ — интеграл однородной системы, получающийся из (2.6), если принять величины с индексом $(s-2)$ равными нулю. $R_1^{*(s)}$ — частный интеграл системы (2.6), где величины с верхним индексом $(s-2)$ считаются известными.

Система (2.7) составит полную систему относительно неизвестных $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_y^{(s)}$, $\tau_{xz}^{(s)}$, $\sigma_z^{(s)}$, $u^{(s)}$, $w^{(s)}$, если считать $\tau_{xy}^{(s)}$, $\tau_{yz}^{(s)}$, $v^{(s)}$ известными величинами, определяемыми из системы (2.6). Поэтому решение этой системы представим опять в виде (2.10), где $R_i^{(s)}$ будет означать частное решение системы (2.7), где принимается

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)}, \quad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)}, \quad v^{(s)} = v_1^{(s)},$$

$R_i^{(s)}$ — частное решение системы (2.7), если положить

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)}, \quad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)}, \quad v^{(s)} = v_1^{(s)}$$

и считать эти величины известными.

Решение однородной системы, соответствующей системе (2.6), приводится к отысканию функции $\Psi^{(s)}(\xi, \zeta, y)$, удовлетворяющей следующему уравнению

$$a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi^2} + a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, вводя функцию напряжений $\Psi^{(s)}$ по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)} &= a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi^2}, & \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)} &= a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \\ v^{(s)} = v_1^{(s)} &= a_{44} a_{66} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

мы удовлетворим однородной системе (2.6), если $\Psi^{(s)}$ будет удовлетворять уравнению (2.11).

Решая уравнение (2.11), найдем $\Psi^{(s)} = \Psi^{(s)}(\xi, \zeta)$, где в $\Psi^{(s)}$ переменная y будет входить в качестве параметра. Для нахождения частного решения (2.7) подставим туда значения $\tau_{xy1}^{(s)}$, $\tau_{yz1}^{(s)}$, $v_1^{(s)}$. Получается следующая система

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a_{44} \frac{\partial^3 \Psi^{(s)}}{\partial y \partial \xi^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a_{66} \frac{\partial^3 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta \partial y}, \\ \sigma_y^{(s)} &= -B_1 \sigma_x^{(s)} - B_2 \sigma_z^{(s)} + B_3 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} &= A_{11} \sigma_x^{(s)} + A_{12} \sigma_z^{(s)} + A_3 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = A_{12} \sigma_x^{(s)} + A_{22} \sigma_z^{(s)} + A_4 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{35} \tau_{xz}^{(s)},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}}, & A_{12} &= \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{22}}, \\
 A_{22} &= \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{a_{22}}, & A_3 &= \frac{a_{44}a_{66}a_{12}}{a_{22}}, & A_4 &= \frac{a_{44}a_{66}a_{23}}{a_{22}}, \\
 B_1 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & B_2 &= \frac{a_{23}}{a_{22}}, & B_3 &= \frac{a_{44}a_{66}}{a_{22}}.
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая (2.11), нетрудно проверить, что мы удовлетворим системе (2.13), если примем

$$\begin{aligned}
 z_{,x}^{(s)} = z_{,x1}^{(s)} &= -2a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial y \partial \xi}, & z_{,xz}^{(s)} = z_{,xz1}^{(s)} &= -a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \\
 z_{,y}^{(s)} = z_{,y1}^{(s)} &= (2B_1 a_{44} + B_3) \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, & z_{,z}^{(s)} = z_{,z1}^{(s)} &= 0, \\
 u^{(s)} = u_1^{(s)} &= (A_3 - 2A_{11}a_{44}) \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial y},
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$w^{(s)} = w_1^{(s)} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int C_1 \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} d\xi + \int C_2 \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} d\xi \right],$$

где

$$C_1 = 2A_{11}a_{44} - A_3 - a_{55}a_{66}, \quad C_2 = A_4 - 2A_{12}a_{44}.$$

В этом варианте вспомогательного итерационного процесса, если определены $z_{,xy}^{(s)}$, $z_{,yz}^{(s)}$, $\psi^{(s)}$, то остальные неизвестные определяются по формулам (2.15), поэтому эти неизвестные назовем основными, а соответствующую ей разрешающую систему однозначных уравнений (2.6) — основной системой, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений задачи о кручении анизотропных призматических стержней с осью, проходящей вдоль оси y . Решение этой системы приводится к нахождению функции $\Psi^{(s)}$, удовлетворяющей уравнению (2.11). Нетрудно проверить, что для изотропного тела уравнение (2.11) превращается в гармоническое уравнение. Отметим также, что для изотропного тела $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $w^{(s)} = 0$, что согласуется с приведенным в работе [1] результатом.

Теперь рассмотрим второй вариант вспомогательного итерационного процесса. Как и в первом варианте, решения систем (2.8) и (2.9) будем искать в виде

$$R^{(s)} = R_{II}^{(s)} + R_{II}^{*(s)}. \quad (2.16)$$

Для системы (2.8) $R_{II}^{(s)}$ означает общее решение однородной системы, которая получается из (2.8), если принять там величины с верхним индексом $(s-2)$ равными нулю. $R_{II}^{*(s)}$ — частное решение системы (2.8), в которой величины с верхним индексом $(s-2)$ рассматриваются как известные.

Для системы (2.9) $R_{11}^{(s)}$ — частное решение этой системы, если положить

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{(s)}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{(s)}, \quad \sigma_y^{(s)} = \sigma_{y11}^{(s)}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{(s)}, \quad u^{(s)} = u_{11}^{(s)}, \quad w^{(s)} = w_{11}^{(s)}$$

и считать эти величины известными.

$R_{11}^{*(s)}$ — частный интеграл неоднородной системы (2.9), если в ней принять

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{*(s)}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{*(s)}, \quad \sigma_y^{(s)} = \sigma_{y11}^{*(s)}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{*(s)}, \\ u^{(s)} = u_{11}^{*(s)}, \quad w^{(s)} = w_{11}^{*(s)}$$

и считать эти величины известными.

Очевидно, что $R_{11}^{*(1)}$ и $R_{11}^{*(2)}$ равны нулю.

Покажем, что построение решения $R_{11}^{(s)}$ сводится к отысканию некоторой функции $\Phi^{(s)}(\xi, \zeta)$, которая удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных четвертого порядка.

Отбросив в (2.8) все величины с индексом $(s-2)$ и исключив $\sigma_y^{(s)}$, получим систему

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = A_{11} \sigma_x^{(s)} + A_{12} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = A_{12} \sigma_x^{(s)} + A_{22} \sigma_z^{(s)}, \quad (2.17) \\ -\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{33} \tau_{xz}^{(s)},$$

где коэффициенты A_{ik} определяются по формулам (2.14).

Эти уравнения составляют полную систему относительно $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_z^{(s)}$, $\tau_{xz}^{(s)}$, $u^{(s)}$, $w^{(s)}$ и по смыслу совпадают с уравнениями плоской деформации в плоскости (ξ, ζ) . Заметим, что эта плоская деформация отличается от обычной плоской деформации. Здесь учтены свойства материала по третьему направлению (коэффициенты a_{21} , a_{23} , a_{22}). Поэтому, следуя С. А. Амбарцумяну [3], назовем ее обобщенной плоской деформацией.

Вводя функцию напряжения $\Phi^{(s)}$ по формулам

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (2.18)$$

решение системы (2.17) приведем к отысканию функции $\Phi^{(s)}$ из уравнения

$$A_{22} \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{12} + a_{33}) \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + A_{11} \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2.19)$$

В частности, когда имеем изотропное тело

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad 2A_{12} + a_{33} = 2 \frac{1 - \nu^2}{E},$$

уравнение (2.19) превращается в бигармоническое уравнение.

Теперь найдем частное решение системы (2.9), принимая $\varphi_y^{(s)} = \tau_{yz}^{(s)}$, $w^{(s)} = w_{II}^{(s)}$, $u^{(s)} = u_{II}^{(s)}$ за известные величины. Принимая

$$\tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yzII}^{(s)} = B_1 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial x^2 \partial y}, \quad \tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xyII}^{(s)} = B_2 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial x \partial y^2}, \quad (2.20)$$

мы удовлетворим первое уравнение системы (2.9). Из последних двух уравнений (2.9) можно получить

$$2 \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial x^2 \partial x} = a_{41} \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial x} + a_{66} \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial y},$$

откуда, учитывая (2.18), определяем $v_{II}^{(s)}$

$$v^{(s)} = v_{II}^{(s)} = B_3 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial y}, \quad (2.21)$$

где

$$B_3 = \frac{1}{2} (B_1 a_{44} + B_2 a_{66} + a_{55}).$$

Таким образом, во втором варианте вспомогательного итерационного процесса основной является система уравнений (2.17), из которой определяются $\sigma_{xII}^{(s)}$, $\sigma_{yII}^{(s)}$, $\sigma_{zII}^{(s)}$, $\tau_{xzII}^{(s)}$, $u_{II}^{(s)}$, $w_{II}^{(s)}$, так как остальные неизвестные легко определяются по формулам (2.20), (2.21).

Построение решений $R_I^{(s)}$ и $R_{II}^{(s)}$ каждое в отдельности сводится к интегрированию системы уравнений, эквивалентной одному неоднородному уравнению второго порядка и одному неоднородному линейному уравнению четвертого порядка. В частности, для изотропного тела эти уравнения превращаются соответственно в уравнения Пуассона и в неоднородное бигармоническое уравнение.

Напряженное и деформированное состояние в анизотропной пластинке представим теперь как сумму трех напряженных и деформированных состояний, определяемых основным итерационным процессом и двумя вспомогательными итерационными процессами и потребуем, чтобы определяемые таким образом напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.3). Так как мы уже потребовали, чтобы напряжения, определяемые основным итерационным процессом, удовлетворяли граничным условиям (1.3), то потребуем, чтобы в обоих вариантах вспомогательного итерационного процесса в каждом приближении выполнялись однородные граничные условия (1.3), тем самым будет обеспечено выполнение (1.3) для суммы интегралов, соответствующих всем трем итерационным процессам.

Потребуем также, чтобы интегралы, определяемые двумя вспомогательными процессами, обладали свойством затухания при удале-

нии от $\xi = 0$ в область $\xi < 0$, более того, потребуем, чтобы $R_1^{(s)}$, $R_1^{(s)}$, $R_{II}^{(s)}$, $R_{II}^{(s)}$ в отдельности обладали этим свойством. В общем эти интегралы содержат столько произволов, сколько необходимо, чтобы удовлетворить этим требованиям. Кроме того, в этих интегралах нужно сохранить некоторые произволы для удовлетворения граничных условий на боковых краях пластинки.

Как видно из формул (2.12) и (2.15), мы удовлетворим однородным граничным условиям (1.3), если потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (2.22)$$

Таким образом, нужно искать решение уравнения (2.11) в полубесконечном прямоугольнике $\xi \leq 0$, $\xi = \pm 1$. Найденное решение должно удовлетворять условию (2.22) и должно быть таким, чтобы определяемые по формулам (2.12) и (2.15) напряжения и перемещения обладали свойством затухания при $\xi \rightarrow -\infty$.

Во втором варианте вспомогательного итерационного процесса, как видно из формул (2.18) и (2.20), однородные граничные условия (1.3) будут удовлетворены, если потребовать, чтобы

$$\Phi^{(s)} = \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (2.23)$$

Таким образом, искомая функция $\Phi^{(s)}$ должна в полубесконечном прямоугольнике $\xi \leq 0$, $\xi = \pm 1$ удовлетворять уравнению (2.19), условию (2.23) и обладать свойством затухания при $\xi \rightarrow -\infty$. Отметим, что нахождение такой функции даже, когда $\Phi^{(s)}$ удовлетворяет бигармоническому уравнению (изотропное тело), связано с некоторыми математическими трудностями.

Рассмотрим первое однородное уравнение (2.6) и два первых однородных уравнения (т. е. в этих уравнениях величины с индексом $(s-2)$ принимаются равными нулю) системы (2.8). Будем интегрировать эти уравнения по ξ в пределах $(-\infty, 0)$, а по ξ в пределах $(-1, +1)$ и учитывать однородные граничные условия (1.3) и условие затухания напряжений при $\xi \rightarrow -\infty$. Получим

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xII}^{(s)} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \tau_{xII}^{(s)} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}^{(s)} d\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.24)$$

Теперь умножим первое однородное уравнение системы (2.8) на ξ , а второе на ξ и проинтегрируем в пределах $(-\infty, 0)$ по ξ и в $(+1, -1)$ по ξ . Сопоставляя результаты интегрирования, получим

$$\int_{-1}^{+1} \tau_{xII}^{(s)} d\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.25)$$

Условия (2.24) и (2.25) показывают, какие требования нужно накладывать на граничные значения $\sigma_{x11}^{(s)}$, $\tau_{x21}^{(s)}$, $\tau_{x31}^{(s)}$ при определении $R_1^{(s)}$ и $R_2^{(s)}$, чтобы обеспечить невозникновение разрывов на ребрах пластинки, т. е. при $\xi = 0$, $\zeta = \pm 1$. Эти условия имеют простой физический смысл. Они означают обращение в нуль нормального усилия, перерезывающих усилий и изгибающего момента, создаваемого краевыми нормальными и сдвигающими напряжениями, что в совокупности дает фактически условия равновесия (в смысле Сен-Венана) края пластинки под действием краевых напряжений.

Таким образом, напряженное и деформированное состояние в анизотропной пластинке можно представить в виде суммы трех напряженных и деформированных состояний. Первое определяется основным итерационным процессом, при этом исходное приближение для этого процесса совпадает с классической теорией изгиба анизотропной пластинки. Два остальных состояния определяются уравнениями двух вспомогательных процессов. В сумме интегралы, определяемые этими тремя процессами, содержат необходимое число произвольных, обеспечивающих выполнение всех граничных условий на краях пластинки.

Вопрос о граничных условиях для изотропных пластинок был подробно рассмотрен в работе [1]. Полученные там основные результаты верны и для анизотропной пластинки, так что мы снова не останавливаемся на этом.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. А. Амбарцумяну за проявленный постоянный интерес к работе.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский Государственный
университет

Поступила 5 III 1965

1. ԱՂԱՐԱՅԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՈՒՄԱՆ ԿԱՍԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀՇԳՐՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Աշխատության մեջ փորձ է արվում կառուցել անիզոտրոպ բարակ սալերի ծուփան տեսությունը, առանց կլասիկ տեսության մեջ կատարվող որևէ բնութագրության:

Կիրառելով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդը, ցույց է տրվում, որ, ելնելով առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի հավասարումներից, անիզոտրոպ բարակ սալի լարվածային ու զեֆորմացիոն վիճակները կարելի է ներկայացնել երեք լարվածային ու զեֆորմացիոն վիճակների գումարի տեսքով: Առաջին լարվածային վիճակը իջվում է հիմնական և որոշվում է կառուցված հիմնական խտեբացիոն պրո-

ցետով: Այն ճիշտ է ամբողջ սալի համար: Այդ պրոցեսի տեսչին մոտափոխությունը համարժեք է սալի ծոման կլասիկ տեսությունը:

Մյուս երկու պրոցեսներով, որոնք կոչվում են լրացուցիչ, որոշվում են ախպրի լարվածակն վիճակներ, որոնք արագ կերպով մարում են սալ եզրերից հեռանալու դեպքում: Այդ պրոցեսների միջոցով հաշվի են առնվում եզրային էֆեկտները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 26 вып. 4, 1962.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.