

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. М. СИМОНЯН

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматривается равновесие цилиндрической трубы, находящейся под действием теплового потока, а также внутреннего и наружного равномерных давлений, в условиях пластической наследственности при плоской деформации.

Решение этой задачи в предположении упругой работы материала дано в работе [2], а для случая линейной наследственности — в работе [3].

Работы [4] и [5] посвящены ползучести цилиндрических труб в упругой среде на основе уравнений нелинейной наследственности, приведенных в работе [6].

§ 1. Связь между деформациями и напряжениями

Зависимости между деформациями и напряжениями в случае отсутствия воздействия температуры при пластической наследственности в условиях объемной несжимаемости материала будут следующими [1]:

$$\varepsilon_r(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_r(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\varphi(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_\varphi(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_\varphi(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

$$\varepsilon_z(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_z(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_z(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3)$$

где

$$\sigma(t) = \frac{1}{3} [\sigma_r(t) + \sigma_\varphi(t) + \sigma_z(t)]$$

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\varphi z}^2 + \gamma_{rz}^2)}.$$

Уравнения (1), (2) и (3) вырождаются в уравнения линейной наследственности при условии несжимаемости материала, если положить

$$\varphi[\varepsilon_i(t)] = 2G; \quad C_1(t, \tau) = E \cdot C(t, \tau),$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести.

Рассмотрим теперь, какие коррективы следует внести в формулы (1)–(3) в случае переменной температуры.

Мы принимаем $C_1(t, \tau)$ не зависящим от координат, то есть будем брать его значения, соответствующие средней температуре материала трубы. В таком случае воздействие температуры выразится лишь в прибавлении к тензору деформаций шарового тензора, помноженного на $\alpha \Delta T(r, t)$, а интенсивность $\varepsilon_i(t)$, определяемая девиатором деформаций, останется без изменения.

Таким образом, в случае температурных воздействий форма зависимости между деформациями и напряжениями при пластической наследственности будет следующей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_r(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_\varphi(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_\varphi(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_z(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_z(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Функция $\Delta T(r, t)$ определяется по формуле

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0, \quad (7)$$

где $T(r, t)$ — температура в точке r в момент времени t , а T_0 — температура в трубе до загрузки (q_1, q_2), соответствующая отсутствию напряжений и деформаций.

§ 2. Постановка задачи и получение общих зависимостей

Рассматривается цилиндрическая труба (фиг. 1), находящаяся под воздействием внутреннего $q_1(t)$ и наружного $q_2(t)$ давлений и теплового потока, определяемого функцией $T(r, t)$. Задаемся также температурой T_0 , при которой фиксируются торцы трубы без приложения нагрузки.

Поставленная здесь задача с учетом гипотезы Дюамеля сводится к определению системы функций напряжений и деформаций, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_z}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad (10)$$

и также удовлетворяющих уравнениям (4), (5) и (6) и краевым условиям

$$\sigma_r|_{R_1} = q_1(t); \quad \sigma_r|_{R_2} = q_2(t), \quad (11)$$

где R_1 и R_2 — соответственно внутренний и наружный радиусы трубы.

Складывая (4), (5) и (6), получим условие несжимаемости материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = 3\alpha \Delta T(r, t). \quad (12)$$

Решая совместно уравнения (9), (10) и (12) относительно ε_r получим

$$r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + 2\varepsilon_r = 3\alpha \Delta T(r, t).$$

Решением этого уравнения будет

$$\varepsilon_r = \frac{A(t)}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr, \quad (13)$$

где $A(t)$ — пока произвольная функция от t .

Вычитывая (5) из (4), получим

$$[\varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t)] \varphi[\varepsilon_\theta(t)] = \sigma_r(t) - \sigma_z(t) - \int_{\varepsilon_1}^t [\sigma_r(\tau) - \sigma_z(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (14)$$

решением которого относительно $\sigma_r(t) - \sigma_z(t)$ будет

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) - \sigma_z(t) = & [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t)] \varphi[\varepsilon_\theta(t)] + \int_{\varepsilon_1}^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_z(\tau)] \times \\ & \times \varphi[\varepsilon_\theta(\tau)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

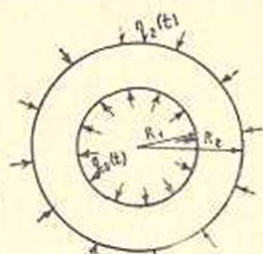
где $R(t, \tau)$ — резольвента интегрального ядра $\frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau}$.

Используя уравнения (8) и (9), можно записать уравнение (15) в следующем виде.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\partial \varepsilon_r(t)}{\partial r} \varphi[\varepsilon_\theta(t)] - \int_{\varepsilon_1}^t \frac{\partial \varepsilon_r(\tau)}{\partial r} \varphi[\varepsilon_\theta(\tau)] R(t, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Определим интенсивность $\varepsilon_i(r, t)$, учитывая осесимметричность задачи и условие плоской деформации. При использовании (9), (10), (12) и (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(r, t) = & \sqrt{\frac{1}{6} \cdot V(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_r^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2 - 3\alpha \Delta T \varepsilon_z} = \\ = & \left[\frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r \Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[\int r \Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \end{aligned}$$



Фиг. 1.

$$-3\alpha\Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2\Delta T(r, t)}{r^2} \int r\Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2\Delta T^2(r, t) \Big\}^{1/2}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и беря интеграл от обеих частей, получим

$$z_r(r, t) = M(r, t) + \int_{z_1}^t M(r, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} M(r, t) = & - \int \left[\frac{3\alpha}{r} \Delta T(r, t) - \frac{2A(t)}{r^3} - \frac{6\alpha}{r^3} \int r\Delta T(r, t) dr \right] \times \\ & \times \varphi \left\{ \frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r\Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[\int r\Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \\ & \left. - 3\alpha\Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2\Delta T(r, t)}{r^2} \int r\Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2\Delta T^2(r, t) \right\}^{1/2} dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции $A(t)$ и $B(t)$ определяются из краевых условий (11)

$$M(R_1, t) + \int_{z_1}^t M(R_1, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t) = q_1(t), \quad (20)$$

$$M(R_2, t) + \int_{z_1}^t M(R_2, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t) = q_2(t). \quad (21)$$

Вычитывая (20) из (21), получим

$$N(t) + \int_{z_1}^t N(\tau) R(t, \tau) d\tau = q_2(t) - q_1(t), \quad (22)$$

где

$$N(t) = M(r, t) \Big|_{R_1}^{R_2}. \quad (23)$$

Решая уравнение (22) относительно $N(t)$, получим

$$N(t) = \int_{z_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau + q_2(t) - q_1(t), \quad (24)$$

где $\Gamma(t, \tau)$ — резольвента ядра $-R(t, \tau)$.

Используя (19), (23) и (24), получим уравнение для определения функции $A(t)$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{2A(t)}{r^3} + \frac{6\alpha}{r^3} \int r\Delta T(r, t) dr - \frac{3\alpha}{r} \Delta T(r, t) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi \left\{ \frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r \Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[\int r \Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \\
& \left. - 3\alpha \Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2 \Delta T(r, t)}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2 \Delta T^2(r, t) \right\}^{1/2} dr = \\
& = q_2(t) - q_1(t) + \int_{t_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (25)
\end{aligned}$$

После определения $A(t)$ функция $B(t)$ определяется из (20) или (21), после чего $\tau_r(r, t)$ находим из (18), а $\sigma_z(r, t)$ — из (8).

Из уравнений (6) и (10) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_z(r, t) - \sigma(r, t) &= \int_{t_1}^t [\sigma_z(r, \tau) - \sigma(r, \tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\
&= -\alpha \Delta T(r, t) \varphi[z_1(t)]. \quad (26)
\end{aligned}$$

Решая (26) относительно $\sigma_z(r, t)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_z(r, t) &= \frac{1}{2} [\sigma_r(r, t) + \sigma_z(r, t)] - \\
&- \frac{3}{2} \left\{ \alpha \Delta T(r, t) \varphi[z_1(t)] - \int_{t_1}^t \alpha \Delta T(r, \tau) \varphi[z_1(\tau)] R(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению уравнения (25)

§ 3. Метод последовательного уточнения $A(t)$

Рассматриваем уравнение

$$\int_{R_1}^{R_2} F(A(t), r) dr = f_0(t), \quad (28)$$

где F и f_0 — заданные функции, причем f_0 — непрерывна, а F — непрерывна и дифференцируема по A , а $A(t)$ — искомая функция.

Положим

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} F(\eta(f), r) dr, \quad (29)$$

К функции $\eta(f)$, выбираемой нами, предъявляем требование непрерывности и дифференцируемости по f , а также удовлетворения

$$1 - \theta < B'(f) < 1 + \theta; \quad 0 < \theta < 1. \quad (30)$$

Наша задача будет заключаться в определении $f_n(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$B(f_n) = f_0 \text{ или } \eta(f_n) = A(t). \quad (31)$$

Рассмотрим последовательность, определяемую рекуррентной формулой

$$f_{n_{k+1}} = f_0 + f_{n_k} - B(f_{n_k}). \quad (32)$$

Здесь $f_{n_0} = f_0$.

Теорема. Последовательность $B(f_{n_k})$ равномерно сходится к f_0 .

Доказательство. Проинтегрировав неравенство (30) в пределах от $f_{n_{k-1}}$ до f_{n_k} , будем иметь

$$1 - \theta < \frac{B(f_{n_k}) - B(f_{n_{k-1}})}{f_{n_k} - f_{n_{k-1}}} < 1 + \theta. \quad (33)$$

Вычитывая из каждого члена неравенства (33) единицу и помножив полученное неравенство на $f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$, получим

$$|B(f_{n_k}) - B(f_{n_{k-1}}) - f_{n_k} + f_{n_{k-1}}| < \theta |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|. \quad (34)$$

Записывая формулу (32) для $(n+1)$ -го и n -го членов и вычитывая из второй полученной формулы первую, будем иметь

$$f_{n_{k+1}} - f_{n_{k+1}} = f_{n_{k+1}} + B(f_{n_k}) - f_{n_k} - B(f_{n_{k-1}}). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34), получим

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \theta |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|. \quad (36)$$

Применяя формулу (36) n раз, получим

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \theta^n |f_{n_1} - f_0|. \quad (37)$$

Вследствие непрерывности F , η и f_0 , имеем

$$|f_{n_1} - f_0| < C, \quad (38)$$

где C — конечная положительная постоянная.

С учетом (32) и (38) неравенство (37) запишется

$$|f_0 - B(f_{n_k})| < \theta^n C. \quad (39)$$

Из последнего вытекает равномерная сходимость $B(f_{n_k})$ к f_0 .

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию изложенного метода. Ясно, что если $\eta(f_0)$ является решением уравнения (28), то на фиг. 2 мы получим наклонную пунктирную прямую. Сплошной линией показана кривая, удовлетворяющая (30).

Принимая

$$\Delta f_0 = f_0 - B(f_0),$$

для f_{n_1} с использованием (32) получим

$$f_{n_1} = f_0 + \Delta f_0.$$

При втором приближении будем иметь

$$\Delta f_1 = f_0 - B(f_{u_1})$$

и

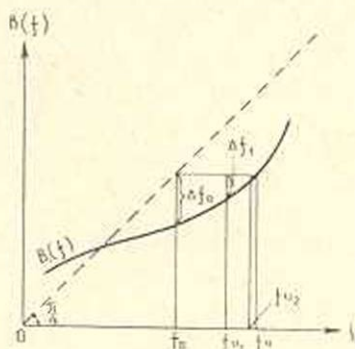
$$f_{u_2} = f_{u_1} + \Delta f_1.$$

Из фиг. 2 легко усмотреть что при $t=0$

$$f_{u_1} = f_0.$$

В заключение отметим, что если неравенство (30) удовлетворяется везде, кроме некоторой точки, где $B'(f) = 0$, то метод последовательных уточнений опять же применим.

Действительно, для применения этого метода достаточно удовлетворение неравенства (33), которое в данном случае будет иметь место при любом конечном, не равном нулю $f_{u_n} - f_{u_{n-1}}$. В случае же, когда $f_{u_n} - f_{u_{n-1}}$ бесконечно мало или равно нулю, мы из (32) получим бесконечно малое $B(f_{u_n}) - f_0$ или равенство $B(f_{u_n}) = f_0$, что уже является конечной целью при применении этого метода.



Фиг. 2.

§ 4. Случай линейного изменения температуры по толщине трубы

Как известно, в случае установившегося теплового потока у цилиндрических труб распределение температуры, соответствующее решению уравнения теплопроводности, должно быть по логарифмическому закону

$$\Delta T(r, t) = A \ln r + B.$$

Если пренебречь скоростью изменения температуры, то A и B могут здесь рассматриваться как функции от времени.

С определенным приближением мы здесь принимаем линейное распределение температуры по толщине трубы

$$\Delta T(r, t) = ar + b \quad (40)$$

В этом случае уравнение (25) существенно упростится и примет вид

$$\int_{k_1}^{k_2} \left(\frac{2A(t)}{r^2} - ar \right) \frac{1}{r} \varphi \left(\frac{1}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{2A(t)}{r^2} - ar \right)^2 + 3\pi^2 \Delta T^2} dr =$$

$$= q_2(t) - q_1(t) + \int_{\tau_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (41)$$

Как известно [7], для функции φ принимается степенная зависимость

$$\varphi(\xi) = K_0 \xi^{\mu-1}; \quad \mu = \frac{1}{m}; \quad 0 < \mu < 1, \quad (42)$$

где m — показатель ползучести.

Нетрудно видеть, что (41), как и (25), является частным случаем уравнения (28), так что здесь применим метод последовательных уточнений $A(t)$. В обозначениях § 3 здесь будем иметь

$$f_0(t) = q_2(t) - q_1(t) + \int_{\tau_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (43)$$

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right) \frac{k_0}{r} 2^{1-\mu} \left[\left(\frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} dr. \quad (44)$$

Условие (30) для функции $\eta(f)$ здесь запишется

$$0 < \frac{\partial \eta}{\partial f} 2^{2-\mu} K_0 \int_{R_1}^{R_2} \left[\left(\frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \times \\ \times \left[1 + \frac{\left(\frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 (\mu-1)}{\left(\frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2} \right] \frac{dr}{r^3} < 2. \quad (45)$$

Чем выражение в (45) ближе к единице, тем скорее будет сходиться последовательность (32).

Для функции $\eta(f)$ примем следующее выражение:

$$\eta(f) = \frac{a\alpha}{2} R_{cp}^2 + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{f R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m, \quad (46)$$

где

$$R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Так как m , вообще говоря, не предполагается целым, то для отрицательных f функция $\eta(f)$ из (46) не определена. Мы же в формуле (46) будем считать второе слагаемое $\eta(f)$ для $f < 0$ продолженным нечетно и это распространим на случай любого m , в том числе и целого.

Вышеуказанное условие применения формулы (46) запишется в виде

$$\frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{(-|f|) R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} - \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{|f| R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m. \quad (48)$$

При использовании (48) $\frac{\partial \eta(f)}{\partial f}$ будет определена и для отрицательных f и из (46) получим

$$\frac{\partial \eta(f)}{\partial f} = \frac{m \beta R_{cp}^2}{2} \frac{R_{cp}^m}{[2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)]^m} |f|^{m-1}. \quad (49)$$

Постоянной β из (46) мы будем задавать лишь положительные значения.

Используя это, а также (42) и (49), находим, что левое неравенство (45) удовлетворяется тождественно везде, кроме одной точки $f=0$, где выражение в (45) обращается в нуль. По сказанному в § 3 это обстоятельство, однако, оказывается приемлемым для применения метода.

Теперь запишем правое неравенство (45) с использованием (46):

$$\beta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\Omega^{\frac{m-1}{2m}}} \left\{ m + \frac{1-m}{\Omega} \left[\left(\frac{az R_{cp}^3}{r^2} - azr \right) \left(\frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R_{cp}^2}{r^2} \beta \right]^2 \right\} \left(\frac{R_{cp}}{r} \right)^3 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2, \quad (50)$$

где

$$\Omega = \left[\left(\frac{az R_{cp}^3}{r^2} - azr \right) \left(\frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m - \beta \frac{R_{cp}^2}{r^2} \right]^2 + \\ + 3az \Delta T^2 \left(\frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^{2m}.$$

Учитывая, что выражение в фигурных скобках в числителе левой части (50) может вообще получать значения в пределах от 1 до m , заменяем неравенство (50) более жестким

$$\beta \int_{R_1}^{R_2} \frac{m}{\Omega^{\frac{m-1}{2m}}} \left(\frac{R_{cp}}{r} \right)^3 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2.$$

В случае, когда $\Delta T(r, t) \neq 0$, выражение внутри фигурных скобок в (51) не обращается в нуль и тогда соответствующим подбором малого β можно удовлетворить (51). Если же $\Delta T(r, t) = 0$ в некоторой точке r_1 , то выражение это обратится в нуль лишь при

$$\beta = \frac{az r_1^3}{R_{cp}^2} \left(\frac{R_{cp}^3}{r^3} - 1 \right) \left(\frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m. \quad (52)$$

Если $r_1 \neq R_{cp}$, то при уменьшении β условием для неограниченности подынтегрального выражения в (51) будет увеличение f . Таким образом, при достаточно малом β неравенство (51) будет удовлетворяться всюду, кроме, регулируемой малостью β , области боль-

ших f . Если же $r_1 = R_{cp}$, то во всяком случае при конечном, не равном нулю f , подынтегральное выражение конечно при любом не равном нулю β и, следовательно, подбор β для удовлетворения (51) возможен. Отметим, что в нашем численном примере (§ 8) использование (46) при $\beta = 1$ оказалось приемлемым и для области, включающей точку $f = 0$.

Принять для β заведомо малое значение не выгодно, так как при этом $B(f)$ будет малым, а это снижает скорость сходимости последовательности (32). Нам представляется, что в практических случаях удобно брать $\beta = 1$, как мы и сделали в нашем численном примере (§ 8).

Функция $A(t)$ здесь определяется (§ 3) по формуле

$$A(t) = \frac{\alpha z R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{f_{uz} R_{cp}}{2^{1-\beta} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m, \quad (53)$$

зная, что

$$A(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha z R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{f_{uz} R_{cp}}{2^{1-\beta} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m \right], \quad (54)$$

причем приближенность (53) контролируется асимптотическим равенством

$$B(f_{uz}) \approx f_0. \quad (55)$$

Перейдем теперь к рассмотрению $C_1(t, \tau)$.

Принимая экспоненциальную зависимость и учитывая отсутствие старения, будем иметь

$$C_1(t, \tau) = C_0' [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (56)$$

Ядром интегрального уравнения (14) будет

$$\frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (57)$$

Используя метод определения резольвенты Работнова [9], получим

$$R(t, \tau) = -\gamma C_0' e^{-\gamma(C_0' + 1)(t-\tau)}, \quad (58)$$

$$\Gamma(t, \tau) = \gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (59)$$

Вместо (43) здесь будем иметь

$$f_0(t) = q_2(t) - q_1(t) + \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (60)$$

§ 5. Случай отсутствия воздействия температуры

При $\Delta T = 0$ определение напряженного и деформационного состояния трубы значительно облегчается. Формула (41) запишется в виде

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{2A(t)}{r^2} \frac{K_0 2^{1-\mu}}{r} \left(\frac{2A(t)}{r^2} \right)^{\mu-1} dr = f_0(t). \quad (61)$$

Решением уравнения (61) относительно $A(t)$ будет

$$A(t) = R_1^2 R_2^2 \left(\frac{f_0(t) \mu}{K_0 (R_2^{2\mu} - R_1^{2\mu})} \right)^{1/\mu}, \quad (62)$$

где $f_0(t)$ определяется уравнением (60).

Формула (19) после соответствующих упрощений даст

$$M(r, t) = -\frac{K_0}{\mu} \left(\frac{A(t)}{r^2} \right)^{\mu}. \quad (63)$$

Функцию $B(t)$ можно, например, определить из (20) и (58)

$$B(t) = q_1(t) + \frac{K_0}{2R_1^{2\mu}} \left[A(t)^{\mu} - \gamma C_0' \int_{\tau_1}^t A(\tau) e^{-\gamma(C_0'+1)(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (64)$$

После этого напряжения $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\varphi(r, t)$ и $\varepsilon_z(r, t)$ соответственно определяются из уравнений (18), (8) и (27). Деформации же легко определяются из системы (12), (13) и (10).

§ 6. Насадка трубы на жесткий вал

В тех случаях, когда на R_1 и R_2 задаются перемещения, задача определения напряженного состояния существенно упрощается.

Определим радиальное перемещение, используя (13),

$$u_r = r\varepsilon_r = \frac{A(t)}{r} + \frac{3\alpha}{r} \int r \Delta T(r, t) dr. \quad (65)$$

Из уравнения (65) следует, что можно задать лишь одно краевое условие в перемещениях, и это ограничение связано с объемной нежимаемостью материала (12).

Пусть заданы краевые условия: $u_r|_{R_1} = w(t)$, $\varepsilon_r|_{R_2} = q(t)$. Краевое условие в перемещениях при использовании (65) позволяет сразу определить $A(t)$

$$A(t) = R_1 w(t) - 3\alpha \left[\int r \Delta T(r, t) dr \right]_{r=R_1}. \quad (66)$$

Так как вообще неопределенный интеграл в (19) не берется, то удобнее $B(t)$ исключить из уравнений (18) и (21), тогда получим

$$\sigma_r(r, t) = q(t) + [M(r, t) - M(R_2, t)] + \int_0^t [M(r, \tau) - M(R_2, \tau)] R(t, \tau) d\tau \quad (67)$$

где $M(r, t) - M(R_2, t)$ равно определенному интегралу в (19), который может решаться простыми приближенными методами, а $R(t, \tau)$ определяется формулой (58).

Так как $\frac{\partial M(r, t)}{\partial r}$ определяется подынтегральным выражением в (19) точно, то при определении $r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$, являющимся зачастую превадирующей частью σ_r , мы не будем связаны с вышеуказанными приближениями интегрирования.

§ 7. Исследование полученных результатов

Задача о равновесии цилиндрической трубы, находящейся под действием теплового потока, а также внутреннего и внешнего давлений, при нелинейной ползучести свелась к уравнениям (13), (18) и (25). Из этих уравнений легко видеть, что в случае $q_1(t) = q_2(t)$ величина A перестает быть функцией от времени, а это значит, что, несмотря на изменение напряжений во времени, деформации остаются постоянными. Другими словами, этот случай тождественен релаксационной задаче.

Теперь покажем, что приведенное выше решение обобщает общеизвестные формулы Ламе, которые соответствуют упругому случаю без воздействия температуры.

Действительно, в этом случае (следим за формулами (18) и (19)) $\varphi(\xi) = 2G$, $\Delta T(r, t) = 0$, $C_i(t, \tau) = R(t, \tau) = \Gamma(t, \tau) = 0$. При этом имеем

$$M(r, t) = -\frac{2G}{r^2} A(t)$$

и

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{2GA(t)}{r^2} + B(t).$$

Определяя $A(t)$ по формуле (25), находим

$$-2GA(t) = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2,$$

что совпадает с формулой (4.80) [8].

Рассмотрим теперь состояние линейной ползучести, как частный случай приведенного выше решения. Решение данной задачи по линейной теории ползучести может быть дано в виде

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} A(t) + \frac{1}{r^2} \int r \left[\int \Phi(r, t) dr \right] dr,$$

$$\Phi(r, t) = \frac{1 + \nu(t)}{1 - \nu^2(t)} \varphi(r, t), \quad (68)$$

$$\varphi(r, t) = -E(t) r \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} - \int_{\tau_0}^t E(\tau) r \frac{\partial \Delta T(r, \tau)}{\partial r} R_1(t, \tau) d\tau,$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$.

Подстановкой можно убедиться, что (68) удовлетворяет формулам (8), (9) и (10) в случае линейной наследственности с учетом старения [6].

Принимая для (68) несжимаемость материала $\nu(t) \equiv \frac{1}{2}$ и отсутствие старения, получим по формулам линейной ползучести

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} A(t) - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr -$$

$$- \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \left[\int \Delta T(r, \tau) R(t, \tau) d\tau \right] dr. \quad (69)$$

Теперь получим решение линейной ползучести, как частный случай нелинейной ползучести. Принимая в формуле (19) $\varphi[\varepsilon_1(t)] \equiv 2G$ и $C_0 = C_0 E$, мы из формулы (18) получим

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} \left[-2GA(t) - 2G \int_{\tau_0}^t A(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] -$$

$$- \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \left[\int \Delta T(r, \tau) R(t, \tau) d\tau \right] dr. \quad (70)$$

Так как $\left[-2GA(t) - 2G \int_{\tau_0}^t A(\tau) R(t, \tau) d\tau \right]$ не является функцией от r , то решения (69) и (70) необходимо совпадут после удовлетворения краевым условиям.

§ 8. Численный пример

Пусть имеется цилиндрическая труба из горячекатанной стали марки 35ГС.

Торцы трубы закреплены при осевой деформации, соответствующей нагреву трубы до 400°C.

Труба подвержена действию стационарного теплового потока.

Основные данные: $R_1 = 9,75$ см; $R_2 = 10,25$ см; $T_{R_1} = 370^\circ\text{C}$;

$$T_{R_2} = 430^\circ\text{C}; \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}.$$

В экспериментальной работе автора [10] производились подробные исследования кратковременной высокотемпературной ползучести указанной стали. При учете упругих деформаций для испытания при 400°C подобие деформационных кривых по времени можно было считать удовлетворительным. Это позволило применить исходные формулы (1), (2) и (3) при обработке опытных данных, в результате чего были получены следующие константы:

$$\gamma = 0,16 \frac{1}{\text{час}}; \quad \mu = \frac{1}{2}; \quad K_0 = 22000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad C'_0 = 2,2064.$$

Принимая линейное распределение температуры по толщине, легко определяем параметры формулы (40): $a = 120 \frac{\text{град}}{\text{см}}$; $b = -1200 \text{ град}$.

Так как давление на трубу отсутствует, то $f_0(t)$ из (60) тождественно равно нулю.

Выражение для функции $\eta(f)$ возьмем по формуле (46). Согласно § 3, мы в (46) принимаем сначала $f = f_0 \equiv 0$

$$\eta(f_0) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} = 0,72 \text{ см}^2.$$

Для определения первого уточнения $A(t)$ следует определить $B(f_0)$, которая при учете (44) имеет вид

$$B(f_0) = \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{2\eta(f_0)}{r^2} - a\alpha r \right) K_0 \frac{2^{1-\mu}}{r} \left[\left(\frac{2\eta(f_0)}{r^2} - a\alpha r \right)^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} dr. \quad (71)$$

Решая интеграл в (71) приближенно, аналогично

$$\int_{9,75}^{10,25} \Phi(r) dr = \Phi(9,8) \cdot 0,1 + \Phi(9,9) \cdot 0,1 + \Phi(10,0) \cdot 0,1 + \Phi(10,1) \cdot 0,1 + \Phi(10,2) \cdot 0,1 \quad (72)$$

получим

$$B(f_0) = +0,73975 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (32) имеем

$$f_{u_1} = 2f_0 - B(f_0) = -0,73975 \text{ кг/см}^2.$$

Осуществим первое уточнение $A(t)$

$$A(t) \approx \gamma(f_{u_1}) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{f_{u_1} R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = 0,7199887 \text{ см}^2.$$

Определяя $B(f_{u_1})$ аналогично (71) и (72)

$$B(f_{u_1}) = +0,4951 \text{ кг/см}^2,$$

видим, что $B(f_{u_1})$ меньше отличается от f_0 , чем $B(f_0)$.

Осуществим теперь второе уточнение $A(t)$, соответствующее уже определенному $B(f_{u_1})$

$$f_{u_2} = 3f_0 - B(f_0) - B(f_{u_1}) = -1,23485 \text{ кг/см}^2$$

и

$$A(t) \approx \gamma(f_{u_2}) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \frac{R_{cp}^2}{2} \left(\frac{f_{u_2} R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = 0,7199844 \text{ см}^2.$$

Дальнейших приближений $A(t)$ мы здесь делать не будем, тем более, что приближения в (72), по-видимому, более грубые.

В настоящей задаче $A(t)$ и $\Delta T(r, t)$ оказались не зависящими от времени, а потому и $M(r, t)$ из (19) от t не зависит. Учитывая это, а также используя (18), получим формулу для $\frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r}$, удобную при вычислениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r} &= \left(\frac{2A}{r^2} - r\alpha\alpha \right) \frac{1/2 K_0}{r \sqrt{\left(\frac{2A}{r^2} - r\alpha\alpha \right)^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2}} \times \\ &\times \left[1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Для определения напряжения $\varepsilon_r(r, t)$, при учете (18) и (20) будем иметь следующую формулу

$$\varepsilon_r(r, t) = q_1(t) + [M(r) - M(R_1)] \left[1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau \right]. \quad (74)$$

Из (8) получим формулу для определения $\varepsilon_\varphi(r, t)$

$$\varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_r(r, t) + r \frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r}. \quad (75)$$

Составляющая $\varepsilon_z(r, t)$ определяется через $\varepsilon_r(r, t)$ и $\varepsilon_\varphi(r, t)$ по формуле (27).

Из формул (74), (73), (75) и (27) нетрудно усмотреть, что составляющие напряжений могут быть даны в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, t) &= \sigma_r(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1) \\ \sigma_\varphi(r, t) &= \sigma_\varphi(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1) \\ \sigma_z(r, t) &= \sigma_z(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1),\end{aligned}\quad (76)$$

где $\sigma(r, \tau_1)$ соответствуют мгновенному решению с учетом пластичности и даны в табл. 1, а

$$\begin{aligned}\beta(t - \tau_1) &= 1 + \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau = 1 - \frac{C_0}{1 + C_0} \left(1 + e^{-\gamma(C_0 + 1)(t - \tau_1)} \right) = \\ &= 0,829 + 0,171 \cdot e^{-0,193(t - \tau_1)}.\end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что при $t = \tau_1$ $\beta = 1$. Значения $\beta(t - \tau_1)$ для некоторых значений $t - \tau_1$ даны в табл. 2.

Таблица 1

r (см)	9,75	9,85	9,95	10,05	10,15	10,25
$\sigma_r \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	0	+8,688	+14,636	+14,368	+8,370	0
$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \right)$	+117,095	+86,672	+36,183	-36,693	-86,010	-109,886
$\sigma_\varphi \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	+1141,68	+845,03	+345,38	-381,17	-881,37	-1126,33
$\sigma_z \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	+1141,08	+851,88	+398,76	-385,64	-806,63	-1043,09

Таблица 2

$t - \tau_1$	1 ч	2 ч	3 ч	5 ч	10 ч	20 ч	∞
β	0,9695	0,9450	0,9230	0,8940	0,8540	0,8320	0,8290

Напряжения $\sigma_\varphi(r, \tau_1)$ и $\sigma_z(r, \tau_1)$ графически изображены на фиг. 3, а функция $\beta(t - \tau_1)$ — на фиг. 4.

Используя (13), (12), (10) и (65), получим формулы для вычисления ε_φ , ε_r и u_r

$$\varepsilon_\varphi = \frac{0,7199844}{r^2} + 1,44 \cdot 10^{-3} r - 2,16 \cdot 10^{-2},$$

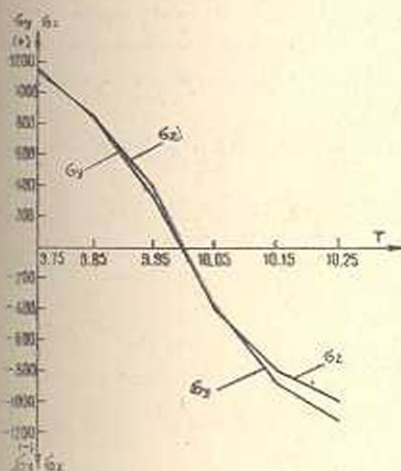
$$\varepsilon_r = 0,00432 (r - 10) - \varepsilon_\varphi,$$

$$u_r = r \varepsilon_\varphi.$$

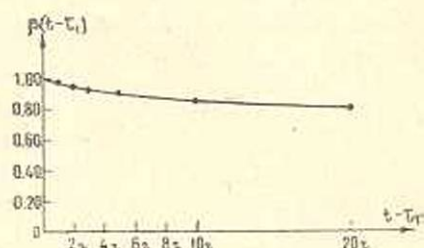
Значения ε_r , ε_φ и u_r даны в табл. 3.

Таблица 3

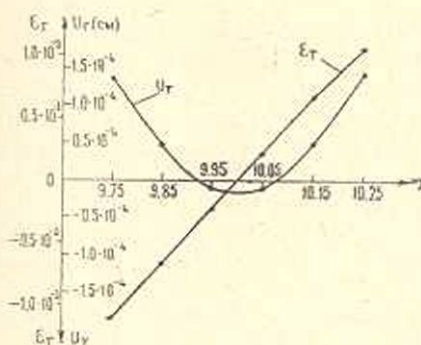
r (см)	9,75	9,85	9,95	10,05	10,15	10,25
$\varepsilon_r \cdot 10^{-3}$	-1,094	-0,655	-0,219	+0,221	+0,645	+1,066
$\varepsilon_z \cdot 10^{-3}$	+0,014	+0,005	-0,001	-0,001	+0,005	+0,014
$u_r \cdot 10^{-4}$ см	+1,3650	+0,4920	-0,0995	-0,1005	+0,5075	+1,4350



Фиг. 3.



Фиг. 4



Фиг. 5.

Величины ε_r и u_r графически изображены на фиг. 5.

Из рассмотренного примера приходим к следующим выводам.

1) В случае отсутствия давлений на стенки трубы деформации и перемещения не будут зависеть от времени, а напряжения будут убывать со временем пропорционально друг другу.

2) Радиальные напряжения значительно меньше тангенциальных, а радиальные деформации, наоборот, больше.

Ա. Մ. ՍԻՄՈՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԵՆԴԻՐԸ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ
ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա մ ֆ ո լ ի յ ռ

Հողածուժ տրվում է ջերմային հոսքի և ներքին ու արտաքին համա-
նարաչափ ճնշման տակ զանազո՞ղ զրանային խողովակի համասարտեղծումը
հարթ դեֆորմացիայի ժամանակ պլաստիկական հոսունության պայմաննե-
րում:

Լուծումը տրված է, ելնելով նյութի ծախսային չսեղմվելիության պայ-
մաններից:

Գտնված է, որ պատերի վրա ճնշման բացակայության և հաստատուն
ջերմային հոսքի ժամանակ տեղափոխումները կախված չեն ժամանակից,
արևինքն ստացվում է սեղանա՞ցիայի խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 23, вып. 5, 1959.
2. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, том I. Изд. АН СССР, 1957.
3. Задоян М. А. Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 9, № 9, 1956.
4. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть составных цилиндрических труб. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 6, 1957.
5. У Жуй-фын. Неустановившаяся ползучесть составной цилиндрической трубы в упругой среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 3, 1959.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1947.
9. Работнов Ю. И. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 12, вып. 1, 1948.
10. Симонян А. М. Экспериментальное исследование высокотемпературной ползучести и влияния ее на механические свойства горячекатанной стали. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.