

В. С. САРКИСЯН, В. В. МИКАЕЛЯН

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ИЗГИБА АНИЗОТРОПНОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

Проблема об определении центра изгиба изотропного стержня при помощи решения только лишь задачи кручения исследована в работах [1—8]. В [9] доказана возможность решения задачи об определении центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным поперечным сечением.

В работе [10] получены формулы для определения координат центра изгиба изотропного составного призматического стержня при помощи функций, аналогичных функциям Сен-Венена и Прандтля в задаче кручения изотропных однородных стержней.

В настоящей статье рассматривается задача об определении положения центра изгиба анизотропного (неортогнотропного) составного призматического стержня с произвольным поперечным сечением при помощи решения задачи кручения.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропный стержень, составленный из различных анизотропных призматических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям, когда упругие постоянные этих тел различны. Предположим, что в каждой точке каждого тела имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к оси стержня (то есть каждое тело — неортогнотропное). Области поперечного сечения, соответствующие различным материалам стержня, обозначим через $D_1, D_2, \dots, D_n$, линию раздела смежных областей D_i и D_l — через L_{kl} , а контур всей области — через L_0 . Предположим, что линии раздела L_{kl} либо целиком находятся внутри области D_0 (область всего поперечного сечения), либо пересекаются с ее контуром L_0 под определенным углом, не равным нулю.

Пусть один конец стержня заделан, а к другому концу приложена поперечная изгибающая сила $\vec{P}(P_x, P_y)$ произвольного направления. Поместим начало координат x, y, z в некоторой точке сечения заделанного конца изгибаемого стержня. Ось z направим параллельно образующим поверхности призматического составного анизотропного стержня, а оси x и y — в плоскости поперечного сечения. Примем, что коэффициенты Пуассона ν_{xz}, ν_{yz} и коэффициенты взаимного влияния первого рода $\eta_{xy, z}$ материалов составляющих тел одинаковы.

Касательные напряжения τ_{xz}^i, τ_{yz}^i в области D_i при поперечном изгибе неортоотропного составного стержня, когда $P_x \neq 0, P_y = 0$, определяются формулами [11]:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i &= P_x \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2a_{33}^i} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right], \\ \tau_{yz}^i &= P_x \left[-\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2a_{33}^i} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right].\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь $\Psi_i(x, y)$ — функция напряжений изгиба в области D_i , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}L_2[\Psi_i] &= (2\nu_{xz}B_0 + \tau_{xy,z}A_0)x - (2\nu_{yz}A_0 + \tau_{xy,z}B_0)y + \\ &+ \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} (A_0x - B_0y) + a_{44}^i \psi_i'(x) - a_{45}^i \varphi_i'(y) + C_0\end{aligned}\quad (1.2)$$

и условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} = \left[\frac{1}{2a_{33}^i} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right] \frac{dx}{ds} - \left[\frac{1}{2a_{33}^i} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right] \frac{dy}{ds} \text{ на } L_0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} = f_i^* - f_j^* \text{ на } L_{ij}, \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_j = g_i^* - g_j^* \text{ на } L_{ij}, \quad (1.5)$$

где введены следующие обозначения

$$L_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} a_{i+3,j+3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; \quad a_{45} = a_{34}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

$\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции,

$$f_i^* = \frac{1}{2a_{33}^i} \left[(B_0 y^2 + K_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + K_0 x) \frac{dy}{ds} \right] + \psi_i \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dy}{ds},$$

$$g_i^* = \frac{1}{2} (B_0 y^2 + K_0 y) \left[\frac{a_{44}^i}{a_{33}^i} \frac{dx}{dn} - \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \frac{dy}{dn} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (A_0 x^2 + K_0 x) \left[\frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \frac{dx}{dn} - \frac{a_{44}^i}{a_{33}^i} \frac{dy}{dn} \right] +$$

$$+ [\psi_i(x) a_{45}^i + \varphi_i(y) a_{35}^i] \frac{dx}{dn} + [\varphi_i(x) a_{44}^i + \psi_i(y) a_{45}^i] \frac{dy}{dn},$$

$$\left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_k = a_{44}^k l_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{35}^k l_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_{45}^k \left(l_1 \frac{\partial}{\partial y} + l_2 \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad l_1 = \frac{dy}{ds}, \quad l_2 = -\frac{dx}{ds},$$

a_{ij}^k — упругие постоянные. Постоянные коэффициенты A_0, B_0 и K_0 определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ix}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{iy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} &= -1,
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где S_i — площадь D_i , S_{ix} , S_{iy} , J_{ix} , J_{iy} , J_{ixy} — статические моменты и моменты инерции D_i относительно осей координат.

Отметим, что постоянная C_0 , входящая в правую часть уравнения (1.2), определяется из условия

$$C_0 = (2\gamma_{yz} A_0 + \gamma_{xy, z} B_0) y_c^* - (2\gamma_{xz} B_0 + \gamma_{xy, z} A_0) x_c^*, \quad (1.7)$$

которое необходимо и достаточно для того, чтобы поперечный изгиб анизотропного составного стержня не сопровождался кручением.

Здесь x_c^* и y_c^* — координаты геометрического центра тяжести области D_0 .

Расстояние $y = \bar{y}$ линии действия главного вектора касательных напряжений изгиба от начала координат определяется из уравнения

$$P_x \bar{y} + M_0(P_x) = 0, \quad (1.8)$$

где

$$M_0(P_x) = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} (x z_{iy}^i - y z_{ix}^i) dx dy. \quad (1.9)$$

Легко убедиться, что в окончательное выражение $M_0(P_x)$ не входят функции $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$. Поэтому не нарушая общности задачи, для простоты, в дальнейшем примем $\varphi_i = \psi_i = 0$.

Абсцисса $\bar{x}$ центра изгиба анизотропного составного стержня определяется из уравнения

$$P_y \bar{x} - M_0(P_y) = 0. \quad (1.10)$$

В случае $P_x = 0$, $P_y \neq 0$, постоянные, входящие в $M_0(P_y)$, соответствующие A_0 , B_0 и K_0 , обозначим через A_0^* , B_0^* и K_0^* . Эти постоянные определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ix}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} &= -1, \\
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{iy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} &= 0.
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поставим задачу: определить положение центра изгиба при помощи решения задачи кручения, не решая задачу об изгибе.

§ 2. Решение задачи. С этой целью функцию напряжений при изгибе $\Psi_i(x, y)$ представим в следующем виде

$$\Psi_i(x, y) = F_i(x, y) - \frac{C_0}{2} \Phi_i(x, y). \quad (2.1)$$

Здесь $\Phi_i(x, y)$ — функция кручения анизотропного составного стержня в области D_i , а $F_i(x, y)$ будем называть функцией изгиба того же стержня.

Функции $\Phi_i(x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [12]

$$L_2[\Phi_i] = -2 \text{ в областях } D_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

и условиям

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = 0 \text{ или } \Phi_i = 0 \text{ на } L_0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial s} \text{ или } \Phi_i = \Phi_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i = \left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_j \text{ на } L_{ij}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что из (1.2)–(1.5) и (2.1) для $F_i(x, y)$ получим следующие дифференциальные уравнения

$$L_2[F_i] = (2\gamma_{xz}B_0 + \gamma_{xy,z}A_0)x - (2\gamma_{yz}A_0 + \gamma_{xy,z}B_0)y + \\ + \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i}(A_0x - B_0y) \text{ в областях } D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

и условия

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = f_i \text{ на } L_0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} = f_i - f_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_j = g_i - g_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.9)$$

где

$$f_i = f_i^* \Big|_{\varphi_i=0}^{\psi_i=0}, \quad g_i = g_i^* \Big|_{\varphi_i=0}^{\psi_i=0} \quad (2.10)$$

Подставляя значения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i из (1.1) в выражение (1.9), переходя от функции Ψ_i к функциям F_i и Φ_i по формуле (2.1), затем интегрируя по частям, для $M_0(P_x)$ получим следующее выражение

$$M_0(P_x) = -P_x \sum_{i=1}^n R_i + \frac{P_x}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (B_0 y - A_0 x) d\Omega. \quad (2.11)$$

Здесь

$$R_i = \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (xF_i)}{\partial x} + \frac{\partial (yF_i)}{\partial y} \right] d\Omega - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega - \\ - \frac{C_0}{2} \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (x\Phi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (y\Phi_i)}{\partial y} \right] d\Omega + C_0 \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega,$$

или на основании формулы Грина

$$R_i = 2 \oint_{\partial D_i} F_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega - C_0 \oint_{\partial D_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds + C_0 \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega \quad (2.12) \\ \left(\Omega_s = \frac{1}{2} \int_0^s (x dy - y dx) \right).$$

Составим следующее скалярное произведение

$$(\Phi, L_2[F]) = \int_{\Omega} \Phi L_2[F] d\Omega. \quad (2.13)$$

Тогда, можно показать, что имеет место следующее соотношение

$$(\Phi, L_2[F]) = (F, L_2[\Phi]) = \oint_{\Omega} \Phi \frac{\partial^* F}{\partial n} ds - \oint_{\Omega} F \frac{\partial^* \Phi}{\partial n} ds. \quad (2.14)$$

Теперь составим связь между $\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i$ и производными функции Сен-Венана $\varphi_i(x, y)$.

При кручении анизотропного составного стержня касательные напряжения выражаются так [12, 13]

$$\tau_{xz}^i = \vartheta \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^i = -\vartheta \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \quad (2.15)$$

и через функции кручения $\varphi_i(x, y)$ —

$$\tau_{xz}^i = \vartheta \left[A_{45}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right) + A_{55}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right) \right], \\ \tau_{yz}^i = \vartheta \left[A_{44}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right) + A_{45}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right) \right], \quad (2.16)$$

где ϑ — угол закручивания на единицу длины стержня, а A_{kl}^i — модули упругости, которые связаны с коэффициентами деформации a_{kl}^i следующим образом

$$A_{44}^i = \frac{a_{55}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}, \quad A_{45}^i = -\frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}, \quad A_{55}^i = \frac{a_{44}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}. \quad (2.17)$$

На основании (2.15)–(2.17), можно доказать, что

$$\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - 2 \frac{d\Omega_s}{ds}. \quad (2.18)$$

Принимая во внимание (2.2), (2.14) и (2.18), находим

$$\begin{aligned} 2 \oint_{L_i} F_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega = (\Phi_i, L_2[F_i]) - \\ - \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds - \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Затем учитывая (1.8), (2.11), (2.12) и (2.19), получим

$$\begin{aligned} \bar{y} = \sum_{i=1}^n (\Phi_i, L_2[F_i]) - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds - \\ - \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds + C_0 \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (B_0 y - A_0 x) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

На основании (2.3) и (2.4) $\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds = 0$, так как интегралы по L_0 равны нулю, а по линиям раздела L_{ij} сокращаются.

Нетрудно убедиться в следующем факте

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_0} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i \left[\left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_j \right] ds$$

или, учитывая (2.3) и (2.9),

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i (g_i - g_j) ds. \quad (2.21)$$

Так как $\sum_{i=1}^n \oint_{L_0} \Phi_i g_i ds = 0$ на основании (2.3), то выражение (2.21)

можно преобразовать так

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i (g_i - g_j) ds + \sum_{i=1}^n \oint_{L_2} \Phi_i g_i ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i g_i ds; \quad (2.22)$$

Интегрируем по частям третий член выражения (2.20)

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^n [F_i \varphi_i]_{L_i} - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial F_i}{\partial s} ds \quad (2.23)$$

$\sum_{i=1}^n [F_i \varphi_i] = 0$ в силу однозначности функций φ_i и Ψ_i на замкнутых контурах L_i [10].

Преобразуем второй член выражения (2.23). При помощи (2.7) и (2.8) можно написать

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial F_i}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i f_i ds. \quad (2.24)$$

Составим следующее выражение

$$I = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i f_i ds - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i g_i ds. \quad (2.25)$$

Подставляя значения f_i и g_i из (2.10) в (2.25), затем принимая формулу Грина, выражение (2.25) можно представить в таком виде

$$\begin{aligned} I = & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \Phi_i (A_0 x - B_0 y) d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_{33}^i} \iint_{D_i} \left\{ (A_0 x^2 + K_0 x) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. + (B_0 y^2 + K_0 y) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + a_{44}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] \right\} d\Omega. \quad (2.26) \end{aligned}$$

На основании (2.15)–(2.17) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + y \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} &= a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - a_{44}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - x. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Тогда в силу (2.27) выражение (2.26) примет вид

$$I = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (A_0 x - B_0 y) d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \Phi_i (A_0 x - B_0 y) d\Omega. \quad (2.28)$$

Учитывая выражения (1.7), (2.6), (2.20)–(2.24) и (2.28), для определения ординаты центра изгиба у анизотропного (неортоготропного) составного стержня находим следующую окончательную формулу

$$\begin{aligned} \bar{y} = & \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\nu_{xz} B_0 + \tau_{xy,z} A_0) (x - x_c) - \\ & - (2\nu_{yz} A_0 + \tau_{xy,z} B_0) (y - y_c)] d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Аналогично, из (1.10) получим формулу для абсциссы $\bar{x}$ центра изгиба

$$\begin{aligned} \bar{x} = & - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\nu_{xz} B_0^* + \tau_{xy,z} A_0^*) (x - x_c^*) - \\ & - (2\nu_{yz} A_0^* + \tau_{xy,z} B_0^*) (y - y_c^*)] d\Omega + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из формул (2.29) и (2.30) нетрудно получить выражения для определения координаты центра изгиба анизотропного (неортоготропного) однородного стержня

$$\begin{aligned} \bar{y} = & - \iint_D [(2a_{13} \bar{B}_0 - a_{30} \bar{A}_0) (x - x_c) - (2a_{23} \bar{A}_0 - a_{30} \bar{B}_0) (y - y_c)] \Phi d\Omega + \\ & + \iint_D (\bar{A}_0 x + \bar{B}_0 y + \bar{K}_0) \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \iint_D [(2a_{13} \bar{B}_0 - a_{30} \bar{A}_0) (x - x_c) - (2a_{23} \bar{A}_0 - a_{30} \bar{B}_0) (y - y_c)] \Phi d\Omega + \\ & + \iint_D (\bar{A}_0 x + \bar{B}_0 y + \bar{K}_0) \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\bar{A}_0, \dots, \bar{K}_0$ определяются из следующей системы уравнений

$$\bar{A}_0 J_{yy} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_y = -1$$

$$\bar{A}_0 J_{xy} + \bar{B}_0 J_{xx} + \bar{K}_0 S_x = 0$$

$$\bar{A}_0 S_y + \bar{B}_0 S_x + \bar{K}_0 \Omega_0 = 0$$

$$\bar{A}_0 J_{yy} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_y = 0$$

$$\bar{A}_0 J_{xx} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_x = -1$$

$$\bar{A}_0 S_y + \bar{B}_0 S_x + \bar{K}_0 \Omega_0 = 0.$$

Отметим, что для определения положения центра изгиба ортотропного составного стержня, когда физические оси совпадают с геометрическими осями ($a_{45}^i = a_{36}^i = 0$, $a_{23}^i = -\frac{\nu_{zy}}{E_y}$, $a_{13}^i = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}$, $a_{33}^i = \frac{1}{E_z}$) из (2.29) и (2.30) получим

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -2 \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \Phi_i [\nu_{xz} B_0^* (x - x_c^*) + \nu_{yz} A_0^* (y - y_c^*)] d\Omega - \\ & + \sum_{i=1}^n E_z^i \int_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 2 \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \Phi_i [\nu_{xz} B_0^* (x - x_c^*) - \nu_{yz} A_0^* (y - y_c^*)] d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n E_z^i \int_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В частном случае, если предполагать материалы составного стержня изотропными, то есть $E_x^i = E_y^i = E_z^i = E^i$, $\nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu$, $G_{yz}^i = G_{xz}^i = G^i$, то из (2.33) и (2.34) получаются формулы для определения положения центра изгиба составного призматического стержня [10].

Теперь перейдем к определению положения центра изгиба анизотропного составного стержня с продольными полостями.

Можно доказать, что решения задачи кручения анизотропного составного стержня с продольными полостями (то есть область D_0 является многосвязной) могут получиться из решения задачи кручения анизотропного составного стержня при помощи предельного перехода, когда упругие постоянные $a_{44}^i \rightarrow \infty$, $a_{33}^i \rightarrow \infty$, $a_{45}^i \rightarrow \infty$ ($i = n+1, n+2, \dots, n+m$). Здесь $D_{n+1}, D_{n+2}, \dots, D_{n+m}$ — области соответствующих полостей.

Учитывая эти соображения, из (2.29) и (2.30) находим формулы для определения положения центра изгиба анизотропного составного стержня с продольными полостями

$$\begin{aligned} \bar{x} = & - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\theta_{xz} B_0^* + \tau_{xy, z} A_0^*) (x - x_c) - \\ & - (2\theta_{yz} A_0^* + \tau_{xy, z} B_0^*) (y - y_c)] d\Omega + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [(2\theta_{xz} B_0^* + \tau_{xy, z} A_0^*) (x_i - x_c) - (2\theta_{yz} A_0^* + \tau_{xy, z} B_0^*) (y_i - y_c)] \Omega_i; \\ \bar{y} = & \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\theta_{xz} B_0^* + \tau_{xy, z} A_0^*) (x - x_c) - \\ & - (2\theta_{yz} A_0^* + \tau_{xy, z} B_0^*) (y - y_c)] d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [(2\theta_{xz} B_0^* + \tau_{xy, z} A_0^*) (x_i - x_c) - (2\theta_{yz} A_0^* + \tau_{xy, z} B_0^*) (y_i - y_c)] \Omega_i. \end{aligned}$$

Здесь Ω_i , x_i , y_i — площадь и координаты центра тяжести области D_{n+1} ($i=1, 2, \dots, m$), а постоянные Φ_i^0 ($i=1, 2, \dots, m$), являющиеся значениями функции напряжения на контурах L_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+m$), определяются при помощи обобщенной теоремы Бредта [12].

Ереванский государственный
университет

Ереванский политехнический
институт

Поступила 18 XII 1964

Վ. Ս. ՍԱՐԿԻՅԱՆ, Վ. Վ. ՄԻԿԵԼՅԱՆ

ԲԱՆԱԶԵՎԻՐ ԱՆԻՉԱՏՐՈՊ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՉՈՂԻ ՄՈՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԳԻՐԳԸ
ՈՐՈՇՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում ստացված են բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ծավալն կենտրոնի կոորդինատները առանց լուծելու ալգպիսի ձողերի ծավալն խնդիրը:

Այդ բանաձևերը արտահայտված են անիզոտրոպ բաղադրված ձողի ուղիղ ման խնդրի Սեն-Վենանի և Պրանգլի ֆունկցիաների միջոցով:

Ծավալն խնդրի լարումների $\Psi_i(x, y)$ ֆունկցիան ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$\Psi_i(x, y) = F_i(x, y) - \frac{C_0}{2} \Phi_i(x, y),$$

հաշվում է խնդիրը պարզեցնել և արտահան ստանալ դրված հիմնական խնդրի լուծումը: Այսպես $F_i(x, y)$ -ը ծածկան ֆունկցիան է, $\Phi_i(x, y)$ -ը՝ սյուր-ման ֆունկցիան, իսկ C_0 -ն հաստատուն է:

Մասնավոր դեպքում ստացված են օրթոտրոպ, բաղադրյալ, ինչպես նաև բաղմակալ լայնական կտրվածք ունեցող անիզոտրոպ բաղադրյալ ձողի ծածկան կենտրոնները հաշվելու համար բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. О приближенном определении положения центра жесткости для симметрического профиля. ДАН СССР, 3, № 3, 1934.
2. Берман М. Э. К вопросу о центре изгиба. ДАН СССР, 72, № 1, 1950.
3. Голошкевич С. С. Труды Ленинградского политехнического института, раздел Гидротехники и Стронтельного дела, № 2, 1950.
4. Capildeo R. Flexure with shear centres a general treatment with complex variable. Proc. Cambridge Phil. society, 49, part 2, 1953, pp. 308--318.
5. Новожилов В. В. О центре изгиба. ПММ, 21, № 2, 1957.
6. Прокопов В. К. О центре жесткости многосвязного профиля. Научно-технический информационный бюллетень, № 7, раздел физ.-мат. наук, ЛПИ, Л., 1960.
7. Рыбакина О. Г. О центре изгиба тонкостенных многосвязных стержней. Исследования по упругости и пластичности. Сборник № 1, Изд. ЛГУ, Л., 1961.
8. Джанелидзе Г. Ю. Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении. Труды Ленинградского политех. ин-та, раздел Динамика и прочность машин, № 226, Л., 1962.
9. Саркисян В. С. О формуле центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным сечением. ДАН АрмССР, 32, № 4, 1961.
10. Чобанян К. С., Микаелян В. В. Об определении центра изгиба составного стержня при помощи решения задачи кручения. Известия АН АрмССР, 16, № 4, 1963.
11. Саркисян В. С. Изгиб неортогтронных составных призматических стержней. ДАН АрмССР, 39, № 4, 1964.
12. Саркисян В. С. Кручение неортогтронных составных призматических стержней. ДАН АрмССР, 40, № 2, 1965.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.