

А. А. КИТБАЛЯН

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ
ФУНКЦИЙ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ
ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В в е д е н и е

В работах Г. Сеге была построена алгебраическая и предельная теория полиномов, ортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения (см., напр., [1]). В случае, когда данное обложение является четной функцией, им же была обнаружена явная связь между такими полиномами и полиномами, ортогональными на отрезке $[-1, +1]$ относительно соответствующего обложения. Эта связь, установленная другим методом Я. Л. Геронимусом [2], выражается простым соотношением, что позволило вывести различные оценки и асимптотические формулы для полиномов, ортогональных на отрезке, при помощи результатов, известных для полиномов, ортогональных на окружности (см., напр., [1], [3]).

В недавно опубликованной работе Г. Сеге [4] приводится построение системы тригонометрических полиномов, биортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения. В этой работе выведена связь между функциями этой системы и функциями системы полиномов, ортогональных на единичной окружности в случае уже произвольного обложения.

В работе М. М. Джрбашяна [5] была развита алгебраическая и частично предельная теория систем рациональных функций с полюсами, лежащими на заданной последовательности точек вне единичного круга, ортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения. Эти результаты явились дальнейшим естественным обобщением теории Г. Сеге. Кроме того, в них содержатся качественно новые данные для тех случаев, когда порождающая последовательность полюсов системы достаточно редкая.

В работе [6] было получено естественное обобщение классических полиномов Чебышева. А именно, там была установлена явная алгебраическая формула для представления системы рациональных функций, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ с весом $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$, произвольные полюсы которых лежат вне этого отрезка. При помощи

этой формулы была обнаружена алгебраическая связь между функциями упомянутой системы рациональных функций и системы рациональных функций Мальмквиста, ортогональных на единичной окружности с весом $\frac{d\theta}{2\pi}$.

В работе [7] была введена в рассмотрение система обобщенных тригонометрических функций и доказана теорема о сходимости разложений по этим функциям в метрике L_p .

Настоящая статья посвящена применениям обобщенной системы функций Чебышева и обобщенных тригонометрических систем.

В § 1 устанавливается справедливость формулы, аналогичной формуле Г. Сеге, между системами рациональных функций, ортогональных на единичной окружности относительно четного обложения и на отрезке относительно соответствующего обложения.

В § 2 излагается дальнейшее развитие результатов работы Г. Сеге [4]. А именно, приводится построение биортогональной относительно произвольного обложения системы обобщенных тригонометрических полиномов и устанавливается явная связь между функциями этой системы и системы рациональных функций, ортонормальных на единичной окружности относительно того же обложения. При этом существенно используются алгебраические свойства системы рациональных функций М. М. Джрбашяна [5] и результаты § 1.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН АрмССР, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении настоящей работы.

§ 1. Система рациональных функций, ортонормальных на отрезке $[-1, +1]$ относительно произвольного обложения

1.1. В первую очередь отметим ряд фактов и введем некоторые понятия и обозначения, необходимые в дальнейшем.

В статье [6] для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащих вне отрезка $K \equiv [-1, +1]$, приводилось построение системы рациональных функций $\{M_k(x)\}_0^\infty$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$, ортонормальных на отрезке K с весом $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$.

Если с последовательностью чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащих вне отрезка K , ассоциировать три последовательности чисел: $\{\nu_k\}_0^\infty$, $\{p_k\}_0^\infty$ и $\{q_k\}_0^\infty$, где при данном $k \geq 0$ ν_k означает кратность появления числа ω_k в группе чисел $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k\}$, а p_k и q_k определяются из условий

$$p_k = q_k = 0 \quad \text{при} \quad \omega_k \neq \infty,$$

$$p_k = \nu_k, \quad q_k = \nu_k - 1 \quad \text{при} \quad \omega_k = \infty,$$

то легко видеть, что система рациональных функций $\{M_k(x)\}_0^\infty$ представляет собой результат ортогонализации на отрезке K с весом $\frac{1}{2\pi\sqrt{1+x^2}}$ последовательности функций

$$\left\{ \frac{x^{q_k} \omega_k^{p_k}}{(\omega_k - x)^{q_k}} \right\}_0^\infty, \quad (1.1)$$

переходящей в систему степеней $\{x^k\}_0^\infty$ при $\omega_k = \infty$ ($k > 0$).

Поставим, далее, в соответствие последовательности чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$ последовательность комплексных чисел $\{a_k^{(n)}\}_0^\infty$, лежащих внутри единичного круга и определяемых из соотношения

$$a_k^{(n)} = a_k = \begin{cases} [\omega_k + \sqrt{\omega_k^2 - 1}]^{-1} & \text{при } \omega_k \neq \infty \\ 0 & \text{при } \omega_k = \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

Системой рациональных функций Мальмквиста, ассоциированных с последовательностью $\{a_k^{(n)}\}_0^\infty$, принято называть следующую систему

$$\varphi_0^{(n)}(z) = \frac{(1 - |a_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_0 z}, \quad \varphi_k^{(n)}(z) = \frac{(1 - |a_k|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_k z} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{a_l - z}{1 - \bar{a}_l z} \frac{|a_l|}{a_l} \quad (1.3)$$

($k = 1, 2, \dots$),

ортонормальную на единичной окружности с весом $\frac{1}{2\pi} |dz|$ в смысле*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \varphi_n^{(n)}(z) \overline{\varphi_m^{(n)}(z)} |dz| = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (1.4)$$

($n, m = 0, 1, 2, \dots$).

Как показано в [6], при $\omega_0 = \infty$, т. е. при $a_0 = 0$, система функций $\{M_k(x)\}_0^\infty$ явно выражается посредством функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^\infty$ по следующим формулам

$$M_0(x) \equiv 1, \quad M_k(x) = \varphi_k^{(n)}(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \varphi_k^{(n)}(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1.5)$$

($k = 1, 2, \dots$).

Заметим, что в частном случае, когда все полюсы системы $\{M_k(x)\}_0^\infty$ отождествляются с бесконечно удаленной точкой, то есть все $a_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), система рациональных функций Мальмквиста переходит в систему степеней $\{z^k\}_0^\infty$, а система $\left\{ \frac{1}{2} M_k(x) \right\}_0^\infty$ — в систему полиномов Чебышева первого рода $\{T_k(x)\}_0^\infty$.

* Условимся, что при $a_j = 0$ $\frac{|a_j|}{a_j} = 1$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Пусть, далее, $\psi(x)$ есть произвольная неубывающая ограниченная функция с бесконечным множеством точек роста на K .

Результат процесса ортогонализации последовательности рациональных функций $\{R_k(x)\}_0^\infty$ относительно обложения $d\psi(x)$ на отрезке $K \equiv [-1, +1]$ обозначим через $\{R_k(x)\}_0^\infty$. Иначе говоря, система рациональных функций $\{R_k(x)\}_0^\infty$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$ будет удовлетворять следующим условиям ортонормальности

$$\int_{-1}^1 R_n(x) \overline{R_m(x)} d\psi(x) = \delta_{n,m} \quad (1.6)$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Введем, наконец, неубывающую и ограниченную на отрезке $[0, 2\pi]$ функцию $\tau(\theta)$, связанную с функцией $\psi(x)$ следующим образом

$$\tau(\theta) = \begin{cases} -\psi(\cos \theta) & \text{при } 0 \leq \theta < \pi \\ \psi(\cos \theta) & \text{при } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (1.7)$$

Ортогонализация последовательности рациональных функций $\left\{ \frac{z^{p_k-1}}{(1-\alpha_k z)^{v_k}} \right\}_0^\infty$, где v_k — кратность появления числа α_k в группе чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, а $p_k = 1$ при $\alpha_k \neq 0$ и $p_k = v_k$ при $\alpha_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) или, что то же самое, последовательности функций Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ относительно обложения $d\tau(\theta)$ на единичной окружности $|z| = 1$ приводит к рассмотренной впервые М. М. Джрбашяном [5] системе рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ с полюсами в точках $\left\{ \frac{1}{\alpha_k} \right\}_0^\infty$ ортонормальной в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_m(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\tau(\theta) = \delta_{m,n} \quad (1.8)$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Предполагая в дальнейшем, что последовательность чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$ начинается с бесконечности ($\omega_0 = \infty$), то есть, что последовательность $\{\alpha_k\}_0^\infty$, определенная по формуле (1.2), начинается с нуля ($\alpha_0 = 0$), для любого целого n с $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ассоциируем следующую последовательность чисел

$$P_n^{(m)} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots,$$

члены которой удовлетворяют условию периодичности

$$\alpha_k = \alpha_{k+n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Систему рациональных функций Мальмквиста, порожденную последовательностью чисел $P_n^{(m)}$, обозначим через $\{\varphi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$.

В силу формулы (1.9) и условия $\alpha_0 = 0$ функции этой системы запишутся в следующем виде

при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) = \varphi_k^{(m)}(z); \quad (1.10)$$

при $n < k \leq 2n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) = \varphi_{k-n}(z, P_n^{(m)}) \pi_n^{-1}(z), \quad (1.10')$$

где через $\pi_n(z)$ обозначено произведение, которое определяется так

$$\pi_0(z) = 1,$$

при $1 \leq k \leq n$

$$\pi_k(z) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - \bar{\alpha}_i z}{\alpha_i - z} \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i}; \quad (1.11)$$

при $n < k \leq 2n$

$$\pi_k(z) = \pi_n(z) \pi_{k-n}(z). \quad (1.12)$$

Введем, далее, в рассмотрение последовательность функций $\{M_k(x, P_n^{(m)})\}_0^\infty$, определенную следующими соотношениями

$$M_0(x, P_n^{(m)}) = 1,$$

$$M_k(x, P_n^{(m)}) = \varphi_k(x + \sqrt{x^2 - 1}, P_n^{(m)}) + \varphi_k(x - \sqrt{x^2 - 1}, P_n^{(m)}). \quad (1.13)$$

Согласно теореме, доказанной в работе [6], система функций $\{M_k(x, P_n^{(m)})\}_0^\infty$ будет ортонормальна на отрезке K с весом $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 M_m(x, P_n^{(m)}) \overline{M_k(x, P_n^{(m)})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{m,k} \quad (1.14)$$

$$(m, k = 1, 2, \dots).$$

Обозначим, наконец, через $\{\Phi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$ ассоциированную с последовательностью чисел $P_n^{(m)}$ систему рациональных функций, ортонормальных на единичной окружности относительно обложения $\frac{1}{2\pi} d\phi(\theta)$ и введем в рассмотрение следующую систему функций

$$\{\Phi_k^*(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$$

$$\Phi_k^*(z, P_n^{(m)}) = \pi_n^{-1}(z) \overline{\Phi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right)} \quad (1.15)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Заметим также, что из самого определения линейно-независимых систем $\{\varphi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$ и $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$, ввиду того, что их полюсы со своими кратностями совпадают, легко следует, что справедливо разложение вида

$$\Phi_k(z, P_n^{(w)}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(k)} \varphi_i(z, P_n^{(w)}) \quad (1.16)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\{\lambda_i^{(k)}\}_0^k$ — некоторые, вообще говоря комплексные коэффициенты.

1.2. В настоящем пункте будет установлено, что в случае, когда $\{\omega_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка K ($\omega_0 = \infty$), систему рациональных функций $\{R_k(x)\}_0^\infty$, ортонормальных на отрезке K относительно обложения $d\psi(x)$, можно представить через функции $\Phi_{2n}(z, P_n^{(w)})$ и $\Phi_{2n}^*(z, P_n^{(w)})$. Эта связь, аналогично случаю полиномов Г. Сеге или случаю системы $\{M_k(x)\}_0^\infty$, выражается следующей теоремой.

Теорема 1.1. Пусть $\{\omega_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка K , причем $\omega_0 = \infty$. Тогда функции системы $\{R_k(x)\}_0^\infty$, ортонормальной на отрезке K относительно произвольного обложения $d\psi(x)$, выражаются согласно следующей формуле

$$R_n(x) = C_n [\Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + \Phi_{2n}^*(z, P_n^{(w)})] \pi_n(z), \quad (1.17)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где постоянный множитель C_n определяется так

$$C_n = \left[2\pi \left(1 + \frac{\lambda_0^{(2n)}}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.18)$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что в силу условия вещественности чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, последовательность $\{x_k\}_0^\infty$, ассоциированная с $\{\omega_k\}_0^\infty$ по формуле (1.2), а также последовательность $P_n^{(w)}$, будут лежать на интервале $(-1, +1)$, причем $x_0 = 0$.

Введем в рассмотрение следующую последовательность вещественных чисел

$$Q_n^{(w)} = x_0, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x_{n-1}, \dots,$$

также удовлетворяющую условию периодичности (1.9).

Обозначим через $\{\varphi_k(z, Q_n^{(w)})\}_0^\infty$ систему рациональных функций Мальмквиста, порожденную последовательностью чисел $Q_n^{(w)}$.

Ввиду равенства (1.9) и условия $x_0 = 0$, функции этой системы запишутся по следующим формулам

$$\varphi_0(z, Q_n^{(m)}) = 1,$$

при $1 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) = -\frac{(1 - |a_{n-k}|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_{n-k}z} z \prod_{l=n-k+1}^{n-1} \frac{a_l - z}{1 - \bar{a}_l z} \frac{|a_l|^*}{a_l}; \quad (1.19)$$

при $n < k \leq 2n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) = \varphi_{k-n}(z, Q_n^{(m)}) \pi_n^{-1}(z). \quad (1.19')$$

Как и выше, введем в рассмотрение последовательность функций $\{M_k(x, Q_n^{(m)})\}_0^\infty$, определенную по формулам

$$M_0(x, Q_n^{(m)}) = 1,$$

$$M_k(x, Q_n^{(m)}) = \varphi_k(x + \sqrt{x^2 - 1}, Q_n^{(m)}) + \varphi_k(x - \sqrt{x^2 - 1}, Q_n^{(m)}) \quad (1.13')$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

и ортонормальную на отрезке K с весом $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 M_m(x, Q_n^{(m)}) \overline{M_k(x, Q_n^{(m)})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{m,k} \quad (1.14')$$

$$(m, k = 1, 2, \dots).$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным при установлении формулы (1.16), получим, что имеет место также разложение

$$\Phi_k(z, P_n^{(m)}) = \sum_{l=0}^k \lambda_l^{*(k)} \varphi_l(z, Q_n^{(m)}) \quad (1.16')$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

где коэффициенты $\{\lambda_l^{*(k)}\}_0^k$, как и определенные по формуле (1.16) коэффициенты $\{\lambda_l^{(k)}\}_0^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), вещественны в силу вещественности последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$ и четности функции $\sigma(\theta)$.

Заметим, что из определения последовательностей $P_n^{(m)}$ и $Q_n^{(m)}$ следует равенство функций $\varphi_{2n}(z, P_n^{(m)})$ и $\varphi_{2n}(z, Q_n^{(m)})$. Поэтому, если сравнить разложения (1.16) и (1.16'), то получим, что

$$\lambda_{2n}^{(2n)} = \lambda_{2n}^{*(2n)}.$$

Теперь уже, используя определения (1.10), (1.10'), (1.19), (1.19') и (1.11) функций $\{\varphi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$, $\{\varphi_k(z, Q_n^{(m)})\}_0^\infty$ и $\pi_n(z)$, а также существенное условие вещественности последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$, можем написать следующие соотношения, необходимые нам в дальнейшем:

* Условимся, что при $k > p$ символ $\prod_{l=k}^p \dots$ равен единице.

а) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right), \quad (1.20)$$

б) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n-k}(z, Q_n^{(m)}); \quad (1.20')$$

в) при $n < k \leq 2n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{k-n}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.20'')$$

г) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}; P_n^{(m)}\right) \pi_n(z) = \varphi_{k+n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right); \quad (1.21)$$

д) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{k+n}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.21')$$

е) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right); \quad (1.22)$$

ж) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n-k}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.22')$$

з) при $0 < k \leq n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{k+n}(z, Q_n^{(m)}); \quad (1.23)$$

и) при $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right) \pi_n(z) = \varphi_{k+n}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right). \quad (1.23')$$

Преобразуем, далее, выражение, стоящее в правой части формулы (1.17). Имея в виду разложение (1.16), а также определения (1.15) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} R_n(x) &= C_n \left[\sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_k(z, P_n^{(m)}) + \pi_{2n}^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \right] \pi_n(z) = \\ &= C_n \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \left[\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) + \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \left[\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) + \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись формулами (1.20) и (1.20'), с учетом соотношений (1.13) и (1.13'), будем иметь

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= C_n \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \left[\varphi_{n-k} \left(\frac{1}{z}, Q_n^{(\omega)} \right) + \varphi_{n-k}(z, Q_n^{(\omega)}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \left[\varphi_{k-n}(z, P_n^{(\omega)}) + \varphi_{k-n} \left(\frac{1}{z}, P_n^{(\omega)} \right) \right] \right\} = \\
 &= C_n \left\{ 2\lambda_n^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\lambda_k^{(2n)} M_{n-k}(x, Q_n^{(\omega)}) + \lambda_{2n-k}^{(2n)} M_{n-k}(x, P_n^{(\omega)}) \right] \right\}, \quad (1.24) \\
 x &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).
 \end{aligned}$$

Из представления (1.24), если учесть, что системы функций $\{M_k(x, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^n$ и $\{M_k(x, Q_n^{(\omega)})\}_{k=0}^n$ линейно-независимы, следует, что для доказательства ортогональности системы $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на отрезке K относительно обложения $d\psi(x)$ достаточно установить справедливость равенств

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^{(1)} &= \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, P_n^{(\omega)})} d\psi(x) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1)
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

и

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^{(2)} &= \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, Q_n^{(\omega)})} d\psi(x) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \quad (1.25')$$

С этой целью используем следующие соотношения, вытекающие из ортонормальности системы функций $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^\infty$ на единичной окружности относительно обложения $\frac{1}{2\pi} dz(\theta)$ и формул (1.16) и (1.16')

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} d\tau(\theta) = \\
 &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n-m}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1);
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\tau(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.26')$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.27)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.27')$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Составим теперь интеграл $I_{n,m}^{(1)}$, заменив в нем функции $R_n(x)$ и $M_m(x, P_n^{(\omega)})$ соответственно по формулам (1.17) и (1.13) и положив $x = \cos \theta$, $z = e^{i\theta}$,

$$I_{n,m}^{(1)} = \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, P_n^{(\omega)})} d\psi(x) =$$

$$= \int_0^\pi R_n(\cos \theta) \overline{M_m(\cos \theta, P_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{i\theta}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{-i\theta})] \times$$

$$\times [\overline{\varphi_m(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} + \overline{\varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)})}] d\sigma(\theta). \quad (1.28)$$

Далее, с учетом формул (1.20), (1.20'), (1.21) и (1.21') получим

$$I_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) +$$

$$+ \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) +$$

$$+ \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta). \quad (1.29)$$

Наконец, из формулы (1.29), ввиду соотношений (1.27), (1.26), (1.26') и (1.27'), следует, что

$$I_{n,m}^{(1)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Перейдем к интегралу $I_{n,m}^{(2)}$. Аналогичными рассуждениями, с учетом формул (1.22), (1.22'), (1.23) и (1.23'), получим

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{i\theta}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{-i\theta})] \times \\ &\quad \times [\varphi_m(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \varphi_m(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta) = \\ &= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \\ &\quad + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta), \end{aligned}$$

откуда в силу соотношений (1.26), (1.27), (1.27') и (1.26') будем иметь, что

$$I_{n,m}^{(2)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Ортогональность системы $\{R_n(x)\}_0^\infty$ на отрезке K относительно обложения $d\psi(x)$ доказана.

Составим, далее, интеграл

$$I_{n,n} = \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{R_n(x)} d\psi(x) = \int_{-1}^1 |R_n(x)|^2 d\psi(x)$$

и подставим в него значения функции $R_n(x)$ из соотношения (1.17).

Тогда получим

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \frac{1}{2} C_n^2 \left[\int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}^*(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) + 2 \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \Phi_{2n}^*(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Легко заметить, что справедливы формулы

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) = 2\pi \quad (1.31)$$

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}^*(e^{i\theta}, P_n^{(w)})|^2 d\tau(\theta) = \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(w)})|^2 d\tau(\theta) = 2\pi. \quad (1.31')$$

Остается вычислить интеграл

$$\begin{aligned} I_{2n, 2n} &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \Phi_{2n}^*(e^{-i\theta}, P_n^{(w)}) d\tau(\theta) = \\ &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}^2(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_{2n}^{-1}(e^{-i\theta}) d\tau(\theta). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Заметим, что из формул (1.20), (1.20'') и (1.23') вытекает следующее соотношение

$$\begin{aligned} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_{2n}^{-1}(e^{-i\theta}) &= \pi_n(e^{i\theta}) \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_n(e^{-i\theta}) = \\ &= \pi_n(e^{i\theta}) \left[\sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \varphi_{n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_{k-n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_{2n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подставляя полученное выражение (1.33) в формулу (1.32), будем иметь

$$I_{2n, 2n} = \lambda_0^{(2n)} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \varphi_{2n}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) d\tau(\theta).$$

Но так как, ввиду разложения (1.16') и формулы (1.27), справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(w)}) d\tau(\theta) = \\ &= \lambda_{2n}^{(2n)} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \varphi_{\pi}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) d\tau(\theta) = 2\pi, \end{aligned}$$

то, следовательно,

$$I_{2n, 2n} = \frac{2\lambda_0^{(2n)}\pi}{\lambda_{2n}^{(2n)}}, \quad (1.34)$$

если вспомнить, что $\lambda_{2n}^{(2n)} = \lambda_{2n}^{(2n)}$.

Наконец, учитывая формулы (1.31), (1.31') и (1.34), из (1.30) получим

$$I_{n,n} = 2\pi C_n^2 \left(1 + \frac{k_0^{(2n)}}{k_{2n}^{(2n)}} \right) = 1,$$

если иметь в виду соотношение (1.18) для C_n .

Теорема полностью доказана.

1.3. В заключение параграфа отметим два частных случаях теоремы, которые сводятся к ранее известным системам.

а) Допустим, что все полюсы $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы функций $\{M_k(x)\}_0^\infty$ стягиваются в бесконечно удаленную точку. Тогда последовательность функций $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_0^\infty$ перейдет в систему полиномов Г. Сеге $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$, ортонормальных на единичной окружности относительно обложения $d\tau(\eta)$, функция $\Phi_{2n}(z, P_n^{(\omega)})$ перейдет в функцию $z^{2n}\Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right)$ и, наконец, произведение $\pi_n(z)$ — в функцию z^{-n} . В итоге формула (1.17) теоремы переходит в хорошо известную формулу Г. Сеге для полиномов, ортонормальных на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложения $d\psi(x)$

$$R_n(x) = \frac{\Phi_{2n}(z) + \Phi_{2n}^*(z)}{\int \frac{2\pi \left(1 + \frac{\Phi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right)}{z^{-n}}, \quad x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (1.35)$$

б) Рассмотрим другой частный случай, когда обложение $d\tau(\eta)$ тождественно равно $d\eta$, иначе говоря, когда $d\psi(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. В этом случае система функций $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_0^\infty$ переходит в систему рациональных функций Мальмквиста $\{p_k(z, P_n^{(\omega)})\}_0^\infty$, а это означает, что все коэффициенты $\lambda_k^{(k)}$, входящие в разложение (1.16), равны нулю, кроме $\lambda_k^{(k)}$, равного единице. Поэтому из представления (1.24) следует, что в этом случае приходим к формуле

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_n(x, P_n^{(\omega)}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\pi_n^{(\omega)}(x + \sqrt{x^2-1}) + \pi_n^{(\omega)}(x - \sqrt{x^2-1})], \end{aligned}$$

установленной в работе [6].

§ 2. Биортогональная система обобщенных тригонометрических полиномов

2.1. Пусть, вновь, $\{\omega_k\}_0^\infty$ ($\omega_0 = \infty$) есть произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих вне отрезка $[-1, +1]$, а $\{z_k\}_0^\infty$ ($z_0 = \infty$) — ассоциированная с ней по формуле (1.2) последовательность чисел, лежащих в единичном круге.

Поставим, далее, в соответствие последовательности чисел $\{x_k\}_0^\infty$ следующую систему так называемых обобщенных тригонометрических функций, рассмотренных в работе [7]

$$1, C_1(\theta), S_1(\theta), \dots, C_n(\theta), S_n(\theta), \dots, \quad (2.1)$$

где

$$C_k(\theta) = \operatorname{Re} \varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta}), \quad S_k(\theta) = \operatorname{Im} \varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta}) \\ (k = 1, 2, \dots),$$

а $\{\varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta})\}_0^\infty$ — система рациональных функций Малмквиста, определенная по формуле (1.3).

Назовем обобщенным тригонометрическим полиномом порядка n выражение вида

$$a_n C_n(\theta) + a'_n S_n(\theta) + \dots + a_2 C_2(\theta) + b_2 S_2(\theta) + a_0 \quad (2.2)$$

где коэффициенты a_n и a'_n одновременно не равны нулю.

Два обобщенных тригонометрических полинома порядка n

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [a_k C_k(\theta) + a'_k S_k(\theta)]$$

и

$$G_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [b_k C_k(\theta) + b'_k S_k(\theta)],$$

назовем линейно-независимыми, если

$$\begin{vmatrix} a_n & a'_n \\ b_n & b'_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отметим, что в частном случае, когда $x_k = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), функции системы (2.1) переходят в тригонометрическую систему $1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots$, а обобщенный тригонометрический полином вида (2.2) — в обычный тригонометрический полином.

Пусть, наконец, $\tau(\theta)$ является произвольной неубывающей, ограниченной на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией с бесконечным числом точек роста, причем не обязательно четной, в отличие от функции, определенной в § 1 по формуле (1.7).

Определим теперь биортогональную систему обобщенных тригонометрических полиномов $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_0^\infty$, ассоциированную с данным обложением $d\tau(\theta)$ согласно следующим условиям:

а) функции $F_n(\theta)$ и $G_n(\theta)$ ортонормальны в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta) \overline{F_n(\theta)} d\tau(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_m(\theta) \overline{G_n(\theta)} d\tau(\theta) = \delta_{m,n},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta) \overline{G_n(\theta)} d\theta = 0 \quad (2.3)$$

$$(m, n = 1, 2, \dots);$$

б) они являются линейно-независимыми обобщенными тригонометрическими полиномами порядка n .

Введем, далее, для данного обложения $d\theta$ линейное функциональное пространство посредством следующего скалярного произведения и нормы

$$\left\{ \begin{aligned} (f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta = 0, \\ \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta, \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$(2.4')$$

здесь функции f и g таковы, что интегралы в формулах (2.4) и (2.4') существуют в смысле Лебега-Стилтьеса.

Нетрудно убедиться в том, что биортогональная система обобщенных тригонометрических полиномов $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$, определенная выше, является результатом процесса ортогонализации системы обобщенных тригонометрических функций (2.1) в метрике (2.4)–(2.4').

С другой стороны, вновь существует явная связь между функциями биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов и рациональными функциями системы $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормальной на единичной окружности относительно обложения $d\theta$. Для установления этой связи опять будем предполагать, что $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ — вещественные числа, и для любого целого n обозначим через $\{C_k(\theta, P_n^{(\omega)}), S_k(\theta, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^{\infty}$ систему обобщенных тригонометрических функций, ассоциированных с введенной в § 1 последовательностью $P_n^{(\omega)}$. Обобщенный тригонометрический полином порядка k при этом будет иметь вид

$$a_k C_k(\theta, P_n^{(\omega)}) + a'_k S_k(\theta, P_n^{(\omega)}) + \dots + a_0.$$

2.2. Установим связь между функциями биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов и функциями $\Phi_{2n}(z, P_n^{(\omega)})$.

Теорема 2.1. Пусть $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\omega_0 = \infty$) — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка $[-1, +1]$, а $P_n^{(\omega)}$ — ассоциированная с ней последовательность чисел, лежащих на этом отрезке. Выберем постоянное число γ_{2n} так, чтобы произведение $e^{-2i\gamma_{2n}} I_{2n}$, где

$$I_{2n} = \Phi_{2n}(0, P_n^{(\omega)}),$$

было бы вещественным числом.

Тогда

а) функции системы $\{r_n(\theta), q_n(\theta)\}_0^\infty$, определенные по формуле

$$r_n(\theta) + i q_n(\theta) = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}), \quad (2.5)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют следующим соотношениям

$$(r_n, q_m) = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

$$(r_n, r_m) = 0 \quad (n \neq m), \quad (q_n, q_m) = 0 \quad (n \neq m), \quad (2.6')$$

$$\|r_n\| \neq 0, \quad \|q_n\| \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (2.6'')$$

б) функции биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_0^\infty$, удовлетворяющие условиям биортогональности (2.3), выражаются по следующим формулам

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} F_n(\theta) + i \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} G_n(\theta) = \\ = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}), \quad z = e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F_n(\theta) = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} r_n(\theta), \quad (2.7')$$

$$G_n(\theta) = \left[\frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} q_n(\theta), \quad (2.7'')$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

в) при $z = e^{i\theta}$ имеют место следующие соотношения

$$r_n(\theta) = \frac{1}{2} \left[e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \quad (2.8)$$

$$q_n(\theta) = \frac{1}{2i} \left[e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) - e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \quad (2.8')$$

$$\begin{aligned} F_n(\theta) = \left[2 \left(1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + \right. \\ \left. + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$G_n(\theta) = \frac{1}{i} \left[2 \left(1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) - \right.$$

$$-e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right)\Bigg|^{\infty}. \quad (2.9')$$

Показательство. В первую очередь отметим, что соотношения (2.8) и (2.8') непосредственно следуют из формулы (2.5) и равенства

$$r_n(\theta) - iq_n(\theta) = e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right), \quad (2.5')$$

а соотношения (2.9) и (2.9') — из формул (2.7), (2.8) и (2.7'), (2.8') соответственно.

Для доказательства соотношений (2.6') преобразуем выражение (2.8). С учетом разложения (1.16) из (2.8) следует, что функцию $r_n(\theta)$ можно представить в виде

$$r_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} \left[\mu_k \pi_n(z) \varphi_k(z, P_n^{(w)}) + \nu_k \pi_n^{-1}(z) \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \\ z = e^{i\theta}, \quad (2.10)$$

где μ_k и ν_k ($k=0, 1, \dots, 2n$) — некоторые комплексные коэффициенты.

Преобразуем формулу (2.10), имея в виду соотношения (1.20), (1.20') и (1.20''):

$$r_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \left[\mu_k \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(w)}\right) + \nu_k \varphi_{n+k}(z, Q_n^{(w)}) \right] + \\ + \sum_{k=n+1}^{2n} \left[\mu_k \varphi_{k-n}(z, P_n^{(w)}) + \nu_k \varphi_{k-n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \\ z = e^{i\theta}, \quad (2.11)$$

где $Q_n^{(w)}$ — последовательность вещественных чисел, введенная при доказательстве теоремы 1.1.

Из формулы (2.11) окончательно следует, что функцию $r_n(\theta)$ можно представить в следующем виде

$$r_n(\theta) = \sum_{k=1}^n [c_k \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) + d_k \varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(w)})] + \\ + \sum_{k=0}^n [l_k \varphi_k(e^{i\theta}, Q_n^{(w)}) + t_k \varphi_k(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)})], \quad (2.12)$$

где c_k, d_k, l_k и t_k ($k=0, 1, \dots, n$) — некоторые комплексные числа.

Нетрудно доказать, используя формулу (2.8') и соотношения (1.16), (1.20), (1.20') и (1.20''), что аналогичное представление имеет также функция $q_n(\theta)$

* Отметим, что в формулах (2.7), (2.7'), (2.7''), (2.9) и (2.9') следует брать либо одновременно верхние знаки, либо одновременно — нижние.

$$q_n(\theta) = \sum_{k=1}^n [c'_k \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) + d'_k \varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})] + \\ + \sum_{k=0}^n [l'_k \varphi_k(e^{i\theta}, Q_n^{(m)}) + t'_k \varphi_k(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)})] \quad (2.12')$$

(c'_k, d'_k, l'_k и $t'_k, k=0, 1, \dots, n$ — некоторые комплексные числа).

Из представления (2.12) следует, что для доказательства справедливости соотношения

$$(r_n, r_m) = 0 \text{ при } m < n$$

достаточно проверить, что выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{i\theta}, Q_n^{(m)}) d\theta = 0 \quad (2.13)$$

при $m < n$.

Составим, например, первый из интегралов соотношения (2.13) и подставим в него значение $r_n(\theta)$ из формулы (2.8)

$$I_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{i\theta}) \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{-i\theta}) \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})] \times \\ \times \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta. \quad (2.14)$$

Если учесть теперь соотношения (1.21), (1.22'), (1.27) и (1.26), то из (2.14) немедленно получим, что

$$I_{n,m} = 0 \text{ при } m < n.$$

Таким же образом, с учетом формул (1.20)–(1.23) и (1.26)–(1.27), легко убедиться в справедливости всех остальных соотношений (2.13).

Аналогичными рассуждениями, используя представление (2.12'), можно доказать также соотношение

$$(q_n, q_m) = 0 \text{ при } m < n.$$

Если же иметь в виду представление (2.12') и формулу (2.8), то нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$(r_n, q_m) = 0 \text{ при } m < n.$$

Рассмотрим, далее, интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{i\theta}) \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(n)})]^2 d\sigma(\theta).$$

Из формулы (2.5) следует, что

$$I_n = \|r_n\|^2 - \|q_n\|^2 + 2i(r_n, q_n). \quad (2.15)$$

С другой стороны, интеграл I_n можно вычислить, если воспользоваться значением интеграла $I_{2n, 2n}$, входящего в формулу (1.32). В самом деле, из формул (1.32) и (1.34) следует

$$I_n = \frac{e^{-2i\gamma_{2n}}}{2\pi} I_{2n, 2n} = \frac{e^{-2i\gamma_{2n}} l_{2n}}{\lambda_{2n}^{(2n)}}. \quad (2.16)$$

Из равенства (2.16), с учетом определения постоянной γ_{2n} , имеем, что

$$I_n = \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}}, \quad (2.17)$$

причем знак формулы (2.17) зависит от соответствующего выбора γ_{2n} .

Сравнивая формулы (2.15) и (2.17), приходим к заключению, что

$$(r_n, q_n) = 0 \quad \text{и} \quad \|r_n\|^2 - \|q_n\|^2 = \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}}.$$

Если к тому же учесть, что

$$\|r_n\|^2 + \|q_n\|^2 = 1,$$

то будем иметь

$$\|r_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right), \quad (2.18)$$

$$\|q_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right). \quad (2.18')$$

Из соотношений (2.18) и (2.18') непосредственно следуют заключения теоремы (2.6'), (2.7), (2.7') и (2.7''). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что последовательность вещественных чисел $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ ($\omega_0 = \infty$) и данное обложение $d\sigma(\theta)$ определяют биортогональную систему обобщенных тригонометрических полиномов не единственным образом, а с точностью до выбора постоянной γ_{2n} .

Интересно разобрать частный случай доказанной теоремы, когда функция $\sigma(\theta)$ является четной, т. е. $\sigma(-\theta) = \sigma(\theta)$. В этом случае все коэффициенты $r_k^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) разложения (1.16)

$$\Phi_k(z, P_n^{(n)}) = \sum_{l=0}^k r_l^{(k)} \varphi_l(z, P_n^{(n)}),$$

в том числе и $\lambda_{2n}^{(2n)}$ — вещественны.

Однако, ввиду условия $\omega_0 = \infty$ ($z_0 = 0$), имеем

$$\varphi_0(0, P_n^{(\infty)}) = 1, \quad \varphi_k(0, P_n^{(\infty)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

и, следовательно, число

$$l_{2n} = \Phi_{2n}(0, P_n^{(\infty)}) = l_0^{(2n)}$$

вещественно.

Поэтому в этом случае следует положить $\gamma_{2n} = k \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) для всех n , если $l_{2n} \neq 0$; если же $l_{2n} = 0$, то γ_{2n} берем произвольно. Если выбрать, в частности, $k = 0$, т. е. $\gamma_{2n} = 0$, то формула (2.9) теоремы переходит при $x = \cos \theta$ в соотношение (1.17) теоремы 1.1, функции $F_n(\theta)$ переходят в этом случае в функции $R_n(x)$ и представляют из себя линейную комбинацию функций $\{M_k(x, P_n^{(\infty)})\}_{k=0}^n$ и $\{M_k(x, Q_n^{(\infty)})\}_{k=0}^n$.

Нетрудно также показать, что в этом случае функции $G_n(\theta)$ при $x = \cos \theta$ переходят в систему рациональных функций, ортогональных на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложения $(1-x^2) d\psi(x)$, где $\psi(x)$ — функция, связанная с $\tau(\theta)$ по формуле (1.7), и представляют собой линейную комбинацию обобщенных полиномов Чебышева второго рода $M_k^{(1)}(x)$, введенных в работе [6]. Однако, в настоящей статье мы не будем останавливаться на этом.

2.3. Выведем теперь два соотношения, которым удовлетворяют функции систем $\{r_n(\theta), q_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$ и $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$.

Теорема 2.2. Для любого целого числа n при $z = e^{i\theta}$ справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right) r_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right) q_n(\theta) = \\ = \frac{e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z)}{l_{2n}^{(2n)}} \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(\infty)}\right); \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right)^{\frac{1}{2}} F_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right)^{\frac{1}{2}} G_n(\theta) = \\ = \frac{\sqrt{2} e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z)}{l_{2n}^{(2n)}} \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(\infty)}\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Доказательство. В работе [5] М. М. Джрбашяном установлено следующее рекуррентное соотношение для функций системы $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$, ассоциированных с произвольной последовательностью $\{z_k\}_{k=0}^\infty$

$$-\frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \frac{l_{n+1}^{(n+1)}}{(1 - |z_{n+1}|^2)^{\frac{1}{2}}} \Phi_{n+1}(z) =$$

$$= \frac{B_{n+2}(z)}{z} \left\{ \Phi_{n+1}(z_{n+1}) \bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^n \Phi_k(z_{n+1}) \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad (2.21)$$

где $B_{n+2}(z) = \prod_{k=0}^{n+1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}$, а под отношением $\frac{|z_l|}{z_l}$ при $z_l = 0$ подразумевается минус единица.

Запишем формулу (2.21) для последовательности $P_n^{(m)}$ при $z = e^{i\theta}$, заменив в ней n на $2n-1$ и учитывая, что при $z = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} B_k(z) &= \pi_k^{-1}(z) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ &= \frac{|z_{2n}|}{z_{2n}} \frac{l_{2n}^{(2n)}}{(1 - |z_{2n}|^2)^{\frac{1}{2}}} \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) = \\ &= \pi_{2n}^{-1}(z) \left\{ \Phi_{2n}(z_{2n}, P_n^{(m)}) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{2n-1} \Phi_k(z_{2n}, P_n^{(m)}) \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Если иметь в виду, что в последовательности $P_n^{(m)}$ $z_{2n} = 0$, то из (2.22) получим

$$\begin{aligned} l_{2n}^{(2n)} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) &= l_{2n} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) + \\ &+ \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \end{aligned}$$

или

$$l_{2n}^{(2n)} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) - l_{2n} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) = \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right),$$

$$z = e^{i\theta}.$$

Отсюда, с учетом формулы (2.5), имеем

$$\begin{aligned} l_{2n}^{(2n)} e^{i\gamma_{2n}} [r_n(\theta) + i q_n(\theta)] - l_{2n} e^{-i\gamma_{2n}} [r_n(\theta) - i q_n(\theta)] = \\ = \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из соотношения (2.23) получаем

$$\begin{aligned} r_n(\theta) (\bar{l}_{2n}^{(2n)} - |l_{2n}|) + i q_n(\theta) (l_{2n}^{(2n)} + |l_{2n}|) = \\ = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Наконец, если обе части формулы (2.24) разделить на $\lambda_{2n}^{(2n)}$, а также учесть соотношения (2.7') и (2.7''), то доказательство теоремы на этом завершится.

2.4. Введем в рассмотрение ядро биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов

$$K_n(\theta, \nu) = \sum_{k=0}^n [F_k(\theta) F_k(\nu) + G_k(\theta) G_k(\nu)], \quad (2.25)$$

где θ и ν — вещественные переменные.

Нетрудно проверить, что ядро $K_n(\theta, \nu)$, как и введенное М. М. Джрбашьяном [5] ядро обложения $d\sigma(\theta)$ системы рациональных функций $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$, $z = e^{i\theta}$,

$$S_n(z, \zeta) = \sum_{k=0}^n \overline{\Phi_k(\zeta)} \Phi_k(z) \quad (2.26)$$

обладает следующим свойством:

для того, чтобы для любого обобщенного тригонометрического полинома $\mu_n(\theta)$ выполнялось тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \nu) \overline{\mu_n(\theta)} d\sigma(\theta) = \overline{\mu_n(\nu)}, \quad (2.27)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\rho(\theta, \nu) = K_n(\theta, \nu)$.

На основе этого свойства устанавливается следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть $S_n(z, \zeta)$ является ядром обложения $d\sigma(\theta)$ системы рациональных функций $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_{k=0}^\infty$. Тогда ядро биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов $K_n(\theta, \nu)$ выражается по следующим формулам

$$K_n(\theta, \nu) = \pi_n^{-1}(\zeta) \pi_n(z) S_{2n}(z, \zeta) \quad (2.28)$$

при $z = e^{i\theta}$, $\zeta = e^{i\nu}$;

$$K_n(\theta, \nu) = \frac{(1 - z_1 z)(1 - z_1 \zeta)}{1 - |z_1|^2} \pi_n^{-1}(\zeta) \pi_n(z) \times \\ \times \frac{\Phi_{n+1}^*(z, P_n^{(w)}) \overline{\Phi_{n+1}(\zeta, P_n^{(w)})} - \Phi_{n+1}(z, P_n^{(w)}) \overline{\Phi_{n+1}(\zeta, P_n^{(w)})}}{1 - z \bar{\zeta}}, \quad (2.29)$$

где

$$\Phi_{n+1}^*(z, P_n^{(w)}) = \pi_{n+1}^{-1}(z) \Phi_{n+1}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right).$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.28) покажем, что выражение, стоящее в правой части (2.28), обладает свойством (2.27) относительно произвольного обобщенного тригонометрического полинома $\mu_n(\theta)$.

Однако, ввиду определений (2.1) и (2.2), любой обобщенный тригонометрический полином можно представить в виде

$$\pi_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [c_k \varphi_k(e^{i\theta}) + d_k \varphi_k(e^{-i\theta})].$$

Это означает, что достаточно проверить справедливость соотношений

$$I_k^{(1)}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_n^{-1}(e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta})} d\theta = \overline{\varphi_k(e^{i\nu})} \quad (2.30)$$

и

$$I_k^{(2)}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_n^{-1}(e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_k(e^{-i\theta})} d\theta = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu})} \quad (2.30')$$

при $k \leq n$.

Учитывая то обстоятельство, что ядро $S_{2n}(z, \zeta)$ обладает свойством (2.27), ввиду соотношений (1.10), (1.21) и (1.20'), имеем

$$\begin{aligned} I_k^{(1)}(\nu) &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_{k-n}(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \pi_n(e^{-i\nu}) \overline{\varphi_{k-n}(e^{-i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu})} \\ &\quad \text{при } k \leq n. \end{aligned}$$

Наконец, из соотношений (1.10), (1.20) и (1.22') следует, что

$$\begin{aligned} I_k^{(2)}(\nu) &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_{n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \pi_n(e^{-i\nu}) \overline{\varphi_{n-k}(e^{-i\nu}, Q_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{i\nu})}, \quad k \leq n. \end{aligned}$$

Формула (2.28) доказана.

Для доказательства соотношения (2.29) используем формулу Кристофеля для ядра обложения $d\theta$ системы рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^n$, установленную М. М. Джрбашяном [5]

$$S_n(z, \zeta) = \frac{(1 - \bar{z}_{n+1} \zeta)(1 - \bar{\zeta}_{n+1} z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(z)} \Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}^*(z)} \Phi_{n+1}(z)}{1 - \bar{z}z} \quad (2.31)$$

Если записать эту формулу для ядра системы $\{\Phi_k(z, P_n^{(m)})\}_{k=0}^\infty$, заменив в ней n на $2n$, с учетом соотношения (2.28) и свойства периодичности последовательности $P_n^{(m)}$, то это приведет к соотношению (2.29). Теорема доказана.

Отметим в заключение, что теоремы 1.1, 2.1, 2.2 и 2.3 могут быть использованы в дальнейшем при установлении алгебраических и предельных свойств рассмотренных систем функций $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$ в зависимости от свойств систем рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 I 1965

Ա. Ա. ԿՆԲԱԶՅԱՆ

ԴԱՅԻՌՆԱԿԱՆ ՀԱՌՆԱԿՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԿԱՆ ՄԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՎԱԾ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՆՈՎԱԿԱՆ ՀԱՌՆԱԿՆԵՐԻ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԿԱՆ ՄԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ փ ո փ ո ի մ

Վ. Սեդլուի աշխատություններում կառուցված է կամայական կշռով միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամների հանրահաշվական տասնամասին տեսությունը [1]: Նրա կողմից նաև հայտնաբերված է արդարի բազմանդամների և $[-1, +1]$ հատվածում համապատասխան կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների միջև գոյություն ունեցող բացառաշատ կապը: Վ. Սեդլուի կողմից վերջերս հրատարակված աշխատության մեջ [4] բերվում է կամայական կշռով միավոր շրջանագծի վրա բիօրթոգոնալ եռանկյունաչափական բազմանդամների սխեմների կառուցումը:

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատության մեջ [5] դարգացված է միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով օրթոգոնալ և միավոր շրջանից դուրս ֆիքսված բևեռների ունեցող ուղիղի վրա ֆունկցիաների սխեմների հանրահաշվական և մասամբ սահմանափակ տեսությունը: [6] աշխատության մեջ ստացված է Չերիշևի կլասիկ բազմանդամների բնական ընդհանրացումը:

Ներկա աշխատությունը նվիրված է Չերիշևի ընդհանրացված բազմանդամների և ընդհանրացված եռանկյունաչափական սխեմների կիրառություններին:

§ 1-ում ապացուցվում է Սեդլուի բանաձևին անալոգ մի բանաձև, որը կապ է հաստատում միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով օրթոգոնալ և $[-1, +1]$ հատվածում համապատասխան կշռով օրթոգոնալ ուղիղի վրա ֆունկցիաների սխեմների միջև:

§ 2-ում ընդհանրացվում են Վ. Սեդլուի [4] աշխատության արդյունքները:

կառուցվում է միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով բիրթոգրական ընդհանրացված հասկերնաչափական բազմանդամների սխեմով և կապ է հաստատվում այդ սխեմի և միավոր շրջանագծի վրա նախ կշռով օրթոգոնալ ապրոնալ ֆունկցիաների միջև:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Szegő G. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
2. Геронимус Я. Л. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. Записки научно-исследовательского института математики и ХМО, 19 (1948), § 30.
3. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
4. Szegő G. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials. Труды математического института Академии наук Венгрии, 8, серия А, вып. 3, 1963.
5. Джрбашян М. М. Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов. Доклады АН СССР, 147, № 6, 1962.
6. Джрбашян М. М. и Китбалян А. А. Об одном обобщении полиномов Чебышева. Доклады АН АрмССР, 38, № 5, 1964.
7. Китбалян А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1964.