

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ
 ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Рассматривается задача об упругом равновесии прямоугольного параллелепипеда, когда граничные условия на поверхности параллелепипеда заданы в перемещениях. Подобная задача была рассмотрена в работе Э. Н. Байды [1], где задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Сначала общая задача приведена к шести аналогичным задачам, в которых перемещения равны нулю на пяти гранях и отличны от нуля только на шестой грани. Затем каждая из этих задач в свою очередь разбита на две: а) когда на шестой грани $u = v = 0$; $w \neq 0$, б) $u \neq 0$; $v \neq 0$; $w = 0$. Чтобы обеспечить разрешимость бесконечных систем, автор предполагает, что коэффициенты Фурье граничных функций являются величинами порядка не ниже $(lm\sqrt{n^2 + m^2})^{-1}$. Сходимость рядов исследуется только в открытой области.

В данной работе эта задача сводится к решению вполне регулярных бесконечных систем и доказывается, что, если граничные значения перемещений — непрерывные функции, то бесконечная система имеет решение, а ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, сходятся в замкнутой области $(-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b; -c \leq z \leq c)$.

§ 1. Находим компоненты вектора смещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, которые внутри области $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям Ляме

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= 0; & \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= 0; \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

и имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y; \end{aligned}$$

$$v = v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y; \quad (12)$$

$$w = w_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(3)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

где

$$u_0 = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z; \quad v_0 = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z;$$

$$w_0 = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Учитывая, что при отсутствии объемных сил перемещения являются бигармоническими функциями, можно неизвестные функции $f_{mn}^{(1)}(x)$, $\dots$, $\Psi_{lm}^{(3)}(z)$, входящие в выражения (2), представить в следующем виде:

$$f_{mn}^{(1)}(x) = A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn} x + B_{mn}^{(1)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{ch} k_{mn} x,$$

$$\varphi_{ln}^{(1)}(y) = M_{ln}^{(1)} \operatorname{sh} k_{ln} y + N_{ln}^{(1)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(1)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(1)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y, \\ (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

$$\Psi_{lm}^{(1)}(z) = K_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(1)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(1)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + G_{lm}^{(1)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z,$$

где

$$k_{mn} = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{ln} = \sqrt{\alpha_l^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{lm} = \sqrt{\alpha_l^2 + \beta_m^2}, \quad (14)$$

$A_{mn}^{(1)} \dots G_{lm}^{(1)}$ — постоянные интегрирования, между которыми существуют следующие соотношения:

$$k_{mn} A_{mn}^{(1)} + (3 - 4\nu) K_{mn} D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} = 0, \quad k_{mn} D_{mn}^{(3)} + \gamma_n C_{mn}^{(1)} = 0,$$

$$k_{mn} B_{mn}^{(1)} + (3 - 4\nu) k_{mn} C_{mn}^{(1)} + \beta_m A_{mn}^{(2)} + \gamma_n A_{mn}^{(3)} = 0, \quad k_{mn} C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0,$$

$$\beta_m D_{mn}^{(3)} - \gamma_n D_{mn}^{(2)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(1)} - \alpha_l F_{ln}^{(3)} = 0, \quad \alpha_l H_{lm}^{(2)} - \beta_m H_{lm}^{(1)} = 0, \quad (15)$$

$$\beta_m C_{mn}^{(3)} - \gamma_n C_{mn}^{(2)} = 0, \quad \gamma_n E_{ln}^{(1)} - \alpha_l E_{ln}^{(3)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(2)} - \beta_m G_{lm}^{(1)} = 0,$$

$$k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3 - 4\nu) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n E_{ln}^{(2)} + k_{ln} F_{ln}^{(3)} = 0,$$

$$k_{ln} N_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3 - 4\nu) E_{ln}^{(2)} + \alpha_l M_{ln}^{(1)} + \gamma_n M_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(3)} = 0,$$

$$k_{lm} K_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3 - 4\nu) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0,$$

$$k_{lm} L_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3 - 4\nu) H_{lm}^{(3)} + \alpha_l K_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} = 0, \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} = 0.$$

§ 2. Займемся решением задачи упругого равновесия прямоугольного параллелепипеда — $a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$, когда граничные условия заданы в перемещениях. Для простоты примем, что деформируемый параллелепипед имеет три плоскости симметрии $x=0$, $y=0$, $z=0$.

В силу симметрии, задачу можно решать для восьмой части параллелепипеда ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), требуя при этом, чтобы на плоскостях симметрии $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворялись условия симметрии

$$\begin{aligned} x=0 \quad u &= \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y=0 \quad v &= \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \\ z=0 \quad w &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u &= f_1(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ v &= f_2(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \quad \text{при } x=a, \\ w &= f_3(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \quad \begin{aligned} 0 \leq y \leq b, \\ 0 \leq z \leq c, \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u &= f_4(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \quad \text{при } y=b, \\ v &= f_5(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z, \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq z \leq c, \end{aligned} \\ w &= f_6(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u &= f_7(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \quad \text{при } z=c, \\ v &= f_8(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b; \end{aligned} \\ w &= f_9(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2a}; \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}; \quad \gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2c}. \quad (2.5)$$

Неизвестные функции $f_{mn}^{(1)}(x) \dots \Psi_{lm}^{(1)}(z)$ и соотношения (1.5) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(x) &= A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{ch} k_{mn} x, \\ f_{ma}^{(1)}(x) &= B_{ma}^{(1)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{ma}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x, \quad (i=2, 3); \\ \varphi_{ln}^{(2)}(y) &= M_{ln}^{(2)} \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(2)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y, \\ \varphi_{ln}^{(3)}(y) &= N_{ln}^{(3)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(3)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y, \quad (i=1, 3); \\ \Psi_{lm}^{(3)}(z) &= k_{lm}^{(3)} \operatorname{sh} k_{lm} z + G_{lm}^{(3)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z, \\ \Psi_{lm}^{(1)}(z) &= L_{lm}^{(1)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(1)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z, \quad (i=1, 2); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$C_{ma}^{(2)} = -\frac{\beta_m}{k_{mn}} D_{mn}^{(1)}, \quad k_{ma} A_{mn}^{(1)} + (3-4\nu) D_{mn}^{(1)} k_{mn} + \beta_m B_{ma}^{(2)} + \gamma_n B_{ma}^{(3)} = 0,$$

$$C_{ma}^{(3)} = -\frac{\gamma_n}{k_{mn}} D_{mn}^{(1)}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{k_{ln}} F_{ln}^{(2)}, \quad E_{ln}^{(3)} = -\frac{\gamma_n}{k_{ln}} F_{ln}^{(2)},$$

$$k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3-4\nu) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(3)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} = 0, \quad (2.7)$$

$$k_{lm} K_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3-4\nu) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} = 0,$$

$$H_{lm}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{k_{lm}} G_{lm}^{(3)}, \quad H_{lm}^{(2)} = -\frac{\beta_m}{k_{lm}} G_{lm}^{(3)},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Удовлетворив граничным условиям (2.2, 2.3, 2.4), получим ряд соотношений между коэффициентами интегрирования $A_{mn}^{(1)} \dots G_{lm}^{(3)}$. Разрешим эти соотношения вместе с (1.5) относительно неизвестных постоянных. Для последних получим выражения

$$D_{ma}^{(1)} = \frac{X_{mn}}{\beta_m \gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a}, \quad C_{ma}^{(2)} = -\frac{X_{mn}}{\gamma_n k_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn} a},$$

$$C_{ma}^{(3)} = -\frac{X_{mn}}{\beta_m k_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn} a},$$

$$B_{ma}^{(2)} = a \operatorname{th} k_{mn} a \frac{X_{mn}}{\gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a} + \frac{b_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a}, \quad F_{ln}^{(2)} = \frac{Y_n}{\alpha_l \gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b},$$

$$B_{ma}^{(3)} = a \operatorname{th} k_{mn} a \frac{X_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a} + \frac{c_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a}, \quad E_{ln}^{(3)} = -\frac{b}{a} \frac{Y_{ln}}{\alpha_l k_{ln}^2 \operatorname{ch} k_{ln} b},$$

$$A_{ma}^{(1)} = -[(3-4\nu) + k_{ma} a \operatorname{th} k_{mn} a] \frac{X_{mn}}{\beta_m \gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a} - \frac{\beta_m b_{mn} + \gamma_n c_{mn}}{k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a},$$

$$N_{ln}^{(1)} = \frac{b^2}{a} \operatorname{th} k_{ln} b \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} + \frac{d_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{b}{a} \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln}^2 \operatorname{ch} k_{ln} b},$$

$$N_{ln}^{(1)} = \frac{b}{a} \operatorname{th} k_{ln} b \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} + \frac{f_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}, \quad (2.8)$$

$$H_{lm}^{(1)} = -\frac{c}{a} \frac{Z_{lm}}{\beta_m k_{lm}^2 \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$M_{ln}^{(2)} = -\frac{b}{a} (3 - 4\nu + k_{ln} b \operatorname{th} k_{ln} b) \frac{Y_{ln}}{\gamma_n \alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} - \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n f_{ln}}{k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b},$$

$$L_{lm}^{(1)} = \frac{c^2}{a} \frac{Z_{lm}}{\beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} \operatorname{th} k_{lm} c + \frac{g_{lm}}{\operatorname{ch} k_{lm} c}, \quad H_{lm}^{(2)} = -\frac{c}{a} \frac{Z_{lm}}{\alpha_l k_{lm}^2 \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$L_{lm}^{(2)} = \frac{c^2}{a} \operatorname{th} k_{lm} c \frac{Z_{lm}}{\alpha_l k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} + \frac{h_{lm}}{\operatorname{ch} k_{lm} c}, \quad G_{lm}^{(3)} = \frac{Z_{lm}}{\alpha_l \beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$K_{lm}^{(3)} = -\frac{c}{a} (3 - 4\nu + k_{lm} c \operatorname{th} k_{lm} c) \frac{Z_{lm}}{\alpha_l \beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} - \frac{\alpha_l g_{lm} + \beta_m h_{lm}}{k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c}.$$

Входящие в (2.8) неизвестные постоянные X_{mn} , Y_{ln} , Z_{lm} должны быть определены из следующих систем бесконечных уравнений:

$$X_{mn} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{lmn} Y_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{lmn} Z_{lm} + P_{mn} = 0 \quad (m, n = 1, 2, \dots, \infty);$$

$$Y_{ln} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{lmn} X_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Z_{lm} + Q_{ln} = 0 \quad (l, n = 1, 2, \dots, \infty); \quad (2.9)$$

$$Z_{lm} + \sum_{n=1}^{\infty} e_{lmn} X_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{lmn} Y_{ln} + G_{lm} = 0 \quad (l, m = 1, 2, \dots, \infty),$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+m} \beta_m^2 k_{mn}}{a \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right|} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}, \\ b_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+n} \gamma_n^2 k_{mn}}{a \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right|} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}, \\ c_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+m} \alpha_l^2 k_{ln}}{b \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right|} \frac{1}{(\beta_m^2 + k_{ln}^2)^2}, \\ d_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{m+n} \gamma_n^2 k_{ln}}{b \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right|} \frac{1}{(\beta_m^2 + k_{ln}^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
e_{lmn} &= - \frac{4(-1)^{l+n} \alpha_l^2 k_{mn}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \frac{1}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2}, \\
f_{lmn} &= - \frac{4(-1)^{n+m} \beta_m^2 k_{lm}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \frac{1}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2}, \\
P_{mn} &= \frac{\beta_m \gamma_n k_{mn}}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \left[\frac{\beta_m b_{mn} + \gamma_n c_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{th} k_{mn} a - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+m} \frac{\beta_m \alpha_i}{\beta_m^2 + k_{in}^2} - \frac{2}{c} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+n} \frac{\gamma_n \alpha_i}{\alpha_i^2 + k_{mn}^2} - a_{mn} \right], \quad (2.11) \\
Q_{ln} &= \frac{a \alpha_l \gamma_n k_{ln}}{b \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right]} \left[\frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n f_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{th} k_{ln} b - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{l+m} \frac{\alpha_l b_{mn}}{\beta_m^2 + k_{ln}^2} - \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\gamma_n k_{lm}}{\gamma_n^2 + k_{ln}^2} - e_{ln} \right], \\
G_{lm} &= \frac{a \alpha_l \beta_m k_{lm}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \left[\frac{\alpha_l g_{lm} + \beta_m h_{lm}}{k_{lm}} \operatorname{th} k_{lm} c - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{\alpha_l c_{mn}}{\gamma_n^2 + k_{lm}^2} - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\beta_m f_{ln}}{\gamma_n^2 + k_{lm}^2} - q_{lm} \right].
\end{aligned}$$

Докажем, что бесконечные системы (2.9) вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены.

Пользуясь подобием бесконечных систем (2.9), докажем регулярность одной из бесконечных систем. Имея ввиду обозначения (2.10), получим

$$\begin{aligned}
S_{mn} &= \sum_{l=1}^{\infty} |a_{lmn}| + \sum_{l=1}^{\infty} |b_{lmn}| = \frac{4k_{mn}}{a \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right]} \times \\
&\times \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} \right\} = \frac{4k_{mn}^3}{a \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right]} \\
&\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} = \frac{\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Из (2.12) видно, что числа $S_{mn} < 1$. Представив эти числа в виде

$$S_{mn} = 1 - p_{mn},$$

легко видеть, что p_{mn} быстро стремится к пределу $\frac{2-4\nu}{3-4\nu} > 0$ при больших m и n . Отсюда видно, что системы (2.9) вполне регулярны при $0 < \nu < 0,5$.

Так как функции $f_1 \dots f_9$ являются значениями упругих перемещений на боковых плоскостях, то они должны быть непрерывными и иметь кусочно-непрерывные первые производные в соответствующих областях изменения. Кроме того, они должны удовлетворять условиям непрерывности на линиях пересечения двух соседних боковых плоскостей ($x=a, z=c$), ($x=a, y=b$), ($x=a, y=b$) и условиям симметрии на линиях ($y=b, z=0$), ($y=b, x=0$), ($x=a, y=0$), ($x=a, z=0$), ($z=c, x=0$), ($z=c, y=0$).

Представив коэффициенты разложения Фурье $a_{mn}, \dots, g_{lm}$ в виде

$$a_{mn} = \frac{bc}{4} \left\{ (-1)^{m+n} \frac{f_1(a, b, c)}{\beta_m \gamma_n} + (-1)^{n-1} \frac{f_{12}(a, b, 0)}{\beta_m \gamma_n^2} + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{f_{1,3}(a, 0, c)}{\gamma_n \beta_m^2} + O(n^{-2-\epsilon_1}, m^{-2-\epsilon_2}) \right. \\ \left. \dots \right\}$$

и подставляя эти выражения в (2.11), легко доказать, что свободные члены бесконечных систем P_{mn}, Q_{ln}, G_{lm} имеют порядок

$$P_{mn} = O(m^{-\epsilon_1}, n^{-\epsilon_2}),$$

$$Q_{ln} = O(e^{-\epsilon_3}, n^{-\epsilon_4}),$$

$$G_{lm} = O(e^{-\epsilon_5}, m^{-\epsilon_6}),$$

где

$$(\epsilon_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6).$$

Причем, если граничные значения перемещений u, v, w имеют непрерывные первые производные, то $\epsilon_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), т. е. в этом случае свободные члены бесконечных систем (2.9) ограничены сверху и при возрастании индексов стремятся к нулю. Когда же эти функции имеют кусочно-непрерывные первые производные (например, при вдавливании параллелепипеда острым жестким штампом), то некоторые из чисел $\epsilon_i = 0$, т. е. некоторые из свободных членов бесконечных систем, остаются только ограниченными (не стремятся к нулю). Но так как системы (2.9) оказались вполне регулярными, то это обстоятельство не затрудняет оценивать неизвестные коэффициенты X_{mn}, Y_{ln}, Z_{lm} с любой точностью [3]. Из уравнения обобщенного закона Гука и (1.2) найдем выражения для напряжений. Пользуясь оценками неизвестных коэффициентов бесконечных систем [2], легко доказать, что, если граничные значения перемещений имеют непрерывные первые производные, то двойные ряды, входящие в выражения напряжений,

будут сходиться в области ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$). Если же граничные функции имеют кусочно-непрерывные производные, то эти двойные ряды сходятся в открытой области ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$).

Ереванский политехнический
институт

Поступила 26 I 1965

Ս. Մ. ՍԱՅԱՆ

ՌԻԳԼԱՆԿՈՒՆ ԶՈՒԳԱԶԵՌՈՒՆԻՍԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում դիտարկվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի առաձգական հավասարակշռության խնդիրը, երբ զուգահեռանիստի $x = a$, $y = b$, $z = c$ նիստերի վրա եզրային պայմանները տրված են տեղափոխումներով և սիմետրիկ են զուգահեռանիստի $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ հարթությունների նկատմամբ:

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը, ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները լիովին ռեզոլվար են և ունեն վերինց սահմանափակ ու 0 -ի ձգող ազատ անդամներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Байда Э. Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. Л., 1961, стр. 30.
2. Минасян Р. С. О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, II, № 3, 1958.
3. Кантарович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гос-техиздат, М.—Л., 1950.