

Г. С. ВАРДАНЯН, Р. Е. МКРТЧЯН

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

В настоящей статье предлагается метод исследования нестационарных напряжений с применением поляризационно-оптических измерений.

Исследуется напряженное состояние в консольной балке, ослабленной тремя отверстиями, при свободном колебании с затуханием. Картины полос интерференции в зоне отверстий в процессе колебания регистрируются при помощи скоростной кинокамеры СКС—1М.

### Подобие нестационарных систем

Поляризационно-оптические исследования на моделях приобретают практическое значение лишь тогда, когда напряжения, перемещения и др., замеренные на моделях из полимерных материалов, могут быть перенесены на деталь конструкции реальных размеров.

Введем масштабы для напряжений, деформаций, линейных размеров, времени, плотности и модуля упругости следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \alpha_\sigma \sigma_m, & l_n &= \alpha_l l_m, & \rho_n &= \alpha_\rho \rho_m, \\ \varepsilon_n &= \alpha_\varepsilon \varepsilon_m, & t_n &= \alpha_t t_m, & E_n &= \alpha_E E_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Необходимым условием подобия является требование равенства коэффициентов Пуассона для модели и оригинала, то есть

$$\mu_n = \mu_m.$$

Если материал для модели выбран, то коэффициенты подобия для плотности  $\alpha_\rho$  и модуля упругости  $\alpha_E$  определяются однозначно. Коэффициент геометрического подобия  $\alpha_l$  выбирается, исходя из удобства проведения эксперимента. Коэффициенты подобия напряжений  $\alpha_\sigma$ , деформаций  $\alpha_\varepsilon$  и времени  $\alpha_t$  должны выражаться через остальные коэффициенты подобия.

Для установления связи между этими коэффициентами, следуя А. Г. Назарову [1], мы пользуемся не методом анализа размерностей, как это часто делают при моделировании, а общими зависимостями динамики. Если пользоваться методом анализа размерностей, то должны

принимать  $\alpha_i = 1$ , так как относительная деформация — величина безразмерная.

Если исходить из общих зависимостей динамики, то это ограничение снимается и коэффициент  $\alpha_i$  может принимать любое значение. Это дает более широкие возможности для моделирования.

Применив закон Гука, для природы и модели получим

$$\alpha_2 = \alpha_2 \alpha_E. \quad (2)$$

Предположим, что на тело действуют поверхностные и объемные силы. Найдем коэффициенты подобия для этих сил.

Если на природу действует сосредоточенная сила  $P_n$ , то напряжение на бесконечно малом элементе поверхности  $\Delta S_n$  будет  $P_n / \Delta S_n$ . Соответствующее напряжение на подобной модели будет  $P_m / \Delta S_m$ . Согласно (1) можем написать

$$\frac{P_n}{\Delta S_n} = \alpha_2 \frac{P_m}{\Delta S_m} \quad \text{или} \quad P_n = \alpha_2 \alpha_i^2 P_m = \alpha_2 \alpha_E \alpha_i^2 P_m. \quad (3)$$

Коэффициент подобия для объемных сил получим из уравнения равновесия теории упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + R_x &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \end{aligned}$$

Применив эти уравнения, для модели и природы будем иметь

$$R_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_i} R_m. \quad (4)$$

В случае нестационарной задачи на тело, кроме поверхностных сил, действуют также и силы инерции, которые являются объемными силами. На основании (4) для моделирования сил инерции имеем

$$\left( \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \right)_n = \frac{\alpha_2}{\alpha_i} \left( \rho \frac{d^2 w}{dt^2} \right)_m$$

или, применив соотношения (1), получим

$$\alpha_2 = \alpha_i^2 \alpha_\rho \alpha_i^{-2}. \quad (5)$$

Эта формула дает возможность, в случае нестационарной задачи перейти от напряжения, измеренного на модели, к напряжениям в натуре.

Из соотношения (2) и (5) получаем зависимость для масштаба времени

$$\alpha_t = \alpha_i \sqrt{\frac{\alpha_\rho}{\alpha_E}}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай свободного колебания стержня с учетом затухания.

Если не учитывать инерции поворота внешнего затухания, то дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня можно записать в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial \xi^3} = 0,$$

где

$$\zeta^2 = \frac{\gamma F l^4}{g E J}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Из этого уравнения, с учетом того, что  $\alpha_0 = \alpha_l$ , получаем масштаб подобия для коэффициента затухания  $h = \mu \omega^2$  следующим образом

$$\alpha_h = \alpha_\mu \alpha_\omega^2 = \alpha_l \frac{1}{\alpha_l^2} = \frac{1}{\alpha_l}. \quad (7)$$

Для частоты собственных колебаний

$$f = \omega \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \omega^2}{4}}$$

получаем

$$f_n = \frac{f_n}{\alpha_l} = \frac{1}{\alpha_l} \sqrt{\frac{\alpha_F}{\alpha_\mu}} f_n. \quad (8)$$

### Экспериментальная установка

Для поляризационно-оптических исследований нестационарных напряжений при колебаниях использовали поляризационную установку ППУ-5 и скоростную кинокамеру СКС-1М.

В качестве источника монохроматического света служила мощная ртутная лампа ДРШ-250 с зеленым светофильтром ( $\lambda = 546,1 \text{ м}\mu$ ). Во избежание пульсации тока, которая сильно чувствуется при скоростной съемке картин полос, лампу ДРШ-250 питали постоянным током от генератора. Далее, для упрощения фокусировки картин полос и для возможности получения различных увеличений снимаемого объекта, в оптическую схему установки были введены дополнительные линзы с различными фокусными расстояниями.

Кинокамера СКС-1М при транспортировании 16 мм киноплёнки длиной 30 м дает возможность снимать со скоростью 4800 кадр/сек. Съемка производится на протяжении всей длины пленки. Однако, первые 12 м пленки соответствуют разгону камеры; на этой длине пленки скорость съемки постепенно возрастает. Чтобы изучаемый процесс был снят на последних 18 метрах пленки, процесс нагружения модели соответственно синхронизируется с началом работы камеры.

При проведении эксперимента оказалось, что при данной оптической схеме установки объектив камеры концентрирует свет в центре поля, и в связи с этим в центральной части кадров получается передержка, а по краям — недодержка. Далее кадры получаются очень

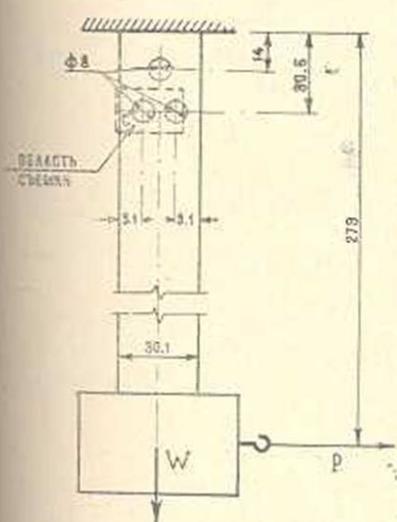
маленькими и занимают только половину полезной ширины пленки. В связи с этим съемки производились без объектива; при этом фокусировка картин полос достигалась с помощью дополнительных линз на поляризационной установке.

При съемке без объектива хорошо обеспечивается равномерность света на пленке, и кадры занимают всю полезную ширину пленки (величина кадров в два раза больше при том же относительном увеличении).

Были применены различные киноплёнки для фотографирования картин полос: негативные МЗ—2, А—2 и обратимая киноплёнка. Наиболее подходящим оказалась обратимая киноплёнка со светочувствительностью 65 ед. Приведенные ниже картины полос сфотографированы на обратимой киноплёнке.

#### Исследование концентрации напряжений около отверстий консольной балки при свободном колебании с затуханием

Размеры модели и схема ее нагружения приведены на фиг. 1.



Фиг. 1. Размеры модели и схема ее нагружения. Толщина  $s_m = 6,2$  мм.

Оптическая постоянная материала модели  $\sigma_0^{(1,0)} = 12$  кг/см, модуль упругости  $E_m = 33,10^3$  кг/см<sup>2</sup>, удельный вес  $\gamma_m = 1,4$  г/см<sup>3</sup>.

На свободном конце балки была закреплена сосредоточенная масса весом  $W_m = 1,727$  кг, а в горизонтальном направлении через нитку приложена нагрузка  $P_m = 3,133$  кг. Далее нагрузка  $P_m$  мгновенно снималась подрезанием нитки, и балка под действием инерционных сил совершала свободные колебания. Скоростная кинокамера включалась так, что первые три полупериода колебаний снимались на последних метрах пленки, где скорость достигает максимальной величины.

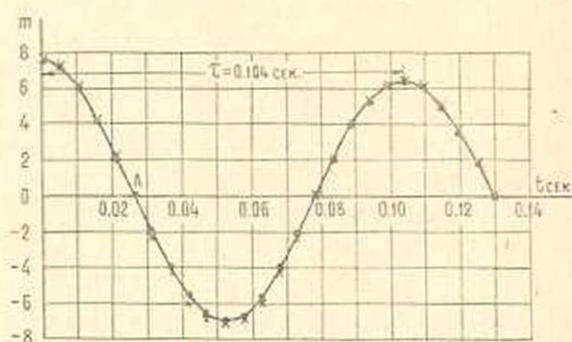
Непосредственным измерением на пленке определены частота съемки — 4800 кадр/сек, период колебаний для модели  $\tau_m = 0,104$  сек. Частота колебаний  $f_m = 1/\tau_m = 9,6$  герц.

Изменение порядка полосы  $m$  в точке  $C$  на контуре отверстия в зависимости от времени приведено на фиг. 2.

Коэффициент затухания  $h_m$  определяется на основании полученного графика

$$h_m = \frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{u_i}{u_{i+1}} \right| = \frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{m_i}{m_{i+1}} \right| = \frac{1}{0,104} \ln \frac{7,6}{6,4} = 1,675.$$

Картины полос интерференции для участка  $OA$  графика, через равные интервалы времени приведены на фиг. 3.



Фиг. 2. Диаграмма изменения порядка полосы  $m$  в точке  $C$  модели. Порядки полос для статических нагрузок показаны крестиками.

Напряжение на контурных точках отверстия определяется по формуле

$$\sigma_m = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{s_m} m = 19,35 m. \quad (9)$$

Здесь  $\sigma_0^{(1,0)} = 12 \text{ кг/см}$  — оптическая постоянная материала модели;  $s_m = 0,62 \text{ см}$  — толщина модели: в точке  $C$  порядок полосы  $m$  берется из графика (фиг. 2).

Так как за принятый интервал между кадрами упругие волны пробегают несколько раз по длине балки, то естественно заснятые кадры в связи с интерференцией волн дают квазистатическое распределение напряжений.

Для сравнения были определены порядки полос в точке  $C$  модели при статическом приложении соответствующих нагрузок.

Нагрузки для различных моментов времени определяли<sup>3</sup> по формуле

$$P_m(t) = P_m e^{-h_m t} \cos \omega_m t,$$

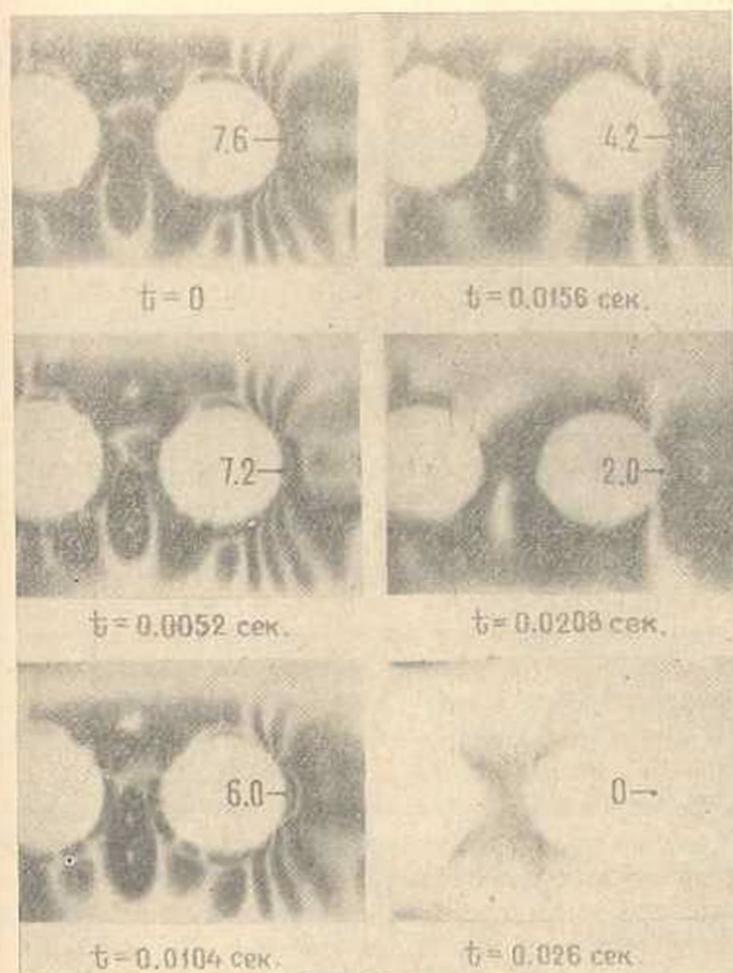
где по данным эксперимента  $P_m = 3,133 \text{ кг}$ ,  $h_m = 1,675$ ,  $\omega_m = 2\pi f_m = 60,3$ .

Как видно по фиг. 2, диаграммы для динамических и статических нагрузок практически совпадают: максимальное расхождение составляет 7%.

Для пересчета полученных величин с модели на натурную деталь воспользуемся формулами подобия, полученными выше.

Предположим, что стальная деталь ( $E_n = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\gamma_n = 7,8 \text{ г/см}^3$ ), геометрически подобная исследованной модели ( $x_1 = 2$ ),

совершает свободные колебания при мгновенном удалении силы  $P_0 = 20$  кг.



Фиг. 3. Картины полос интерференции для участка  $OA$  диаграммы.

По формуле (3) определяем  $\alpha_i$

$$\alpha_i = \frac{1}{\alpha_E \alpha_i^2} \frac{P_0}{P_M} = \frac{1}{60,7 \cdot 4} \frac{20}{3,133} = 0,0263.$$

Вес сосредоточенной массы, закрепленной на свободном конце детали, определяется по этой же формуле

$$W_n = \alpha_i \alpha_E \alpha_i^2 W_M = 0,0253 \cdot 60,7 \cdot 4 \cdot 1,727 = 11 \text{ кг.}$$

Масштаб времени  $\alpha_t$  определяется по формуле (6)

$$\alpha_t = 2 \sqrt{\frac{5,57}{60,7}} = 0,606.$$

Имея масштаб времени, по формулам (7) и (8) определяем коэффициент затухания и частоту колебаний для детали

$$h_n = \frac{1,675}{0,606} = 2,75; \quad f_n = \frac{9,6}{0,606} = 15,85 \text{ герц.}$$

Напряжения на натурной детали определяются по формуле (5)

$$\sigma_n = \frac{4 \cdot 5,57 \cdot 0,0263 \sigma_m}{0,606^2} = 1,585 \sigma_m,$$

где  $\sigma_m$  для контурных точек определяется по формуле (9).

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1964

Յ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ր. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՂ-ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ  
ՖՈՏՈԱՌՍԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա մ ֆ ո ֆ ո ւ լ մ

Հոդվածում ստաջարկվում է ոչ-ստացիոնար լարումների հետազոտման էքսպերիմենտալ մեթոդ: Բերվում են դինամիկ խնդիրների համար նմանաթիվան բանաձևերը: Բնաերֆերենցիոն շերտերի փոփոխաթյունը աստանման պրոցեսում նկարահանվում է կինոկամերայի միջոցով, 4800 կադր/վրկ արագությամբ:

Որպես կոնկրետ խնդիր հետազոտված է կոնսոլային հեծանի անցքի շրջակայքում լարումների կոնցենտրացիայի փոփոխաթյունը հեծանի ազատ աստանումների դեպքում՝ մարման հաշվառմամբ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Назаров А. Г. О механическом подобии твердых тел и его применение к исследованию строительных конструкций и сейсмостойкости сооружений. Известия АН АрмССР, серия техн. наук, II, № 4 и № 6, 1958.
2. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, Киев, 1956.