

А. Г. БАГДОЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДАВЛЕНИИ, ПРИЛОЖЕННОМ К
 ГРАНИЦЕ ЖИДКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

§ 1. Задача о детонации

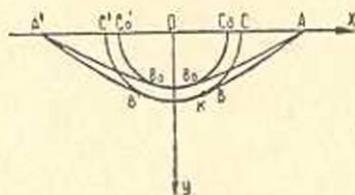
Пусть в некоторой точке 0 границы жидкого полупространства возникает некоторое давление, которое далее движется по границе ударной волны.

Допустим, что скорость фронта давления по границе V и значение давления во фронте на границе (точка А, фиг. 1) $P_0 = P_1$ постоянные.

Предположим, что давление возникает вдоль прямой по поверхности полупространства. Тогда задача будет плоской. Выберем ось Ox по границе невозмущенной жидкости, ось Oy вглубь жидкости, O — точка возникновения давления на границе. Граничное условие на границе жидкости имеет вид

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1 P_a \left(\left| \frac{x}{Vt} \right| \right) & |x| < Vt \\ 0 & |x| > Vt, \end{cases} \quad (1.1)$$

где t — время, $P_a \left(\left| \frac{x}{Vt} \right| \right)$ — распределение давления за фронтом по границе.



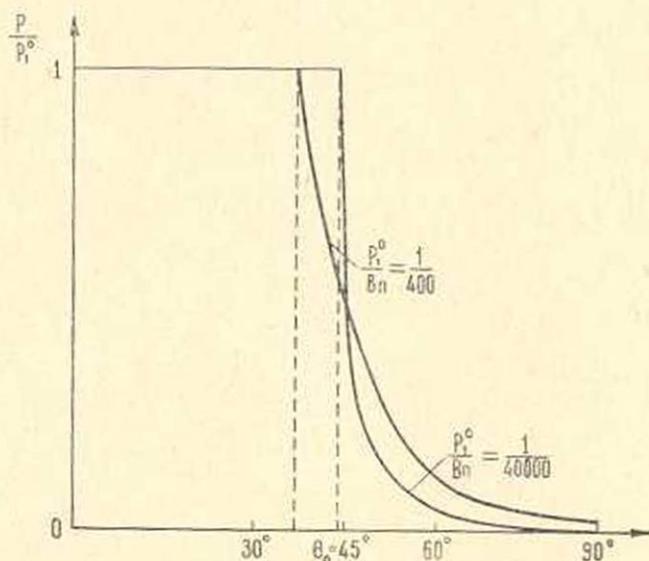
Фиг. 1.

Рассмотрим случай $V > a_0$; a_0 — начальная скорость звука. Область возмущенного движения будет ограничена линией $ABB'A'$, фиг. 1, где BB' — участок ударной волны, соответствующий области влияния начальных условий, AB — огибающая граничных возмуще-

ний. В линейном случае граница возмущенной области дается линией $AB_0B'_0A'$ фиг. 1.

Решение на ударной волне $ABB'A'$ находится с помощью уточнения линейного решения [4]; затем показывается, что это решение совпадает с точным решением уравнений газовой динамики [1];

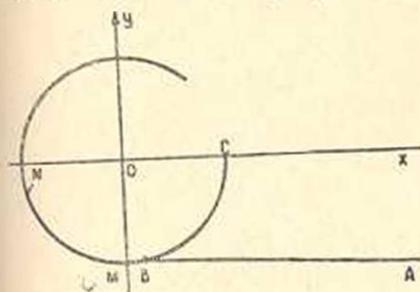
$$M = \sqrt{2}$$



Фиг. 2.

в точке B смыкания этого решения с постоянным используется теория коротких волн [3]; результаты приведены на фиг. 2, где показано изменение давления на $ABB'A'$. Для

определения давления во втором приближении решение находится с помощью представления искомых функций и независимых переменных в виде ряда по малому параметру. Решение работы [8] содержит, как нам кажется, ошибочные выводы в окрестности B фиг. 3.



Фиг. 3.

§ 2. Определение решения на ударной волне AB

В случае, если давление на поверхности задано в виде

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

имеем для потенциала $\varphi(x, y, t)$ уравнение для плоского случая

$$\bar{z}_2 = \frac{1}{\pi a_0^2} \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} r dr \int_0^{\sqrt{\frac{2a_0 r}{r}}} d\varphi' \frac{f}{\sqrt{\gamma_1^2 + 2\gamma_1 \frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{a_0^2} \varphi'^2}}$$

где $\cos \varphi_0 = \frac{a_0}{R'(t_0)}$, где в f удержаны члены, содержащие выражение $\delta(u - \tau_1)$, $\delta(x) = H'(x)$. Если потребовать теперь, чтобы при $u = \tau_1$ потенциал φ_2 равнялся нулю, получим

$$a_0^2 \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x} + a_0^2 \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{n+1}{4} \frac{P}{\rho_0 a_0^2} = 0.$$

Откуда следует, что в качестве γ_1 нужно взять нелинейный добавок к уравнению ударной волны AB .

Для определения давления на ударной волне во втором порядке продифференцируем (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} &= \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_V \frac{\frac{\partial f}{\partial t'} dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y-y')^2}{a_0^2}}} - \\ &- \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_{V'} \frac{\frac{\partial f}{\partial t'} dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y+y')^2}{a_0^2}}} - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{x'} \frac{\frac{\partial g}{\partial t'} dt' dx'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{a_0^2}}}, \quad (2.7') \end{aligned}$$

где заменено дифференцирование по u на t' и интеграл взят по частям. Всюду берутся конечные части интегралов. Для потенциала в линейном случае имеем вблизи AB [5]:

$$\gamma_1 \tau_1 = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^{u-\tau_1} P dt', \quad \varphi_1 = \int_0^{u-\tau_1} f_1 H(t') dt' - \frac{1}{2} f_2 (u - \tau_1)^2, \quad (2.8)$$

где учтены уже значения производной давления на фронте. Теперь правая часть (2.6) f запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u, x, y)}{\partial u} &= 2 \frac{n+1}{2} f_1 f_2 \frac{1}{a_0^2} \delta(u - \tau_1) H(u - \tau_1) + \\ &+ f_1 \delta(u - \tau_1) \left(-\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right) a_0^2 - 2\delta(u - \tau_1) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

где a — скорость звука в жидкости. Для решения задачи в области $ABB'A'$ во втором приближении ищем φ в виде

$$\varphi = \gamma \varphi_1(u, x, y) + \gamma^2 \varphi_2(u, x, y) \quad (2.3)$$

$$t = u + \gamma t_1(u, x, y), \quad (2.4)$$

где $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = & 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} \left(\frac{\partial t_1}{\partial u} - \frac{u-1}{2} \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial u} \left(a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial u} \left(a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В дальнейшем, следуя работе [6], введем функцию $D(z, x)$, которая при $z \rightarrow 0$ совпадает с $H(x)x$, где $H(x)$ — единичная функция, для определения решения (2.6) при заданной граничной функции $\varphi_2(u, x, 0) = g(u, x)$ применим к области в пространстве t, x, y , ограниченной коноидами, выходящими из точек t, x, y и $t, x, -y$, а также плоскостями $t=0$ и $y=0$, формулу Грина; тогда [5]

$$\begin{aligned} \varphi_2(u, x, y) = & \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_V \frac{f(t', x', y') dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y-y')^2}{a_0^2}}} - \\ & - \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_{V'} \frac{f(t', x', y') dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y+y')^2}{a_0^2}}} - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{S'} \frac{g(t', x') dt' dx'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{a_0^2}}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $f(u, x, y)$ — правая часть (2.6). Пусть уравнение ударной волны в линейном случае $t = \tau_1(x, y)$. Когда точка u, x, y находится на линии $u = \tau_1(x, y)$, область V вырождается в прямую; если $u - \tau_1(x, y) = \gamma_1$ мало, интеграл по V редуцируется к интегралу

Ограничимся для простоты записи случаем $f_1 = \text{const}$, $t_1 = \text{const}$. Нетрудно видеть, что существенен лишь член в выражении $\frac{\partial f}{\partial t'}$

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 2 \frac{n+1}{2} \frac{f_1}{a_0^2} f_2 \delta(t' - \tau_1) H(t' - \tau_1).$$

Интеграл от $\frac{\partial g}{\partial t'} = -\frac{1}{\tau_1^2} \frac{P_2}{\rho_0}$ на фронте имеет в предельном значении множитель $-(P_2)_A$ [5], стр. 89 и равен нулю. Объем v' , когда точка x, y, u переходит на фронт $u = \tau_1(x, y)$, стягивается в точку и интеграл равен нулю.

Интеграл по v после действия дельта-функции запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi a_0^2} \iint \frac{\Phi(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(\tau_1(x', y') - u)^2 - \frac{(x' - x)^2}{a_0^2} - \frac{(y' - y)^2}{a_0^2}}},$$

$$\Phi = 2 \frac{n+1}{4} \frac{f_1}{a_0^2} \frac{f_2}{a_0},$$

где область интегрирования ограничена контуром в координатах

$$x' - x = -r \cos \varphi, \quad y' - y = -r \sin \varphi,$$

$$r = \frac{a_0 \tau_1}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}},$$

а также условием $y' \geq 0$. Если $\varphi - \varphi_0$ не мало, r имеет порядок малости τ_1 . Тогда, взяв интеграл в пределах по r от 0 до $\frac{a_0 \tau_1}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$ и

по φ' от некоторого φ_1 до π , можно показать, что интеграл будет иметь порядок τ_1 . Тогда остается интеграл, взятый по малым значениям $\varphi - \varphi_0 = \varphi'$. Интегрируя сначала по φ' , найдем

$$\frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} r dr \int_0^{\frac{\sqrt{2a_0 \tau_1}}{r}} d\varphi' \frac{\Phi(x', y')}{\sqrt{\tau_1^2 + 2\tau_1 \frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{a_0^2} \varphi'^2}}$$

или

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} a_0 \Phi(x - r \cos \varphi_0, y - r \sin \varphi_0) dr.$$

Давление во втором приближении найдется в виде $P_2 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \tau_1^2$.

Рассмотрим случай $R'(t) = V$, $P_\Phi(t) = P_1^0$. Тогда имеем для уравнения линейной ударной линии

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{\cos \varphi_0}{a_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial y} = \frac{\sin \varphi_0}{a_0}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{a_0}{V_0}$$

для добавки к уравнению ударной волны

$$t_1 = -\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha_1} \frac{n+1}{4} \frac{1}{a_0} \sin \alpha_1 \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{a_0}{V}$$

для потенциала в линейной задаче вблизи AB по (2.8)

$$\varphi_1 = -\frac{P_1^0}{\rho_0} (u - \tau_1) + \frac{P_1^0}{\rho_0} \frac{P_a'(1) a_0 \sin^2 \varphi_0}{x \sin^2 \varphi_0 - y \sin \varphi_0 \cos \varphi_0} \frac{1}{2} (u - \tau_1)^2.$$

В данном случае часть функции $\frac{\partial f}{\partial t'}$, дающая отличное от нуля значение интеграла, будет

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 2 \frac{n+1}{4} P_1^0 \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{P_a'(1) a_0 \sin^2 \varphi_0}{(x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0) \sin \varphi_0} \delta(u - \tau_1).$$

Вычисляя интеграл, найдем для давления $P_2 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \tau_1^2$

$$P_2 = -\frac{n+1}{4} \frac{P_1^0}{\rho_0 a_0^2} P_1^0 P_a'(1) \frac{V - \xi}{\xi - a_0 \sin \alpha_1 \sin \alpha_1} \frac{1}{\tau_1^2},$$

что совпадает с решением простых волн. Результат согласуется также с решением [5].

В осесимметричной задаче для давления вблизи фронта в (2.7') следует под знаком интеграла добавить множитель $\sqrt{\frac{x'}{x}}$ и в функцию Φ добавить слагаемое $\frac{n-1}{\rho_0 a_0^2} \frac{P_1}{\gamma} \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - a_0 \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x}$. В случае $P_2 = P_1^0$ линейное решение дается в виде

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\rho_0} A_0 (u - \tau_1) - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} A_1 (u - \tau_1)^2,$$

где $A_0(x, y)$ и $A_1(x, y)$ даны в [5], стр. 119. Решение на фронте во втором приближении можно найти в виде

$$A_0 = \sqrt{\frac{V t_0}{x}} P_1^0, \quad P_1 = A_0(x, y), \quad \lambda = 2 \frac{n-1}{n+1} \frac{a_0}{x - r \cos \varphi_0} A_0^2 \sin \alpha_1 -$$

$$- \frac{2}{n+1} \frac{a_0^2}{x - r \cos \varphi_0} \frac{\partial t_1}{\partial x} A_0 P_1^0 \sin \alpha_1;$$

$$P_2 = -\frac{n+1}{2} \rho_0 \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} \frac{\lambda - A_0 A_1 (x - r \cos \varphi_0, y - r \sin \varphi_0)}{2 \rho_0^2 a_0^3} \sqrt{\frac{x - r \cos \varphi_0}{x}} dr.$$

§ 3. Решение задачи для произвольного давления, заданного на границе полупространства

Пусть на некоторой высоте h над поверхностью жидкости, занимающей нижнее полупространство, произведен взрыв. Ударная волна, образующаяся при взрыве, в момент t_0 доходит до границы жидкости и затем начинается отражение и прохождение ее в жидкость.

Поскольку импеданс жидкости $\rho_2 a_2$ намного больше импеданса воздуха $\rho_1 a_1$, можно предполагать, что отражение как бы происходит от твердой стенки, и давление на поверхности считать известным.

Запишем граничное условие

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Условие это ставится на поверхности жидкости, однако в линейной постановке его можно сносить на невозмущенную границу $y = 0$ [5].

В выражении (3.1) $R(t)$ представляет радиус фронта ударной волны по границе от точки O касания ударной волны с границей $y = 0$,

$$P_1(x, t) = P_\Phi(t) f\left(\frac{x}{R(t)}\right),$$

где $P_\Phi(t)$ — давление во фронте на поверхности.

Нетрудно видеть, что при $h > 0$, $R'(0) = \infty$. Но по линейной теории получается [5], что точка B_0 , фиг. 1, касания огибающей поверхностных возмущений AB_0 с линией начальных возмущений B_0B_0 имеет координату $x_{B_0} = \frac{a_0 t}{R'(0)}$, и, следовательно, в задаче с $h > 0$ имеем

$$x_{B_0} = 0. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что участок B_0B_0 , соответствующий области начальных условий и требующий особого рассмотрения — § 1, отсутствует.

Можно найти, что давление в точке B_0 , взятое по линейной теории и вычисленное вдоль ударной волны AB_0 , совпадает с давлением в точке B_0 , если двигаться по оси Oy . Следовательно, давление в линейной постановке непрерывно в точке B_0 .

Другой характерной особенностью рассматриваемой общей задачи является отсутствие ветвления вблизи линии BC , $r = a_0 t$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Известно, что в случае $R'(t) = \text{const}$, $h = 0$ вблизи линии BC имеет место ветвление, хотя ударная волна в данной задаче не образуется [4]. Нами показано, что в общей задаче $h > 0$ эта особенность также отсутствует.

Будем рассматривать плоскую задачу, поскольку в осесимметричной задаче даже в случае $R'(t) = \text{const}$ ветвление отсутствует.

Линейная задача (3.1) имеет решение [5], в случае $R'(t) > a_0$

$$p = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_1}^0 d\zeta \int_{-\zeta_1}^{\zeta_1} \frac{P_3(-\zeta, t')}{\bar{R}_0} d\tau_1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_2} d\zeta \int_{-\zeta_1}^{\zeta_1} \frac{P_3(\zeta, t')}{\bar{R}_0} d\tau_1, \quad (3.3)$$

где $t' = t - \frac{1}{a_0} \bar{R}_0$, $\bar{R}_0 = \sqrt{(\zeta - x)^2 + \tau_1^2 + y^2}$, причем имеем для ζ_1 и ζ_2

$$\begin{aligned} f(-\zeta) &= t - \frac{1}{a_0} \sqrt{(\zeta - x)^2 + \tau_1^2 + y^2} \\ f(\zeta) &= t - \frac{1}{a_0} \sqrt{(\zeta - x)^2 + \tau_1^2 + y^2} \\ r_1^* &= -R \left(t - \frac{1}{a_0} \sqrt{r_1^{*2} - 2r_1^* x + x^2 + y^2} \right) \\ \zeta_1 &= R \left(t - \frac{1}{a_0} \sqrt{\zeta_1^2 - 2\zeta_1 x + x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функция $t = f(\zeta)$ обратная к $\zeta = R(t)$. Выражение (3.3) имеет место в области $r < a_0 t$.

В области $r > a_0 t$ имеем

$$p = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \int_{-\zeta_1}^{\zeta_1} \frac{P_3(\zeta, t')}{\bar{R}_0}, \quad (3.5)$$

где $\zeta_{1,2}$ — два корня последнего уравнения (3.4).

Будем изучать поведение решения вблизи линии $r = a_0 t$, причем для простоты в подынтегральной функции положим сначала

$$\frac{P_3}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + y^2 + \tau^2}} = 1,$$

то есть рассмотрим изменение площади. Очевидно тогда, что согласно (3.3)

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_2} d\zeta \int_0^{\tau_1^0} d\tau_1 - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\zeta_1}^0 d\zeta \int_0^{\tau_1^0} d\tau_1 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_1} d\zeta \int_0^{\tau_1^0} d\tau_1 + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_1} d\zeta \int_0^{\tau_1^0} d\tau_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где первый интеграл в правой части дает давление на звуковой ли-

нии, ξ_0, η_1^0 есть ξ_1, η_1 при $x^2 + y^2 = a_0^2 t^2$, причем запись (3.6) выбрана для удобства.

Рассмотрим второй интеграл в (3.6). Из (3.4) имеем

$$r_1^* = - \frac{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{2f'(0) a_0^2 t + 2x}$$

$$\frac{\partial \eta_1^0}{\partial y} = - \frac{y}{\sqrt{2f'(0) \xi^2 a_0^2 + 2f'(0) \xi t a_0^2 - (\xi - x)^2 + a_0^2 t^2 - y^2}}$$

или

$$- \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} d\eta = 2y \frac{\sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{f'(0) t a_0^2 + x} \quad (3.7)$$

Вычислим теперь третий и четвертый интегралы в (3.6).

Очевидно,

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} d\eta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_2} d\xi \int_0^{\eta_2} d\eta = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_2} \frac{y d\xi}{\sqrt{(f(\xi) a_0 - a_0 t)^2 - (\xi - x)^2 - y^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_2} \frac{y d\xi}{\sqrt{f^2(\xi) a_0^2 - 2f(\xi) t a_0^2 - \xi^2 + 2\xi x}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подкоренное выражение в первом интеграле можно представить в виде

$$(f - t)^2 a_0^2 - (\xi - x)^2 - y^2 = a_0^2 (\xi - \xi_0) + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2,$$

$$a_1 = 2(f(\xi_0) - t) a_0^2 f'(\xi_0) - 2\xi_0 + 2x.$$

В силу (3.4) можно написать

$$a_0^2 (f - t)^2 - \xi^2 + 2\xi x - a_0^2 t^2 = -\xi (\xi - \xi_0) \varphi(\xi_0)$$

$$\varphi(\xi_0) \neq 0, \quad \varphi(0) \neq 0. \quad (3.9)$$

В самом деле, $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$ являются в силу (2.8) однократными корнями левой части (3.9). Учитывая это, получим значение первого интеграла в (3.8) в виде

$$- \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{f(\xi_0) a_0^2 f'(\xi_0) - a_0^2 t f'(\xi_0) - \xi_0 + x} \quad (3.10)$$

Разность второго и третьего интегралов дает малые основного по-

рядка вблизи точек $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$, в которых подинтегральная функция содержит особенность.

Учитывая это, можно записать, разбивая интеграл на интервалы от 0 до $\frac{\xi_0}{2}$ и от $\frac{\xi_0}{2}$ до ξ_0

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_0} \frac{y d\xi}{V - \xi(\xi - \xi_0) \varphi(\xi) + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_0} \frac{y d\xi}{V - \xi(\xi - \xi_0) \varphi(\xi)} = \frac{y V a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{\varphi(\xi_0) \frac{\xi_0}{2}}. \quad (3.11)$$

Будем рассматривать давление на поверхности в виде $P_1 = P_\Phi(t)$. Окончательно получим, учитывая еще значения функции

$$\frac{P_\Phi(t')}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2}$$

в точках 0 и ξ_0 ,

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_0} d\xi \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_\Phi(t')}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2} d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{y V a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{f'(0) t a_0^2 + x} \frac{P_\Phi(0)}{a_0 t} - \frac{1}{\pi} \frac{P_\Phi(0)}{\varphi(0) \frac{\xi_0}{2}} \frac{y V a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{a_0 t} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{y V a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{\varphi(\xi_0) \frac{\xi_0}{2}} \frac{P_\Phi(f(\xi_0))}{a_0 t - a_0 f(\xi_0)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} P_\Phi(f(\xi_0)) \frac{y V a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{\xi_0 - x - (f - t) a_0^2 f'(\xi_0)} \frac{1}{a_0 t - a_0 f(\xi_0)} \quad (3.12)$$

при $x^2 + y^2 \leq a_0^2 t^2$, где, как легко найти,

$$\varphi(0) = \frac{2x - 2a_0^2 f'(0)t}{\xi_0}, \quad \varphi(\xi_0) = \frac{2\xi_0 - 2x - 2a_0^2 f'(\xi_0)(f(\xi_0) - t)}{\xi_0}.$$

Для точек $x^2 + y^2 > a_0^2 t^2$ имеем по (3.5)

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_\Phi(t') d\tau_1}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2}, \quad (3.13)$$

где $\xi_{1,2}$ — два корня уравнения (3.4). На линии $x^2 + y^2 = a_0^2 t^2$ значения

корней $\xi_0 = \xi_1^0$, $\xi_2^0 = 0$. Если использовать (3.4) и разбить интеграл по ξ на части в пределах от ξ_2 до $\frac{\xi_1}{2}$, от $\frac{\xi_1}{2}$ до ξ_1 , получим, полагая

$$\frac{P_1}{V(\xi-x)^2 + y^2 + r^2} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} y \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{V-\xi(\xi-\xi_0)\varphi(\xi) + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2} - \frac{1}{\pi} y \int_0^{\xi_2} \frac{d\xi}{V-\xi(\xi-\xi_0)\varphi(\xi)} = \\ = \frac{1}{\pi} y \int_{\xi_2}^{\frac{\xi_1}{2}} + \frac{1}{\pi} y \int_{\frac{\xi_1}{2}}^{\xi_1} - \frac{1}{\pi} y \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} - \frac{1}{\pi} y \int_{\frac{\xi_1}{2}}^{\xi_1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обозначим

$$-\xi(\xi-\xi_0)\varphi + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2 = -(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)\varphi_1(\xi).$$

Вычислим производную от интеграла λ по ξ_2

$$\lambda = \int_{\xi_2}^{\frac{\xi_1}{2}} \frac{d\xi}{V(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)\varphi_1(\xi)}$$

Сделав замену $\xi - \xi_2 = \zeta$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\xi_2} &= \frac{d}{d\xi_2} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}-\xi_2} \frac{d\zeta}{V\zeta(\xi_1-\xi_2-\zeta)\varphi_1(\zeta-\xi_2)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \frac{d\xi_1}{d\xi_2} - 1}{V\left(\frac{\xi_1}{2}-\xi_2\right)\frac{\xi_1}{2}\varphi_1\left(\frac{\xi_1}{2}\right)} + \int_0^{\frac{\xi_1}{2}-\xi_2} \frac{d\zeta}{-2V\zeta\varphi_1(\xi_1-\zeta-\xi_2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (3.4) вблизи $r = a_0 t$

$$\xi_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_0^2 t^2}{2x}, \quad \xi_1 - \xi_0 = \frac{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{2\xi_0 - 2x - 2f(f-t)a_0^2}$$

имеем, что при $r = a_0 t$ $\frac{d\lambda}{d\xi_2}$ конечна.

Подобным же образом можно показать конечность производных всех оставшихся интегралов по $r = a_0 t$. Тогда в выражении для давления впереди звуковой линии, то есть при $r > a_0 t$, будут члены с первой степенью $r - a_0 t$.

В силу отсутствия особенности типа квадратного корня можно, применяя метод замены линейных характеристик точными, показать,

что давление впереди звуковой волны отличается от значения давления при $r = a_0 t$ в порядке выше второго.

Из (3.12) в случае $R'(0) = \infty$ получим, что давление позади звуковой линии также совпадает с давлением на самой звуковой линии, выражаемым интегралом в (3.12), поскольку слагаемые, содержащие $\sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}$, в правой части (3.12) сократятся.

Таким образом, при $P_1(x, t) = P_\Phi(t)$ в случае $R'(0) = \infty$ распределение давления как впереди, так и позади звуковой линии BC , фиг. 1, не содержит членов с ветвлением. Ударная волна впереди линии BC тогда, во втором порядке, не образуется.

Этот факт хорошо согласуется с отсутствием особенности в точке B пересечения линии AB , BC и оси Oy .

В случае задания $P_1(x, t) = P_\Phi(t) f\left(\frac{x}{R}\right)$ распределение давления, как можно заключить из предыдущего, будет иметь ту же особенность, что и для случая $P_\Phi = \text{const}$, поскольку переменность P_Φ не дает дополнительных членов в ветвлении. Поэтому можно заключить, что во втором порядке ударная волна не образуется, хотя этот факт следовало бы проверить вычислением.

Отсутствие ударной волны во втором приближении впереди BC не означает отсутствия ее в более высоких приближениях, вероятно, при $P_\Phi(t) \ll P_\Phi(0)$ ударная волна впереди BC образуется.

Таким образом, при решении нестационарных задач, подобных нашей, как, например, задачи о нестационарной дифракции, при определении второго приближения внутри области необходимо показать на отсутствие ударной волны перед звуковой линией. То же относится к задаче установившегося обтекания крыла с округленной передней кромкой.

Рассмотрим теперь вопрос о законе движения ударной волны для больших t . В случае, когда $R'(0) < \infty$ для больших моментов времени, решение вблизи BB' , фиг. 1, не будет определяться лишь начальными значениями $P_\Phi(t)$ и $R'(t)$. Поэтому решения § 1 несправедливы. Для больших моментов времени возмущения, идущие по уплотненной жидкости, нагоняют ударную волну и, хотя они и малы, но за большой промежуток времени получается качественно новый эффект затухания. Этот факт, известный для одномерного случая, а также для коротких волн [10], мы используем при решении задачи об определении формы ударной волны BB' , фиг. 1, для больших t . Полученное решение будет справедливо и для $R'(0) = \infty$, поскольку единственное требование: конечность $t - \frac{r}{a_0}$.

Таким образом, можно получить давление на ударной волне для больших моментов времени и для конечных удалений от оси симметрии. В основе метода находится замена линейных характеристик уточненными [7], что позволяет найти давление на ударной волне.

Далее показано, использованием работы [2], что полученное решение удовлетворяет уравнениям газовой динамики. Кроме того определяется и задний скачок.

Рассмотрим осесимметричный случай. Предположим, что давление на поверхности со временем падает и в момент t_0^* обращается в нуль. Если t_0^* мало, все движение сосредотачивается в окрестности фронта [10], в случае конечного t_0^* имеется N -волна [5]. Вместо этого можно предположить, что при $t \rightarrow \infty$, $P_0(t) \rightarrow 0$. Кроме того, предполагаем конечность $R(\infty)$.

Рассмотрим область BB' на ударной волне. Линейное решение для задачи с осевой симметрией имеет вид [5]

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} \frac{P_1(r', t') r' dr'}{\tilde{R}_0}, \quad (3.15)$$

где

$$\tilde{R}_0 = \sqrt{x^2 + r'^2 - 2xr' \cos \psi + y^2}, \quad t' = t - \frac{\tilde{R}_0}{a_0},$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Для больших $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r' dr' P_1 \left(r', t - \frac{r}{a_0} + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right), \quad (3.16)$$

где

$$r_0^* = R \left(t - \frac{r}{a_0} + \frac{1}{a_0} r_0^* \cos \theta \cos \psi \right).$$

Решение (3.16) можно переписать при $y \rightarrow \infty$ в виде

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r' dr' P_1 \left(r', t' + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right), \quad (3.17)$$

где учтено, что в принятом приближении

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\sin \theta}{a_0}; \quad t' = t - \frac{r}{a_0}.$$

Заменим характеристики линейной задачи уточненными $t - \frac{r}{a_0} \rightarrow y_1$. Тогда получим

$$P = \frac{F(y_1)}{r}, \quad (3.18)$$

где

$$F(y_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a_0} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(r', y_1 + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right) r' dr',$$

$$r_0^* = R \left(y_1 + \frac{1}{a_0} r_0^* \cos \theta \cos \psi \right) \quad (3.19)$$

и уравнения характеристик

$$t = \frac{r}{a_0} - \frac{1}{a_0 B n} \frac{n+1}{2} F(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + y_1. \quad (3.20)$$

Заметим, что уравнения характеристик даются соотношением (1.16) § 1.

Из (3.18) следует, что $v_r = 0 \left(\frac{1}{r} \right)$, $v_\theta = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right)$. Тогда, учитывая, что $t = \frac{r}{a_0} + O(\ln r)$, и оставляя малые порядка $\frac{1}{r}$, найдем, что производные по θ в (1.16) § 1 не понадобятся, и уравнение характеристик дается (3.20). Соотношение на ударном фронте дает

$$\frac{1}{a_0 B n} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r}{a_0 y_1} = \frac{2 \int_0^{y_1} F(y_1) dy_1}{F^2(y_1)} \quad (3.21)$$

или

$$F(y_1) = \sqrt{\frac{\frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(r', y_0 + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right) r' dr'}{\frac{1}{B n} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r}{a_0 y_0}}}. \quad (3.22)$$

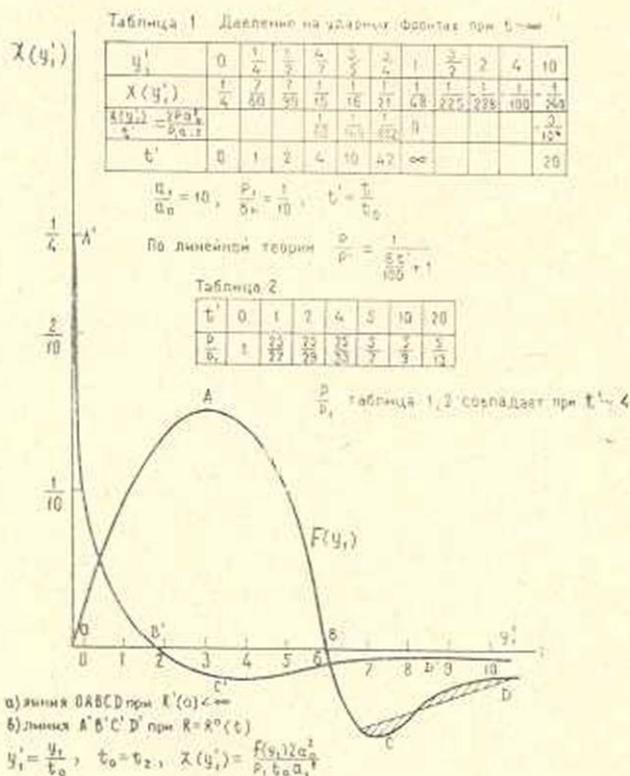
где y_0 — корень $F(y_1)$, причем для больших r можно считать в числителе (3.22) $y_1 = y_0$. Такой корень существует для заданных граничных условий фиг. 4, которая составлена для случая оси симметрии $x = 0$, $F(y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{P_\theta(y_1) R^2(y_1)}{2a_0}$.

Уравнение ударной волны имеет вид

$$t = \frac{r}{a_0} - \sqrt{\frac{n+1}{2} \frac{1}{a_0 B n} \int_0^{y_0} F(y_1) dy_1 \ln \frac{r}{a_0 y_0}} + y_0. \quad (3.23)$$

Подобным образом можно найти решение плоской задачи. Полученное решение имеет место для всех r при $\frac{y_1}{r} \ll 1$. В случае реальных

граничных условий имеем $R = R^0(t)$, $R^{-2}(t) = D_1^2 \frac{(t+t_0)^2}{\left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t_0}{t_2}\right)^2} - D_1^2 \frac{t_0^2}{\left(1 + \frac{t_0}{t_2}\right)^2}$; $P_\Phi = P_1 \frac{t_0}{t_0+t}$; t_0, t_2, D_1 постоянны; для $F(y_1)$ и $P_{BB'}$ имеем фиг. 4.



Фиг. 4.

Из (3.22) следует, что $F(y_1) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln r}}$ и для давления $P \sim \frac{1}{r \sqrt{\ln r}}$. Но вблизи BB' можно получить [11] для конечных $R'(0)$, что $P \sim P_1 e^{-\frac{1}{Bn}}$, откуда $r \sim e^{-\frac{1}{Bn}}$, следовательно, решение имеет место для весьма больших r при малых $\frac{P_1}{Bn}$. Решение будет справедливо также для $R'(0) = \infty$, так как единственное условие — это конечность выражения y_1 .

Покажем теперь, что полученное решение удовлетворяет уравнениям движения.

Решения эти (3.18), (3.20) соответствуют коротким волнам, поэтому будем пользоваться нестационарными уравнениями коротких волн [2].

В переменных $r = a_0 t \left(1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta\right)$, $\frac{P}{Bn} = M_0 \mu$, $\tau = \ln t$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu = 0. \quad (3.24)$$

Характеристики этого уравнения

$$C_1 = \ln t \mu, \quad C_2 = \frac{\delta}{\mu} + \ln \mu,$$

откуда общее решение

$$\delta = -\mu \ln \mu + \frac{t_0}{t} \Phi(t \mu), \quad (3.25)$$

t_0 — постоянная. Запишем решение (3.18), (3.20) в переменных δ , μ

$$M_0 \delta = \frac{1}{a_0 t} \frac{F(y_1)}{Bn} \ln \frac{r}{a_0 y_1} - \frac{2}{n+1} \frac{y_1}{t},$$

$$\delta = \frac{P}{Bn} \frac{1}{M_0} \ln \left(\frac{r}{a_0 F} \frac{F}{y_1} \right) - \frac{2}{n+1} \frac{y_1}{M_0 t}.$$

Поскольку $P = \frac{F(y_1)}{a_0 t}$, имеем $y_1 = \Phi_1(Pt)$ и

$$\delta = -\mu \ln \mu + \mu \ln \frac{F(y_1)}{a_0 y_1 M_0 Bn} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{M_0} \frac{\Phi_1(Pt)}{t}.$$

Поскольку $y_1 = \Phi_1(Pt)$, $t \mu = \frac{F(y_1)}{Bn} M_0^{-1}$; обозначая

$$t \mu \ln \frac{F(y_1)}{a_0 y_1 M_0 Bn} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{M_0} \Phi_1(Pt) = t_0 \Phi(t \mu),$$

получим (3.25).

Мы показали, что решение по методу замены линейных характеристик уточненными удовлетворяет уравнениям движения.

Найдем теперь условие образования заднего скачка, в котором давление повышается до невозмущенного. Найдем огибающую характеристик (3.20) по y_1

$$-\frac{1}{a_0 Bn} \frac{n+1}{2} F'(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + 1 = 0, \quad (3.26)$$

откуда $F'(y_1) > 0$, что соответствует правой ветви CD табл. 1. Для

$\frac{\partial P}{\partial t}$ имеем по (3.20) $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{a_0 Bn}{r_1(n+1)} = \text{const}$ при $r_1 = \text{const}$.

Найдем теперь задний скачок. Пусть характеристики (3.20) впереди и позади заднего скачка отвечают параметрам y_1 , y_2 . Тогда из формулы Пфрима имеем вдоль заднего скачка

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(y_1 - kF(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-F(y_1) \frac{k}{r} - F(y_2) \frac{k}{r} \right), \quad (3.27)$$

причем вдоль ударной волны

$$y_1 - kF(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} = y_2 - kF(y_2) \ln \frac{r}{a_0 y_2}$$

$$k = \frac{1}{a_0 \beta n} \frac{n+1}{2}.$$

Отсюда

$$k \ln \frac{r}{a_0 y_1} \sim \frac{y_2 - y_1}{F(y_2) - F(y_1)}, \quad \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right| \ll \left| \ln \frac{y_1}{r} \right|.$$

Дифференцируя это соотношение вдоль ударной волны по r и исключая из него и из (3.27) r и dr будем иметь

$$\int_{y_1}^{y_2} F(y) dy = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) (F(y_1) + F(y_2)). \quad (3.28)$$

Условие (3.28) означает равенство площадей между $F(y)$ и секущей [9].

На фиг. 4 участок BC соответствует $-y_1$, области впереди скачка, участок CD — y_2 , области за скачком. Задний скачок образуется в точке перегиба на CD фиг. 4. Для $t \rightarrow \infty$ имеем $y_1 \rightarrow y_0$, $y_2 \rightarrow \infty$ и уравнение скачка (3.28)

$$k \ln \frac{r}{a_0 y_0} = \frac{y_2 - y_1}{-F(y_1)}, \quad (3.29)$$

$$\int_{y_0}^{y_2} F(y) dy = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) F(y_1)$$

или

$$-F(y_1) = \left(\frac{-2 \int_{y_0}^{y_2} F(y') dy'}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Уравнение заднего скачка имеет вид

$$t - \frac{r}{a_0} = y_0 + \sqrt{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \sqrt{-2 \int_{y_0}^{y_2} F(y') dy'}. \quad (3.31)$$

В силу очевидного равенства

$$\int_0^{\infty} F(y') dy' = 0 \quad (3.32)$$

имеем совпадение коэффициентов в уравнении (3.31) и (3.23) при

$$\pm \sqrt{\ln \frac{r}{a_0 y_0}}.$$

Для давления позади заднего скачка из (3.18) имеем

$$p = \frac{F(y_2)}{r},$$

где, например, для оси симметрии

$$F(y_2) = \frac{R^2(\infty)}{2a_0} \frac{\partial P_{\Phi}(y_2)}{\partial y_2}.$$

Пусть характер убывания $P_{\Phi}(t) = P_1 \frac{t_0}{t_0 + t}$. Тогда для больших y_2

$$F(y_2) = -\frac{R^2(\infty)}{2a_0} P_1 \frac{1}{\left(1 + \frac{y_2}{t_0}\right)^2} \frac{1}{t_0}.$$

Согласно (3.30) имеем теперь

$$-F(y_1) = \left(\frac{-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy'}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

и по (3.29)

$$y_2 = \left(k \ln \frac{r}{a_0 y_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$p = -\frac{R^2(\infty)}{2a_0} \frac{P_1}{r} t_0 \frac{1}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0} 2 \int_0^{y_2} F(y) dy}.$$

Для случая неоднородной жидкости с начальным распределением $\rho_0(y)$, $a_0(y)$ решение вблизи линии BB' найдено нами в [11]; изменение, которое мы собираемся внести туда, заключается в том, что связь P и p уже не может быть взята адиабатической; пусть $P(p, S)$ — уравнение состояния, S — энтропия. Нетрудно найти из

$$a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)_S$$

$$a = \frac{U}{\sqrt{-\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_s}}, \quad U = \frac{1}{\rho},$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial a}{\partial P}\right)_{P=0} = -\frac{1}{\rho_0 a_0} + \frac{1}{2} a_0^3 \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\right)_s.$$

Из уравнений на ударном фронте для скорости частиц жидкости $v = \frac{P}{\rho_0 a_0}$. Отсюда имеем для скорости возмущений

$$a + v = a_0 + \alpha \frac{P}{\rho_0 a_0}, \quad \alpha = \frac{1}{2} a_0^3 \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\right)_s.$$

Поэтому в указанном решении [11] следует заменить $\frac{n+1}{2}$ на α .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9-X-1964

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Հեղուկի կիսասարժատիկան շարժման խնդրում ճնշման աղդեցուկյան տակ ուսումնասիրվում է դժային տեսության ուղղումը հարվածի ալիքի ճակատի BB' (գծ. 1) շրջակայքում: Գժային տեսության տված լուծման մեջ դժային խարակտերիստիկաները ճշգրտավածներով փոխարինելու դեպքում ճնշումը հարվածային ճակատի մոտ որոշվում է վերջավոր տեսքով: Հարվածային ալիքների AB և BB' (գծ. 1) հատման կետի մոտ բերված մեթոդը ճիշտ լուծում էի տալիս, և լուծումը արվում է կարճ ալիքների մեթոդով: Նույն մեթոդներով ուսումնասիրված են եռանկյունաձև ու քառանկյունաձև թևերի շրջնոսման խնդիրները, որոնք մինչ այդ ուսումնասիրված էին ոչ ճիշտ [5]:

Ա. մ. փ. n. փ. n. i. մ.

Ներկա հոդվածում գտնված է ճնշումը հարվածային ճակատի վրա և արված է լուծումը գտնելու մեթոդը ամբողջ տիրույթում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 9, в. 4, 1945.
2. Христианович С. А. Ударная волна на больших расстояниях от места взрыва. ПММ, № 5, 1956.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, № 1, 1960.

4. *Lighthill M. I.* The shock's strength in supersonic, „Conical Fields“. Philosophical magazine, vol. 40, 1919.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
6. *Clarkson M. H.* A second order theory for three-dimensional wings. Quarterly Journal of mechanics, vol. 7, 1954.
7. *Whitham G. B.* The propagation of spherical blast. Proceedings of Royal Society, vol. 203, 1950.
8. *Légras J.* Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'études des ondes de choc. Paris, ONERA, 1953.
9. Общая теория аэродинамики больших скоростей. Редактор Сирс. Изд. Оборонгиза СССР, М., 1962. Статья Лайтхилла. Высшие приближения.
10. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 22, вып. 4, 1958.
11. *Багдоев А. Г.* Определение давления на ударной волне в жидкости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 1964.