ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 4, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

В. А. ДЖРБАШЯН

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

При решении ряда физических задач оказываются необходимыми интегралы вида

$$\int_a^b t^\lambda E_\nu(\rho t)\,dt, \qquad (A)$$

$$\int_a^b t^\lambda E_\mu(\rho t)\,\bar{E}_\nu(\sigma t)\,dt \qquad (B)$$

и т. д.

Здесь λ, μ, ν — комплексные, ρ, σ — действительные или мнимые числа, $-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty$; $E_\mu(\rho t)$, $\bar{E}_\nu(\sigma t)$ — решения уравнения Бесселя. Произвольность перечисленных величин ограничивается лишь требованием существования интегралов (A), (B).

В некоторых частных случаях значения интегралов даются:

для (A), (B) при $a=0$, $b=\infty$ формулами Вебера—Шафхейтлина; для (A) при $\lambda = \pm\nu + 2m + 1$, где m — натуральное целое число, или нуль-рекуррентными формулами; для (B) при $\lambda = \pm 1$, $\lambda = -\mu - \nu + 1$, $\lambda = \mu + \nu + 1$ — формулами Ломмеля. Если λ отличается от приведенных четным числом, то при $E_\mu = \bar{E}_\nu$ значения интегралов вида (B) могут быть найдены с помощью формулы приведения Шафхейтлина [1].

В настоящей работе излагается метод вычисления интегралов (A), (B) в их области существования. Значения интегралов, как и в известных частных случаях, даются рядами, причем, если предел b (или a) — большое число, то соответствующий ряд является асимптотическим.

В приложении приводятся простейшие интегралы вида (A), (B) для всех возможных значений параметров.

Применяемый подход может быть полезен и при вычислении интегралов других типов.

§ 1. Вычисление интегралов вида (A), (B) при $b=\infty$

Рассмотрим сначала интегралы (A), (B) в случае, когда $b=\infty$. Изложим метод вычисления таких интегралов на конкретном примере интеграла

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt,$$

где $K_\nu(t)$ — функция Макдональда (см. приложение).

Если $a=0$, то рассматриваемый интеграл сходится при

$$\operatorname{Re}(\lambda+1)>2\,|\operatorname{Re}(\nu)|. \tag{1.1}$$

Если $a>0$, то он существует для произвольных комплексных ν, λ.

Допустим сначала, что имеет место условие (1.1). Тогда можем написать

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt=\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(\infty)-\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(a), \tag{1.2}$$

где для сходящихся интегралов введено обозначение

$$\int_0^t t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt=\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(t).$$

$\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(\infty)$ мы можем вычислить непосредственно, воспользовавшись представлением Барнса [1]. При предположении (1.1) получается известное [2] выражение

$$\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(\infty)=\frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}. \tag{1.3}$$

Найдем теперь $\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(a)$. Исходя из определения [1] функции $K_\nu(t)$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}K_\nu^2(t)&=2^{2\nu-2}\Gamma^2(\nu)\,t^{-2\nu}\,{}_1F_2\left(-\nu+\frac{1}{2};\ -\nu+1,\ -2\nu+1;\ t^2\right)+\\&+2^{-1}\Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu)\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2};\ -\nu+1,\ \nu+1;\ t^2\right)+\\&+2^{-2\nu-2}\Gamma^2(-\nu)\,t^{2\nu}\,{}_1F_2\left(\nu+\frac{1}{2};\ \nu+1,\ 2\nu+1;\ t^2\right),\end{aligned} \tag{1.4}$$

где ${}_pF_q$ — обобщенный, гипергеометрический ряд.

Учитывая, что получающийся ряд сходится [3], помножим (1.4) на t^λ и почленно проинтегрируем. Таким образом будем иметь

$$\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \Phi^{(1)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) + \Phi^{(2)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) + \Phi^{(3)}_{\lambda, K_\nu^2}(a), \tag{1.5}$$

где

$$\Phi^{(1)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \frac{2^{2\nu-2}\,\Gamma^2(\nu)\,a^{-2\nu+\lambda+1}}{-2\nu+\lambda+1}\,{}_2F_3\Big(-\nu+\frac{1}{2},\ -\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2};$$

$$-\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2},\ -\nu+1,\ -2\nu+1;\ a^2\Big),$$

$$\Phi^{(2)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \Phi^{(1)}_{\lambda, K_\nu^2}(a),$$

$$\Phi^{(3)}_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(-\nu)\,a^{\lambda+1}}{2(\lambda+1)}\,{}_2F_3\Big(\frac{1}{2},\ \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2};$$

$$\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2},\ -\nu+1,\ \nu+1;\ a^2\Big).$$

Равенства (1.2), (1.3) и (1.5) дают решение поставленной задачи. Действительно, результат (1.2) мы получили при предположении (1.1), когда $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty)$ и $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$ сходятся и даются формулами (1.3) и (1.5). Однако, правая и левая части равенства (1.2), где под $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty)$ и $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$ подразумеваются правые части (1.3) и (1.5), являются аналитическими функциями от ν, λ, a при любых комплексных ν, λ и положительном a. Поэтому согласно принципу аналитического продолжения (1.2) справедливо для указанной широкой области ν, λ, a.

Особо следует остановиться на случаях, когда среди $-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$, $\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$, $-\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$ есть нуль или натуральное число, а $-\frac{\lambda}{2}-1$ отлично от таких чисел. В этих случаях первый и второй члены правой части (1.2) в отдельности обращаются в бесконечность. Однако, после устранения неопределенности получаем конечное выражение. Приведем значения (1.2) для наиболее простых таких случаев, когда только одно из упомянутых трех выражений есть нуль или натуральное число.

Пусть

$$n,\ n',\ n'',\ n''' = 0,\ 1,\ 2, \cdots.$$

Когда

$$-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}=n,\qquad \nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\neq n'',\qquad -\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\neq n'''$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\Gamma(-\nu-n)\,\Gamma(\nu-n)}{4n!\,\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[2\ln a - \psi(n+1) - \psi(-\nu-n) - \psi(\nu-n) + \psi\left(-n+\frac{1}{2}\right)\right] -$$

$$-\Phi'_{\lambda,\,K_\nu^2}(a); \qquad (1.2\text{а})$$

Когда

$$\pm\nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = n, \quad -\frac{\lambda}{2} - 1 \neq n', \quad \mp\nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n'',$$

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n'''$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt = \frac{(-1)^{n+1}\pi^{1/2}\Gamma(\pm\nu-n)\,\Gamma(\pm 2\nu-n)}{4n!\,\Gamma\left(\pm\nu-n+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[2\ln a - \psi(n+1) - \psi(\pm\nu-n) - \psi(\pm 2\nu-n) + \psi\left(\pm\nu-n+\frac{1}{2}\right)\right] -$$

$$-\Phi'_{\lambda,\,K_\nu^2}(a). \qquad (1.2\text{б})$$

Здесь $\Phi'_{\lambda,\,K_\nu^2}(a)$ есть $\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(a)$ за вычетом обращающегося в бесконечность члена в (1.5), ψ — логарифмическая производная от гамма-функций: $\psi(z) = \dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$. Если $a < 0$, то рассматриваемый интеграл сходится при условии (1.1) и дается формулой (1.2). При нарушении (1.1) несобственный интеграл не существует. Однако, если при этом существует его главное значение (при $\mathrm{Re}(\lambda+1) > 0$, $\mathrm{Re}(\pm 2\nu) > 0$, если $\mp 2\nu + \lambda + 1$ — действит. четн., при $\mathrm{Re}(\lambda+1) < 0$, если $\lambda + 1$ — действит. четн., 2ν — действ. четн.), то нетрудно убедиться, что оно дается правой частью (1.2) и следующих из нее формул (1.2а), (1.2б) и т. д., в предположении, что a под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Выражение (1.2) и вытекающие из него формулы, хотя и являются общими*, но практически удобны при небольших a.

При больших $|a|$ рассматриваемый интеграл представляется асимптотическим разложением

* Нетрудно убедиться в частности, что при $\lambda=1$ (1.2) есть хорошо известная формула

$$\int_a^\infty tK_\nu^2(t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left[K_\nu'^2(a) - \left(1+\frac{\nu^2}{a^2}\right)K_\nu^2(a)\right]$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt \sim \frac{\pi}{4} a^{\lambda-1} e^{-2a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(-\lambda+m+1)}{(2a)^m} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)} \times$$

$$\times \sum_{m''=0}^{m'} \frac{\Gamma\left(\nu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m''+\frac{1}{2}\right)\times}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\times}$$

$$\frac{\times\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{\times\Gamma^2\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}, \tag{1.6}$$

получаемым почленным интегрированием асимтотического разложения $t^\lambda K_\nu^2(t)$, с последующей подстановкой выражения [2] для неполной гамма-функции $\Gamma(\lambda - m, 2a)$, при больших $|a|$.

§ 2. Вычисление интегралов вида (*A*), (*B*)

Теперь исследуем интегралы (*A*), (*B*) для произвольного b. Представив $\int_a^b$ как разность интегралов $\int_a^\infty$ и $\int_b^\infty$, мы можем воспользоваться выражениями для них, выведенными способами, описанными в § 2. Особый интерес представляет случай, когда a—небольшое, b—большое. Например, для интеграла $\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt$ получается

$$\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t)\,dt \sim \Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(\infty) - \Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(a) - F_{\lambda,\,K_\nu^2}(b), \tag{2.1}$$

где $\Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(\infty) - \Phi_{\lambda,\,K_\nu^2}(a)$ дается формулами (1.3), (1.5), (1.2а), (1.2б), а через $F_{\lambda,\,K_\nu^2}(b)$ обозначена правая часть (1.6), представляющая собой асимптотическое разложение.

Формула (2.1) пригодна как для положительных, так и отрицательных a, b. Однако, в некоторых случаях, такие формулы непосредственно дают значения интегралов для a любого знака, но при $b > 0$. Значения интегралов и их главных значений при $b < 0$ даются аналитическим продолжением приводимых формул.

В приведенном примере интегралы $\int\limits_a^\infty, \int\limits_b^\infty$ сходились во всей области существования искомого интеграла $\int\limits_a^b$. Однако, возможны более сложные примеры.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b t^\lambda J_\nu(t)\,dt$. Для него нетрудно получить интегралы $\int\limits_a^\infty$ и $\int\limits_b^\infty$ (см. (П. 1)—(П. 1б)).

Равенства (П. 1) и (П. 1б) имеют место лишь при $\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$. При $\operatorname{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$ интегралы в левых частях (П. 1), (П. 1б) расходятся. Однако, разность выражений (П. 1), (П. 1б), являющаяся аналитической функцией, согласно принципу аналитического продолжения представляет собой интересующий нас интеграл во всей области его существования.

Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b t^\lambda J_\mu(t) J_\nu(t)\,dt$ находим сначала $\int\limits_a^\infty$ (см. (П. 5)), а почленное интегрирование асимптотическое разложения подинтегрального выражения дает

$$\int^\infty t^\lambda J_\mu(t)\,J_\nu(t)\,dt = \frac{b^{\lambda-1}}{2\pi}\sum_{m=0}^{p-1}\cos\left(2b-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2b)^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\times$$

$$\times\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma\left(\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\times}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\times}$$

$$\frac{\times\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{\times\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}-$$

$$-\frac{b^\lambda}{\pi}\sum_{m=0}^{p}\frac{\cos(\mu-\nu-m)\frac{\pi}{2}}{(\lambda-m)(2b)^m}\times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{(-1)^{m'}\Gamma\left(\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\times}{m'!\,(m-m')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\times}$$

$$\frac{\times\Gamma\left(\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)}{\times\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}+0\,(b^{\lambda-p-1}). \quad (2.2)$$

Причем при целом неотрицательном λ в (2.2) положено $p+1>\lambda$. (П. 5) и (2.2) имеют место при $\operatorname{Re}(\lambda)<0$, а если λ — целое неотрицательное число, то расходятся обе части равенств (П.5) и (2.2).

Теперь учтем, что последний конечный ряд в (2.2) может быть просуммирован.

Действительно,

$$\sum_{m'=0}^{m} \frac{(-1)^{m'}\Gamma\left(\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m'+\frac{1}{2}\right)\times}{m'!\,(m-m')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\times}$$

$$\frac{\times\Gamma\left(\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m-m'+\frac{1}{2}\right)}{\times\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu-m+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\mu+\frac{1}{2}, & -\mu+\frac{1}{2}, & -m; \\ \nu-m+\frac{1}{2}, & -\nu-m+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right], \quad (2.3)$$

где через ${}_3F_2\left[\begin{matrix}\mu+\frac{1}{2}, -\mu+\frac{1}{2}; -m; \\ \nu-m+\frac{1}{2}, -\nu-m+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]$ обозначен обобщенный гипергеометрический ряд с аргументом, равным единице. Воспользовавшись (2.3) и формулой (2) работы [4], второй член в (2.2) со своим знаком можем представить в виде

$$-b^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2^m\,b^{-m}}{(\lambda-m)\,m!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, возникающие при λ целом неотрицательном расходящиеся члены в разности интегралов $\int_a^{\infty}$ и $\int_b^{\infty}$ сократятся. Эта разность и в данном случае является аналитической функцией и представляет интеграл $\int_a^b$ (см. (П. 5)—(П.5г)).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ИНТЕГРАЛЫ ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ниже приведены значения простейших интегралов вида (*A*), (*B*), во всей области существования, вычисленных методом, изложенным в § 1, 2. Сначала даны интегралы $\int_a^{\infty}$, удобные для малых a, и $\int_b^{\infty}$, удобные для больших b. По этим значениям определяется $\int_a^b$ (без ограничения на $\operatorname{Re}\lambda$, необходимого в некоторых случаях для существования $\int_a^{\infty}$)

$$\int_a^b=\int_a^{\infty}-\int_b^{\infty}.$$

Затем приведены значения $\int_a^b$ для тех случаев, когда интегралы $\int_a^{\infty}$, $\int_b^{\infty}$ не существуют.

Выражения для $\int\limits_a^\infty$ справедливы для действительных a. Однако, при $a<0$ интеграл $\int\limits_a^\infty$ существует при дополнительном условии сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty$. При его нарушении, но при соблюдении других условий, которые также приводятся, существует главное значение интеграла $P\int$. Оно дается выражением для $\int\limits_a^\infty \left(\text{или } \int\limits_b^\infty\right)$ в предположении, что a под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Основное выражение для $\int\limits_a^\infty$, при некоторых значениях параметров λ, μ, ν, обращается в неопределенность. Для этих случаев $\int\limits_a^\infty$ приводится отдельно, причем через Φ' $\left(F' \text{ для } \int\limits_b^\infty\right)$ тогда обозначается $\Phi\,(F)$ за вычетом обращающихся в бесконечность членов.

Интегралы $\int\limits_b^\infty$ представлены асимптотическими рядами. В случаях, когда в подинтегральную функцию не входят $J_\nu(t)$ или $N_\nu(t)$, эти формулы справедливы при действительных b. В противном случае они непосредственно справедливы только при $b>0$, а при $b<0$ интегралы $\int\limits_b^\infty$ даются аналитическим продолжением, которое просто получить с помощью приведенных формул и аналитического продолжения [2] бесселевых функций.

Отметим, что формулы (П. 1а), (П. 2в), (П. 3в) получены независимо Люком [5].

Ниже введены следующие обозначения

$$n,\ n',\cdots=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

$$p=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

C — постоянная Эйлера: $C=0{,}577\,215\,6649$

ζ — дзета — функция Римана: $\zeta=1{,}202\,056\,9032\cdots,$

Если

$$n < n' - 1, \quad \lim_{\nu \to -n'} \frac{\psi(\nu + n + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)} = (-1)^{n' - n} \quad (n' - n - 1)!$$

$$\Phi_{\lambda, J_\nu}(a) = \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu + \lambda + 2m + 1)\, m!\, \Gamma(\nu + m + 1)}$$

$$\int_a^{\infty} t^\lambda J_\nu(t)\, dt = \frac{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)} - \Phi_{\lambda, J_\nu}(a). \qquad \text{(П. 1)}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}.$$

При $a < 0$ $\int\limits_a^{\infty}$ существует, если дополнительно $\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) > 0$; при $\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) \leqslant 0$ существует $P\int\limits_a^{\infty}$, если $\nu + \lambda + 1$ действ. четн.

При $-\nu - \lambda - 1 = 2n$, $n + \lambda \neq n'$

$$\int_a^{\infty} t^\lambda J_\nu(t)\, dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^\lambda}{n!\, \Gamma(\nu + n + 1)} \left[2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n + 1) - \psi(\nu + n + 1) \right] -$$

$$- \Phi^*_{\lambda, J_\nu}(a), \qquad \text{(П. 1а)}$$

$$\int_b^{\infty} t^\lambda J_\nu(t)\, dt \sim -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{\lambda - \frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(b - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(-\lambda + m + \frac{1}{2}\right)}{b^m} \times$$

$$\times \sum_{m'=0}^{m} \frac{\Gamma\left(\nu + m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda + m' + \frac{1}{2}\right) 2^{m'} m'!\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)}. \qquad \text{(П. 1б)}$$

$$\Phi_{\lambda, N_\nu}(a) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left[\cos \nu\pi\, \Phi_{\lambda, J_\nu}(a) - \Phi_{\lambda, J_{-\nu}}(a) \right]$$

$$\Phi_{\lambda, N_n}(a) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2\Phi_{\lambda, J_n}(a) \left(\ln \frac{a}{2} + C \right) - \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^{n-1}} \times \right.$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n + \lambda + 2m + 1)^2\, m!\, (n + m)!} - \frac{a^{-n+\lambda+1}}{2^{-n}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n+\lambda+2m+1)\, m!} - \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)\, m!\, (n+m)!} \left[\sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right]\Bigg\}.$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t)\, dt = \frac{2^{\lambda}}{\pi} \sin(-\nu+\lambda)\frac{\pi}{2}\, \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right) - \Phi_{\lambda,\, N_{\nu}}(a). \qquad \text{(П. 2)}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$$

При $a<0$ $\int_a^{\infty}$ существует $\left(\nu \neq p + \frac{1}{2}\right)$, если дополнительно $\operatorname{Re}(\lambda+1) > |\operatorname{Re}(\nu)|$; при $\operatorname{Re}(\lambda+1) \leqslant |\operatorname{Re}(\nu)|$ существует $P\int_a^{\infty}$, если $\mp\nu+\lambda+1$ действ. четн. при $\operatorname{Re}(\pm\nu) \geqslant 0$, $|\operatorname{Re}(\lambda+1)| \leqslant |\operatorname{Re}(\nu)|$ или, если ν и $\lambda+1$ действ. целые числа одинаковой четности при $|\operatorname{Re}(\lambda+1)| > |\operatorname{Re}(\nu)|$. При $\nu \neq p$, $-\nu-\lambda-1=2n$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t)\, dt = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{\lambda} \operatorname{ctg} \nu\pi}{n!\, \Gamma(\nu+n+1)} \left[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu+n+1) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\pi}{\sin 2\nu\pi}\right] - \Phi'_{\lambda,\, N_{\nu}}(a). \qquad \text{(П. 2а)}$$

При $\nu-\lambda-1=2n$, $-\nu+n \neq n'$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t)\, dt = \frac{2^{\lambda}\Gamma(\nu-n)}{n!\,\pi} \left[2\ln\frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu-n)\right] - \Phi'_{\lambda,\, N_{\nu}}(a).$$

$$\text{(П. 2б)}$$

При $\nu=n$, $-n-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t)\, dt = \frac{(-1)^{n'+1}\, 2^{\lambda-1}}{n'!\,(n+n')!\,\pi} \times \left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right) - \sum_{k=1}^{n+n'}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n'}\frac{1}{k}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n+n'}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n'}\frac{1}{k^2} - \frac{2\pi^2}{3}\right\} - \Phi'_{\lambda,\, N_n}(a). \qquad \text{(П. 2в)}$$

$$\int_b^\infty t^\lambda N_\nu(t)\,dt \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{\lambda-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(b-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{m\pi}{4}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right)2^{m'}m'!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}. \quad \text{(П. 2г)}$$

$$\Phi_{\lambda,\,K_\nu}(a)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[e^{-\frac{i(-\nu+\lambda+1)\pi}{2}}\Phi_{\lambda,\,J_{-\nu}}(ia)-e^{-\frac{i(\nu+\lambda+1)\pi}{2}}\Phi_{\lambda,\,J_\nu}(ia)\right]$$

$$\Phi_{\lambda,\,K_n}(a)=(-1)^{n+1}e^{-\frac{i(n+\lambda+1)\pi}{2}}\Phi_{\lambda,\,J_n}(ia)\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)+(-1)^n\frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)^2\,m!\,(n+m)!}-$$

$$-\frac{a^{-n+\lambda+1}}{2^{-n+1}}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n+\lambda+2m+1)\,m!}+$$

$$+(-1)^n\frac{a^{n+\lambda+1}}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)\,m!\,(n+m)!}\left[\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right].$$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)\,dt=2^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)-\Phi_{\lambda,\,K_\nu}(a).$$

(П. 3)

При $a<0$ $\int_a^\infty$ существует, если $\operatorname{Re}(\lambda+1)>|\operatorname{Re}(\nu)|$; при $\operatorname{Re}(\lambda+1)\leqslant$ $\leqslant\operatorname{Re}(\nu)|$ существует $P\int_a^\infty$, если $\mp\nu+\lambda+1$ действ. четн. при $\operatorname{Re}(\pm\nu)\geqslant 0$, $|\operatorname{Re}(\lambda+1)|\leqslant|\operatorname{Re}(\nu)|$ или, если ν и $\lambda+1$ действ. целые одинаковой четности при $|\operatorname{Re}(\lambda+1)|>|\operatorname{Re}(\nu)|$.

При $-\nu-\lambda-1=2n$, $\nu+n\neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^{n+1}2^{\lambda-1}\Gamma(-\nu-n)}{n!}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(-\nu-n)\right]-\Phi'_{\lambda,\,K_\nu}(a). \qquad (\text{П. 3а})$$

При $\nu-\lambda-1=2n,\ -\nu+n\neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^{n+1}\,2^{\lambda-1}\,\Gamma(\nu-n)}{n!}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu-n)\right]-\Phi'_{\lambda,\,K_\nu}(a). \qquad (\text{П. 3б})$$

При $\nu=n,\ -n-\lambda-1=2n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda K_\nu(t)\,dt=\frac{(-1)^n\,2^{\lambda-2}}{n'!\,(n+n')!}\left\{\left[2\left(\ln\frac{a}{2}+C\right)-\sum_{k=1}^{n+n'}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n'}\frac{1}{k}\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n+n'}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{n'}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{3}\right\}-\Phi'_{\lambda,\,K_\nu}(a). \qquad (\text{П. 3в})$$

$$\int_b^\infty t^\lambda K_\nu(t)\,dt\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} b^{\lambda-\frac{1}{2}}\,e^{-b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right)2^{m'}\,m'!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (\text{П. 3г})$$

$$F_{\lambda,\,I_\nu}(b)=-\frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}}\,e^{b}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right)2^{m'}\,m'!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}+$$

$$+\frac{b^{\lambda-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{1/2}}\,e^{-b-i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Gamma\left(-\lambda+m+\frac{1}{2}\right)}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{\Gamma\left(\nu+m'+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda+m'+\frac{1}{2}\right)2^{m}m'!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)\,dt \sim e^{-i(\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}} \frac{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)} -$$

$$-\frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\nu+m+1)} - F_{\lambda,\,I_\nu}(b). \quad (\text{П. } 4)$$

Интеграл $\int_a^\infty$ не существует.

При $a<0$, $0<b<\infty$, $\int_a^b$ существует, если $\mathrm{Re}(\nu+\lambda+1)>0$; при $\mathrm{Re}(\nu+\lambda+1)<0$ существует $P\int_a^b$, если $\nu+\lambda+1$ действ. четн.

При $-\nu-\lambda-1=2n$

$$\int_a^b t^\lambda I_\nu(t)\,dt \sim -\frac{2^\lambda}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)-\psi(\nu+n+1)\right]-$$

$$-\frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\nu+m+1)} - F_{\lambda,\,I_\nu}(b). \quad (\text{П. } 4\text{a})$$

$$\Phi_{\lambda,\,J_\mu,\,J_\nu}(a) = \frac{a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{2^{\mu+\nu}}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\mu+\nu+2m+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\mu+\nu+m+1)\,\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\nu+m+1)}.$$

$$F_{\lambda,\,J_\mu,\,J_\nu}(b) = \frac{b^{\lambda-1}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left(2b-\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{m\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{(2b)^m}\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\times$$

$$\times\sum_{m''=0}^{m'}\frac{\Gamma\left(\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m''+\frac{1}{2}\right)}{m''!\,(m'-m'')!\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)} -$$

$$-b^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^m b^{-m}}{(\lambda-m)\,m!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t)\, J_{\nu}(t)\, dt=$$

$$=\frac{2^{\lambda}\,\Gamma(-\lambda)\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}-$$

$$-\Phi_{\lambda,\, J_{\mu},\, J_{\nu}}(a). \qquad (\text{П. } 5)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda)<0$$

При $a<0$ $\int\limits_a$ существует, если дополнительно $\operatorname{Re}(\mu+\nu+\lambda+1)>0$;

при $\operatorname{Re}(\mu+\nu+\lambda+1)\leqslant 0$ существует $P\int\limits_a^{\infty}$, если $\mu+\nu+\lambda+1$ действ, четн.

При $-\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu-\nu+\lambda-1\neq 2n'$, $-\mu+\nu+\lambda-1\neq 2n''$, $\mu-\nu+\lambda-1\neq 2n''$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t)\, J_{\nu}(t)\, dt-\frac{(-1)^{n+1}\, 2^{\lambda}\, \Gamma(-\lambda)}{n!\,\Gamma(\mu+\nu+n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}\times$$

$$\times\Big[2\ln\frac{a}{2}-\psi(n+1)+2\psi(-\lambda)-\psi(\mu+\nu+n+1)-\psi(\mu+n+1)-$$

$$-\psi(\nu+n+1)\Big]-\Phi_{\lambda,\, J_{\mu},\, J_{\nu}}(a). \qquad (\text{П. } 5\text{a})$$

$$\int_b^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t)\, J_{\nu}(t)\, dt\sim F_{\lambda,\, J_{\mu},\, J_{\nu}}(b). \qquad (\text{П. } 5\text{б})$$

При $\lambda=n$

$$\int_a^{b} t^{n} J_{\mu}(t)\, J_{\nu}(t)\, dt\sim$$

$$\sim\frac{(-1)^n\, 2^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{b}{2}-\psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\psi\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(-\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)+2\psi(n+1)\right]-$$

$$-\Phi'_{\lambda,\,J_\mu,\,J_\nu}(a)-F'_{\lambda,\,J_\mu,\,J_\nu}(b). \qquad \text{(П. 5в)}$$

При $\lambda=n$, $-\mu-\nu-n-1=2n'$, $-\mu+\nu+n-1\neq 2n''$, $\mu-\nu+n-1\neq 2n''$

$$\int_a^b t^n J_\mu(t)\,J_\nu(t)\,dt\sim\frac{2^{n-1}(n+n')!}{n!\,n'!\,\Gamma(\mu+n'+1)\,\Gamma(\nu+n'+1)}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{2b}{a^2}-2\psi(n+1)+\psi(n'+1)+\psi(n+n'+1)+\psi(\mu+n'+1)+\right.$$

$$\left.+\psi(\nu+n'+1)\right]-\Phi'_{n,\,J_\mu,\,J_\nu}(a)-F'_{n,\,J_\mu,\,J_\nu}(b). \qquad \text{(П. 5г)}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(ct)\,J_\nu(dt)\,dt=\frac{2^\lambda d^\nu\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}{c^{\nu+\lambda+1}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2},\ -\frac{\mu}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ \frac{d^2}{c^2}\right)-$$

$$-\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^\mu\left(\frac{d}{2}\right)^\nu a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{ca}{2}\right)^{2m}{}_2F_1\left(-m,\,-\mu-m;\,\nu+1;\,\frac{d^2}{c^2}\right)}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1)\,m!\,\Gamma(\mu+m+1)}, \qquad \text{(П. 6)}$$

если $c\neq d$ $\mathrm{Re}(\lambda)<1$.

При $a<0$ $\int\limits_a^\infty$ существует; если дополнительно $\mathrm{Re}(\mu+\nu+\lambda+1)>0$;

при $\mathrm{Re}(\mu+\nu+\lambda+1)\leq 0$ существует $P\int\limits_a^\infty$, если $\mu+\nu+\lambda+1$ действ. четн.

При $-\mu-\nu-\lambda-1=2n$, $-\mu-n-1\neq n'$, $-\nu-1\neq n''$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\mu(ct)\,J_\nu(dt)\,dt=\frac{(-1)^{n+1}\,2^\lambda d^\nu}{c^{\nu+\lambda+1}\,n!\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\mu+n+1)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+1)\left(\frac{d}{c}\right)^{2m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\mu+n-m+1)\,\Gamma(\nu+m+1)}\times$$

$$\times\left[2\ln\frac{ca}{2}-\psi(n-m+1)-\psi(\mu+n-m+1)\right]-$$

$$-\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{d}{2}\right)^{\nu}a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{m=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^m\left(\frac{ca}{2}\right)^{2m}}{\mu+\nu+\lambda+2m+1}\times$$

$$\times\frac{{}_2F_1\left(-m,\ -\mu-m;\ \nu+1;\ \frac{d^2}{c^2}\right)}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}. \tag{П. 6а}$$

Если $c\neq d$

$$\int_b^{\infty}t^{\lambda}J_{\mu}(ct)\,J_{\nu}(dt)\,dt\sim\frac{2^{-\lambda}\,b^{\lambda-1}}{\pi\sqrt{cd}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{b^m}\times$$

$$\times\sum_{m'=0}^{m}\frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)}\sum_{m''=0}^{m'}\left\{(c+d)^{\lambda-m-1}\cos\left[(c+d)\,b-(\mu+\nu+m)\frac{\pi}{2}\right]-\right.$$

$$\left.-(-1)^{m''}(c-d)^{\lambda-m-1}\sin\left[(c-d)\,b-(\mu-\nu+m)\frac{\pi}{2}\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\mu+m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+m''+\frac{1}{2}\right)}{m''!\,(m'-m'')!\,d^{m''}c^{m'-m''}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}.$$

Физический институт ГКАЭ СССР
г. Ереван

Поступила 15 VI 1964

Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ԲԵՍՍԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻՑ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Շարադրված է իրենց գոյության տիրույթներում Բեսսելի ֆունկցիաներից ինտեգրալների հաշվման մեթոդ։ Բերված են ամենապարզ ինտեգրալները պարամետրերի բոլոր հնարավոր արժեքների համար։

Գրականության մեջ հայտնի բանաձևերը համընկնում են դիտարկվածների մասնավոր դեպքերի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, т. I. ИЛ, М., 1949.
2. *Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi.* Higher transcendental functions, v. II. New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.
3. *Wright E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. J. London, Math. Soc., **10**, 1935, 286.
4. *Джрбашян В. А.* К теореме Виппла. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, 1964, 348.
5. *Luke Y. L.* Integrals of Bessel functions. Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1962.