

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. КОРБУТ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
 С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В работе излагаются результаты исследования устойчивости цилиндрической оболочки средней длины с упругим заполнителем. Рассматриваются три вида нагружения: внешнее радиальное давление, осевое сжатие, кручение. Задача решается в линейной постановке с помощью уравнений пологих оболочек.

Оболочка считается тонкой и работающей в пределах упругости. Граничные условия на торцах соответствуют шарнирному опиранию и заземлению, допускающих некоторое равномерное радиальное смещение [1]. Последнее обеспечивает безмоментное докритическое состояние.

Упругий заполнитель моделируется винклеровским основанием с постоянным коэффициентом „постели“, величина которого считается известной.

§ 1. Внешнее радиальное давление

Исходная система линейных уравнений пологих оболочек имеет вид [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha}{h} w, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Здесь: w — радиальный прогиб, σ_x и σ_y — докритические нормальные сжимающие напряжения соответственно в осевом и окружном направлениях, τ — докритическое касательное напряжение, Φ — функция напряжения, ∇^2 — оператор Лапласа, D — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости материала оболочки, R и h — соответственно радиус и толщина оболочки, α — коэффициент „постели“ заполнителя, x и y — координаты вдоль образующей и по окружности.

В рассматриваемой задаче следует положить $\sigma_x = \tau = 0$.

Напряжение σ_y найдем из условия равновесия и деформации элемента оболочки [2]

$$\tau_y = \frac{qR}{h\delta}, \quad (3)$$

где

$$\delta = 1 + \frac{\alpha_0 R^2}{Eh}. \quad (4)$$

В (3) и (4) q — внешнее давление, α_0 — коэффициент „постели“ заполнителя в докритическом состоянии, μ — коэффициент Пуассона.

Определим критическое давление при различных условиях опирания торцов оболочки.

а) Шарнирное опирание.

Граничные условия имеют вид при $x = 0$ и $x = L$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Удовлетворяя условию (5), частное решение системы (1)–(2) ищем в виде

$$w = f \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}, \quad (6)$$

где L — длина оболочки, f — стрела прогиба, n — число волн в окружном направлении.

Подставляя прогиб (6) в уравнение неразрывности (2) и решая его с учетом граничных условий и условия периодичности окружного перемещения v

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{x=0,L} = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi R} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right|_{x=0,L} dy = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{R} \right] dy = 0, \quad (9)$$

найдем функцию напряжений

$$\Phi = \frac{EfR^3 \pi^2}{L^2 n^4 \left(1 + \frac{\pi^2 R^2}{L^2 n^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}. \quad (10)$$

В отношении найденной функции напряжений заметим, что, если граничные условия по осевому напряжению удовлетворяются в каждой точке, то по касательным напряжениям удовлетворяются лишь „в среднем“.

Внося (6) и (10) в уравнение равновесия (1) с учетом $\varepsilon_x = \tau = 0$, получим выражение для давления

$$q^* = \varepsilon \left[\frac{1}{12(1-\mu^2)} (1+\theta^2)^2 \tau_1 + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} \frac{1}{\tau_1} + \frac{\omega}{\tau_1} \right]. \quad (11)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры

$$q^0 = \frac{qR^2}{Ek^2}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_0 R^2}{Ek}, \quad \omega = \frac{\omega R^2}{Ek},$$

$$\theta = \frac{\pi R}{nL}, \quad \tau_1 = \frac{n^2 h}{R}. \quad (12)$$

Выражение (11) можно упростить, если принять $\theta^2 \ll 1$ [1]

$$q^* = \varepsilon \left[\frac{\tau_1}{12(1-\mu^2)} + \frac{\theta^4}{\tau_1} + \frac{\omega}{\tau_1} \right]. \quad (13)$$

Из условия

$$\frac{\partial q^*}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

с учетом (12) определим критические значения давления и числа волн

$$q_{кр}^* = \varepsilon \left[\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{n_{кр}^2 h}{R} + \pi^4 \frac{R^4}{L^4} \frac{R}{h} \frac{1}{n_{кр}^6} + \omega \frac{R}{h} \frac{1}{n_{кр}^2} \right], \quad (15)$$

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{h^2}{R^2} n_{кр}^6 - \omega n_{кр}^4 - 3\pi^4 \frac{R^4}{L^4} = 0. \quad (16)$$

б) Защемление.

Граничные условия имеют вид при $x=0$ и $x=L$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

С учетом (17) частное решение (1)–(2) ищем в виде

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}. \quad (18)$$

Решая уравнение неразрывности (2), получим

$$\Phi = - \frac{2EfR^3 \pi^2}{L^2 n^4 \left(1 + \frac{4\pi^2 R^2}{L^2 n^2}\right)^2} \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}. \quad (19)$$

Выражение (19) удовлетворяет условию периодичности (9) и следующим граничным условиям

$$\int_0^{2\pi R} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{x=0,L} dy = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right|_{x=0,L} = 0. \quad (21)$$

Здесь имеет место обратная картина: граничные условия по осевым напряжениям удовлетворяются „в среднем“, по касательным — в каждой точке.

Внося найденную функцию напряжений и выражение для прогибов (18) в уравнение равновесия (1) с учетом $\sigma_x = \tau = 0$, найдем, используя метод Бубнова-Галеркина

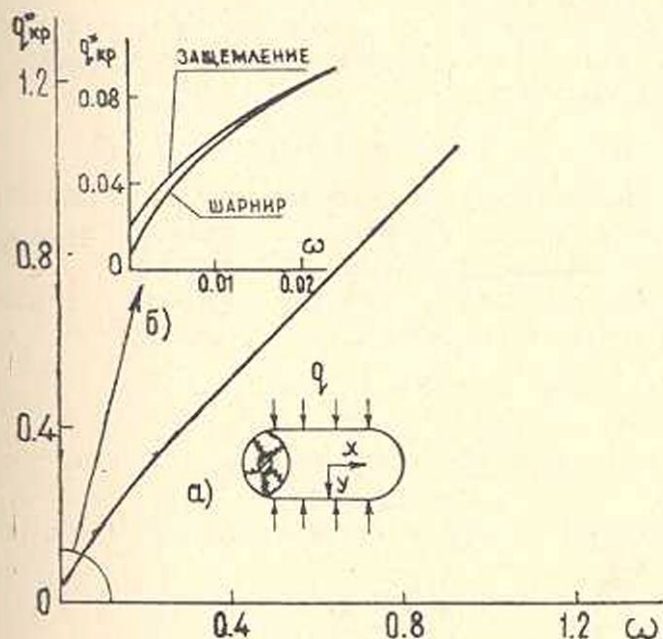
$$q^0 = \lambda \left[\frac{2}{9(1-\mu^2)} \left(20^4 + n^2 + \frac{3}{8} \right) \eta + \frac{16}{3} \frac{n^4}{(4n^2+1)^2} \frac{1}{\eta} + \frac{\omega}{\eta} \right]. \quad (22)$$

Считая попрежнему $n^2 \ll 1$, окончательно получим

$$q^0 = \lambda \left[\frac{2}{9(1-\mu^2)} \left(\pi^2 \frac{R^2}{L^2} \frac{h}{R} + \frac{3}{8} \frac{h}{R} n^2 \right) + \frac{16}{3} \pi^4 \frac{R^4}{L^4} \frac{R}{h} \frac{1}{\left(8\pi^2 \frac{R^2}{L^2} n^4 + n^6 \right)} + \frac{\omega}{n^2} \frac{R}{h} \right]. \quad (23)$$

Критическое давление определяется из условия (14).

В качестве примера рассчитана оболочка с параметрами $\alpha_0 = \alpha$; $\mu = 0,3$; $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$; $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$. Результаты расчетов представлены на

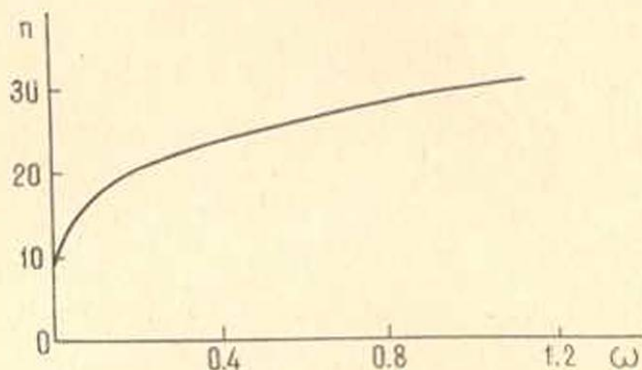


Фиг. 1. Зависимость критического давления от жесткости заполнителя при внешнем давлении.

фиг. 1—а. Как и следовало ожидать, заполнитель существенно повышает критическое давление при обоих типах граничных условий.

Влияние условий закрепления оболочки на величину критического давления сказывается лишь при незначительной жесткости за-

полнителя ($\omega \approx 0,02$). При больших значениях ω критическое давление практически не зависит от граничных условий (см. фиг. 4—6). В связи со сделанным выводом заметим, что сравнение случаев а) и б) следует понимать в несколько условном смысле, в силу различия граничных условий по функции напряжений, отмеченного выше.



Фиг. 2. Зависимость числа волн по окружности от жесткости заполнителя при внешнем давлении (шарнир).

Фиг. 2 иллюстрирует характер волнообразования, из которой видно, что число волн в окружном направлении растет с увеличением жесткости заполнителя. Попутно заметим, что непрерывное изменение n надо понимать условно.

§ 2. Осевое сжатие

Здесь можно ограничиться рассмотрением лишь шарнирных граничных условий, поскольку критическое напряжение мало зависит от вида крепления оболочки на торцах.

Используем уравнения (1) и (2), приняв $\tau = 0$. Удовлетворяя условиям (5), функцию прогибов зададим в виде

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}, \quad (24)$$

где m — число полуволн в осевом направлении, остальные обозначения прежние.

Подставляя (24) в уравнение неразрывности (2) и решая его, будем иметь

$$\Phi = \frac{EfR^3\pi^2}{L^2n^4 \left(1 + \frac{m^2\pi^2 R^2}{L^2n^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}. \quad (25)$$

Найденная функция Φ удовлетворяет условию периодичности (9) и следующим граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (26)$$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, L} dy = 0. \quad (27)$$

Внося (24) и (25) в уравнение равновесия (1) с учетом $\tau=0$, получим

$$\sigma_x^* = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\eta^2} \frac{\omega_0}{1 + \omega_0}} \left[\frac{1}{12(1 - \mu^2)} \frac{(1 + \eta)^2}{\eta^2} \tau_1 + \frac{\eta^2}{(1 + \eta^2)^2} \frac{1}{\eta} + \frac{\omega}{\eta^2 \eta} \right]. \quad (28)$$

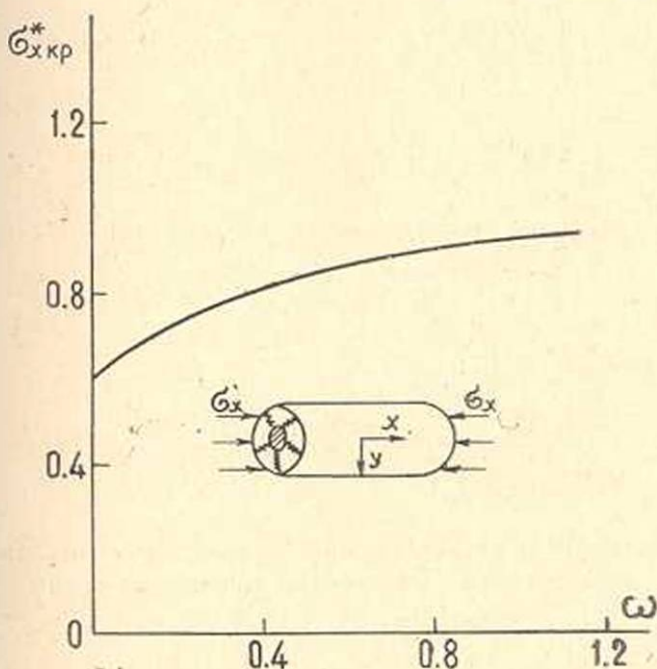
Здесь введены безразмерные параметры

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x R}{Eh}, \quad \eta = \frac{m\pi R}{nL}, \quad \tau_1 = \frac{n^2 h}{R}, \quad \omega_0 = \frac{a_0 R^2}{Eh}, \quad \omega = \frac{a R^2}{Eh}. \quad (29)$$

Критическое напряжение определяется из условий

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \omega} = 0. \quad (30)$$

Результаты расчетов, выполненных с помощью (28) и (30), представлены на фиг. 3. Из приведенного графика следует, что несущая способность оболочки с увеличением жесткости заполнителя растет.



Фиг. 3. Зависимость критического напряжения от жесткости заполнителя при осевом сжатии.

Характер волнообразования таков, что с ростом жесткости заполнителя вмятины стремятся стать кольцевыми при уменьшении их длины вдоль образующей. Соответственно параметр $\eta \rightarrow 0$, а параметр $\eta \rightarrow \infty$.

§ 3. Кручение

Ограничимся рассмотрением оболочки, для которой условия шарнирного опирания удовлетворяются „в среднем“. Следуя работе [3] и принимая начало координат по середине оболочки, задаем прогиб в виде

$$w = f \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n}{R}(y + \gamma x), \quad (31)$$

где γ — параметр, характеризующий наклон волн, остальные обозначения прежние. Функция (31) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\text{при } x = \pm \frac{1}{2}, \quad w = 0, \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy = 0. \quad (32)$$

Представим выражение (31) в виде

$$w = w_1 + w_2, \quad (33)$$

где

$$w_1 = \frac{1}{2} f \left(\cos \frac{ny}{R} \cos kx - \sin \frac{ny}{R} \sin kx \right), \quad (34)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} f \left(\cos \frac{ny}{R} \cos lx - \sin \frac{ny}{R} \sin lx \right), \quad (35)$$

причем

$$k = \frac{n\gamma}{R} + \frac{m\pi}{L}; \quad l = \frac{n\gamma}{R} - \frac{m\pi}{L}. \quad (36)$$

Решая уравнение неразрывности (2) с учетом (33), (34) и (35), получим

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{Ef k^2}{2R \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \left(\cos \frac{ny}{R} \cos kx - \sin \frac{ny}{R} \sin kx \right) + \\ & + \frac{Efl^2}{2R \left(l^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \left(\cos \frac{ny}{R} \cos lx - \sin \frac{ny}{R} \sin lx \right). \end{aligned} \quad (37)$$

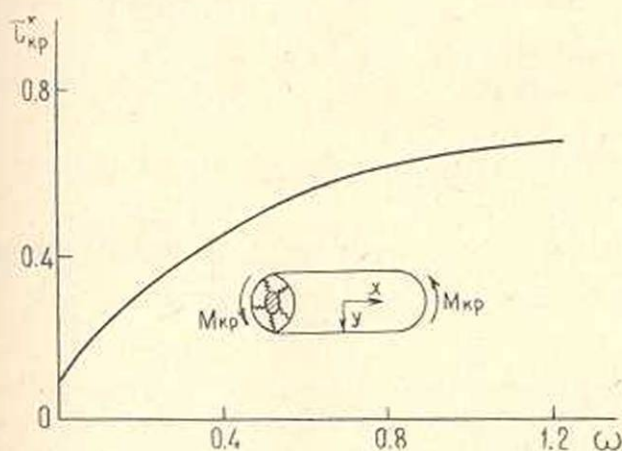
Найденная функция напряжений удовлетворяет условию периодичности (9) и „в среднем“ следующим граничным условиям

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm \frac{L}{2}} dy = 0, \quad (38)$$

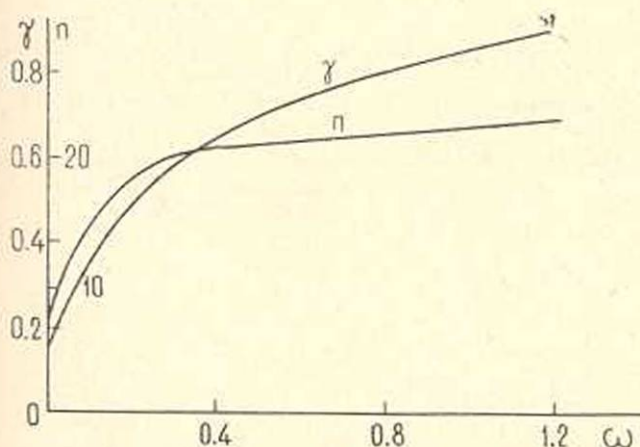
$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=\pm \frac{L}{2}} dy = 0. \quad (39)$$

Внося (33) и (37) в уравнение равновесия (1) с учетом $\sigma_x = \sigma_y = 0$ и решая его методом Бубнова-Галеркина, получим

$$\begin{aligned} \tau^* = & \frac{1}{24(1-\mu^2)} \frac{1}{n(n\gamma)} \frac{h}{R} \left\{ \left[n^2 + \left(n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ & + \left. \left[n^2 + \left(n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 \right\} + \frac{1}{2n(n\gamma)} \frac{R}{h} \left\{ \frac{\left(n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[n^2 + \left(n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} + \right. \\ & + \left. \frac{\left(n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[n^2 + \left(n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} \right\} + \frac{\omega}{n(n\gamma)} \frac{R}{h}, \end{aligned} \quad (40)$$



Фиг. 4. Зависимость критического напряжения от жесткости заполнителя при кручении.



Фиг. 5. Характер волнообразования при кручении (непрерывное изменение n — условно).

где введен безразмерный параметр

$$\tau^* = \frac{\tau R}{Eh} \quad (41)$$

Критическое напряжение находится из условий.

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial m} = \frac{\partial \tau^*}{\partial n} = \frac{\partial \tau^*}{\partial (n\gamma)} = 0. \quad (42)$$

С помощью (40) и (42) проведены расчеты для оболочки с параметрами $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$; $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$; $\mu = 0,3$. Результаты вычислений приведены на фиг. 4 и 5. Как видно из графиков, критическое напряжение увеличивается с ростом жесткости заполнителя. Одновременно с этим растет число волн и наклон их к оси x , характеризуемый параметром γ . В пределах принятого изменения жесткости заполнителя число волн в осевом направлении оставалось неизменным и равным 1.

Машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря г. Запорожье

Поступила 16 XI 1964

В. А. КОРБУТ

ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ, ԼՅՈՂՈՎ, ԳԼԱՆԱԶԵՎ, ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Վ. Փ. Ն. Փ. Ն. Վ.

Դրամարկում է առաջադրան լցիչով միջին երկարությունը դրամաձև բա-
րակ թաղանթ: Ուսումնասիրում է աղբյուրի թաղանթի կալունությունը
աղբյուրի բնակարանների դեպքում: Խնդիրը լուծվում է դժարին գրվածքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
2. Корбут Б. А. Об устойчивости в „малом“ тонкостенной сферы, опирающейся внутренней поверхностью на упругое основание. ИЗУЗ „Машиностроение“ № 2, 1962.
3. Маркин В. А. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и внутреннем давлении. Сб. „Расчет пространственных конструкций“, № 5, 1959.